现代物理基础丛书



现代宇宙学

MODERN COSMOLOGY

〔美〕Scott Dodelson 著

张同杰 于浩然 译

科学出版社

#《现代物理基础丛书》编委会

现代物理基础丛书 78

MODERN COSMOLOGY

现 代 宇 宙 学

〔美〕Scott Dodelson 著
张同杰 于浩然 译

科 学 出 版 社
北 京

图字：01-2013-0726

内 容 简 介

本书开篇介绍了用 Friedmann-Robertson-Walker (FRW)度规描述的平滑均匀宇宙，包括对暗能量、大爆炸原初核合成、再复合和暗物质的细致处理. 从此处出发，读者被引入 FRW 宇宙的扰动：爱因斯坦－玻尔兹曼方程扰动的演化和由原初暴胀导致的扰动的产生及其观测结果. 这些观测结果包括表征重子声学振荡（BAO）的峰值和极化的宇宙微波背景辐射（CMB）的各向异性谱，重子声学振荡的物质功率谱，及通过星系的测光巡天、红移空间畸变（RSD）、星系团数密度和弱引力透镜对密度扰动的探测. 本书结束于一个关于数据分析方法的长章节. 本书是第一本详细地解释以下性质的书：宇宙微波背景辐射的声学峰的结构；用于探测到原初引力波的 E／B 的极化分解，以及用于日益增加的大型宇宙学数据集合的数据分析技术. 通过这本书，读者将会学到在宇宙学工作中需要的工具，了解到现代观测技术在我们对宇宙图景的认识和理解上产生了怎样的翻天覆地的革命性变化.

本书与当今宇宙学研究前沿结合紧密，适合理论物理和天文学以及相关专业研究生作为教材，也适合从事宇宙学研究的物理学和天文学相关专业科研人员和教师学习参考.

图书在版编目(CIP)数据

现代宇宙学/(美)斯考特・道德尔森(Scott Dodelson)著；张同杰，于浩然译. —北京：科学出版社，2016. 6
(现代物理基础丛书)
书名原文：Modern Cosmology
ISBN 978-7-03-049544-0

Ⅰ. ①现… Ⅱ. ①斯… ②张… ③于… Ⅲ. ①宇宙学 Ⅳ. ①P159

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2016) 第 188000 号

责任编辑：钱 俊／责任校对：樊雅琼
责任印制：张 伟／封面设计：陈 敬

科学出版社 出版
北京东黄城根北街 16 号
邮政编码：100717
http://www.sciencep.com

北京教图印刷有限公司印刷
科学出版社发行 各地新华书店经销
*
2016 年 8 月第 一 版 开本：720 × 1000 B5
2016 年 8 月第一次印刷 印张：25 1/4
字数：475 000

定价：138.00 元

(如有印装质量问题，我社负责调换)

序　一

对于宇宙，人们一直充满着好奇。探索宇宙万物之奥妙，寻找宇宙深处之知己，既富有神秘色彩又极具挑战性。当我们褪去孩提时代的幻想，踏上科学探究宇宙的旅程，我们既需要良师的指点，也需要一本宇宙学的入门书籍。

从事所谓高大上的宇宙学研究三十年间，我接触和阅读过国内外的诸多宇宙学著作，内容详尽又丰富，但视野和角度各有不同。也曾试图教授宇宙学，在匆匆备课中曾感觉到，一本难易适中、面对本科和研究生的宇宙学教程之重要和迫切。然而一直在碌碌无为中奔波，却不曾静下来去认真传授宇宙学，更无钻研宇宙学之毅力和能力。

素闻费米实验室 Scott Dodelson 教授之大名，尤其是早期所著 *Modern Cosmology* 一书，对我及身边的同事影响颇深，是适合从事天体物理研究的研究生入门之最好教科书之一。高深而枯燥的理论与丰富而广博的观测，在这本书里被有机结合起来，既适合理论研究的深入学习，也适合观测宇宙的基础铺垫。

感谢长期从事宇宙学教学和研究的张同杰教授，集数十年教授宇宙学的经验和严谨，在讲授 *Modern Cosmology* 的基础上，把此书中文版呈现给国内的同行和学生。无论对于我们这些宇宙学的研究者，还是对于宇宙学入门的学生们，都将是一个福音。当翻阅中文手稿，重游“宇宙”，我被逻辑严谨和文风流畅所感染，犹如身临其境，聆听张同杰教授授课之精彩。张同杰教授在宇宙学研究的开拓中有许多独到的见解和贡献，教书育人亦是孜孜不倦。此次奉献《现代宇宙学》之译作，将会积极助推国内宇宙学的研究和人才的培养。

宇宙之浩大，我们心中现在的疑惑必将被未来的理解所代替。《现代宇宙学》也终将会被另一《现代宇宙学》而更新。在探索宇宙的征途上，人类将永无止境。

武向平
中国科学院国家天文台
2016 年 6 月 16 日

序　二

1999 年 7 月, 我受邀到中国科学院上海天文台主持张同杰的博士论文答辩。张同杰博士毕业后即被推荐来我校天文系工作。十几年来，张同杰不负众望，在教学和科研方面都表现出色，已成为天文系骨干教师之一。在科学研究方面，他与国内外同行建立了密切的合作关系。据我所知，包括国家天文台，加拿大理论天体物理研究所，美国的亚利桑那大学物理系、劳伦斯伯克利国家实验室等单位。这些年来张同杰取得了许多有份量的研究成果，论文的数量和质量都值得称赞。其中，张同杰教授与于浩然博士 (同为本书译者) 通过与国内外同行的合作，利用届时世界运行速度最快的我国天河二号超级计算机完成了世界上最大规模宇宙大尺度结构的 N 体数值模拟，引起广泛关注。在教学方面，他一直从事宇宙学和天体物理的教学，曾获北京市教学成果二等奖。尤其值得提及的，他指导和培养的多位本科生和研究生曾被评为我校和国家级的优秀学生，其中于浩然师从张同杰教授取得天体物理博士学位，毕业后前往加拿大理论天体物理研究所、北京大学科维理天文与天体物理研究所继续从事宇宙学研究。

张同杰在工作中一向勤勤恳恳、兢兢业业，我的办公室和他相邻，无论是平时还是节假日，经常看到他在那里工作。

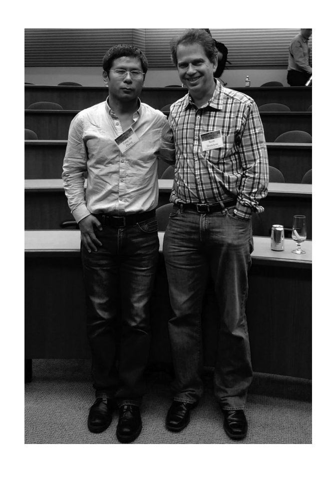
美国费米实验室 Scott Dodelson 教授的 *Modern Cosmology* 被公认为是一本优秀的宇宙学专著，适合研究生和本科高年级学生使用。该书特色鲜明，思路明晰。张同杰在使用本书过程中，还和作者进行过多次讨论，指出了书中的一些错误。我相信，本书翻译出版，会使我国如此缺少的高端天文学教材的现状得到一些弥补。

何香涛

北京师范大学

2016 年 6 月 18 日

中译本序言



《现代宇宙学》一书能够被译为中文版本，我深感荣幸，尤其是出自张同杰这样的知名学者之手。随着中国日益发展成为世界上科学研究的领军国家之一，我很有幸能够有这样的机会，介绍宇宙学这一历史悠久的科学领域的相关发现。在了解基本物理知识的基础上，学生能够很快掌握推动现代宇宙学发展成为目前最吸引人的研究领域的相关技术和想法。宇宙学中还有很多问题有待解决，能够帮助引导未来同仁步入求索之路，于我，与有荣焉。

Scott Dodelson

2014 年 12 月 18 日

Preface to Chinese Edition

It is a great honor to have *Modern Cosmology* translated into Chinese, especially by such a noted scholar as Tong-Jie Zhang. As China re-emerges as one of the premier countries in the world leading scientific research, the opportunity to help conveysome of the exciting discoveries in cosmology, an age-old field, is truly an honor. With understanding of basic physics, students should quickly be able to learn about many of the techniques and ideas that have propelled modern cosmology to be one of the most exciting of all scientific fields. Many questions remain to be answered and I feel privileged to help future colleagues join in the quest to provide answers.

Scott Dodelson

December 18, 2014

原书作者简介

Scott Dodelson 是费米实验室理论天体物理组的负责人，同时也是芝加哥大学天文与天体物理系的副教授。他从哥伦比亚大学获得博士学位，在任职费米实验室和芝加哥大学之前，曾在哈佛大学担任研究员。他在宇宙学领域发表了七十多篇文章，其中大多数基于宇宙微波背景和宇宙的大尺度结构。Scott Dodelson 是一名理论宇宙学家，同时也参与多个实验项目，包括斯隆数字巡天（SDSS）以及 Python 和 MSAM 的各向异性实验。

译　者　序

这本译著的出版用“猴年马月”形容一点也不过分, 从 2011 年签署翻译出版协议至今一拖再拖直到今年的“猴年”，因此真诚地向科学出版社表示歉意。然而巧合的是今年是我的本命年，但绝非故意拖到猴年出版, 而的确是近几年教学科研工作繁重、时间紧张所致。故此翻译肯定没有达到极致，不妥之处在所难免。

“猴年”天文界大事颇多。我国“悟空”暗物质卫星发射成功；500 米口径球面射电望远镜 FAST 也将于今年 9 月竣工。春节刚过，美国 LIGO 宣布发现了引力波。引力波发现似乎与我关系不大, 但其实这本书的翻译与引力波关系却很大。几年前我改正了本书在早期版本中引力波的推导中原文出现的错误，作者在新版致谢中特别表示感谢。这个机缘导致我开始使用该书作为研究生的教材，并且产生了翻译该书的想法。

在使用该书给研究生讲授宇宙学过程中，深感该书是迄今为止适合天体物理和物理专业研究生之用的最好的宇宙学教材。该书的核心内容是对宇宙中物质和辐射扰动的详细介绍。作者完全从广义相对论出发，对玻尔兹曼方程和引力场方程在理论上进行数学操作 —— 扰动，其推导过程结构分明、条理极其清楚。读懂该书, 基本掌握了宇宙大尺度结构形成的扰动理论和以功率谱为代表的观测统计技术, 从而摆脱“只见树木不见森林”的窘境，也就会清晰地知道每一片叶子在一棵树的哪个树枝上, 而不至于像一些研究生，虽然发表了许多文章, 竟然不知道自己所研究的问题属于标准（平滑或者零阶）宇宙学还是高阶（扰动）宇宙学。

在本书的翻译过程中，我的学生孟晓磊、王鑫、李时雨、武朝剑、张明建、于洋、马骢、刘德子、裴晓星、岳楠楠、袁硕、刘思琦、胡奂晨、杨帆、赵芳洲等都给予了极大的协助和很好的建议，特此表示感谢。

特别感谢李宗伟教授和邹振隆研究员向科学出版社推荐我翻译此书。

该书最适合天文和物理科学工作者以及天文系和和物理系的研究生之用，也适合天文系、物理系和数学系的高年级本科生使用。

张同杰

2016 年 5 月 18 日

原 书 前 言

大议会众成员有三句格言: 凡事三思而后行; 使学生独立思考; 教学中有所为有所不为 (启发学生思考).

犹太圣传 1: 1

当今宇宙学在两个方面使之比以往更具魅力。其一是海量的观测数据。我们对宇宙结构的认识如何快速地进步，从绘制全天图的星系巡天中可见一斑。1985 年，最高水平的巡天由美国哈佛史密松天体物理中心 (CfA) 实施，当时该巡天只包含了 1100 个星系的位置。而今天的斯隆 (SDSS) 和 2 度视场 (2DF) 巡天已经记录了 50 万个星系的 3 维位置信息。

另一方面，现代宇宙学在理解宇宙方面区别于以往的成就在于我们已经发展了一套与观测数据定量符合的自洽理论框架。这两方面的特征是现代宇宙学令人兴奋的奥秘之处：我们有理论可以做出预言，同时这些预言又可以被观测检验。

理解理论的实质以及它做出的预言是举足轻重的。首先，许多理论预言是统计性的。我们无法预测宇宙微波背景 (CMB) 在 RA=15h, dec=27° 处是否存在高温点，相反能预测这些高温和低温点的分布和量级大小。其次，这些预言及其理论基础涉及经历大量物理演化步骤的、来自广泛的物理学范畴的许多讨论结果。例如，我们将会看到：CMB 中热点和冷点的分布依赖于量子力学、广义相对论、流体动力学和光与物质的相互作用。因此我们确实需要遵循大议会众成员的第一个格言：在做出判断之前需要耐心谨慎 (凡事三思而后行)。的确，对宇宙中结构的基本测量—物质和辐射的功率谱—与目前的宇宙学理论符合得相当好，然而，直到第 7 章和第 8 章，我们才能掌握必要的工具来完全理解这种一致性。清醒的头脑总是懂得在对如同理解我们的宇宙所必备的崇高想法做出评判之前要耐心谨慎。对 “保持耐心谨慎” 这个主题的现代理解是在我们能够正确评价目前的宇宙学模型的成功之前需要建立一套基本的框架（详见第 1~6 章）。

随机地翻开这本书的一页，你 (读者) 将会看到我已经尽全力去实施第二条格言。在这里可以看到有助于理解的常识性和定性的讨论，但本书的主要目的是提供给你 (读者) 开始学习宇宙学、进行独立计算的工具，并且能够从第一原理出发领会宇宙学的思想。一旦你 (读者) 掌握了这些工具，你将为基本理论模型的任何变化做好了准备。例如，本书的大部分基于这样一个看法，即暴胀创生了我们今天所看到的宇宙结构。如果这证明是错误的，第 4、5 章发展的研究扰动的方法，以及

本书后半部分描述的观测和分析技术仍将恰当可靠。一个更醒目的例子是，本书所有部分都假设宇宙中存在三维空间。这似乎是一个合理的假设（至少对我而言），但是今天许多天体物理学家正在探讨额外维在宇宙早期可能已经起作用的可能性。即便额外维确实证明是重要的，扰动仍需在我们的三维膜上演化和观测，这里发展的工具仍将适用。

上面格言最后一部分 (第三条) 尤其恰当，因为宇宙学今天已是如此宽广的学科。许多重要的文章、发现，甚至一些宇宙学分支必须留在篱笆之外。我想我已经在一个自然的地方建立了这个篱笆，含于其中的是平滑膨胀的宇宙，及其源于暴胀、之后随 Boltzmann-Einstein 方程进行演化的线性扰动。此篱笆不仅囊括了大爆炸的经典支柱—CMB、宇宙的膨胀和轻元素的产生—还涵盖了其现代支柱：CMB 各向异性功率谱的波峰和波谷、大尺度上的物质在恰当等级处的成团、暗物质的产生及演化、暗能量、暴胀、星系团丰度和速度巡天。它也为诸如弱引力透镜和极化 (偏振) 这些未来重要的发展预留了空间。

篱笆之外是一些永远留在当地的主题，如稳恒态宇宙论以及类似的替代理论。其他值得关注的主题—如宇宙弦和其他拓扑破缺理论—只是最近才被排除在外。事实上，当考虑到如此激动人心的研究仍在进行来理解破缺带来的宇宙学意义时，我们很难做出完全忽略它们的决定。尽管其他一些主题对于理解宇宙仍然是重要的，并且也是处于活跃的研究课题，但是它们不是过于复杂，就是太不确定，其中最重要的是非线性研究。已经不可能客观地评价近十年来非线性演化研究的进展。然而，本书中描述的线性理论是理解非线性增长及其观测含义的必要前提。在 9.5 节中给出了从我们对线性扰动的理解知晓非线性讨论的方法暗示，在那里讨论了利用线性理论预言星系团丰度（高度非线性的家伙）而进行的尝试。

这本书为谁而著呢？处于某个宇宙学领域但也希望向另一个领域学习的研究者会受益匪浅。例如，对于暴胀模型的构建者而言，希望理解他们的模型在 CMB 和大尺度结构方面的影响时可以通过本书获得相关基础依据。对于想弄清楚他们的测量结果的理论含义的实验工作者，可以通过本书了解那些理论曲线的出处。对于统计知识缺乏的读者可以利用第 11 章获得最前沿的统计技术，甚至对于此前只专注于某一领域（如大尺度结构）的理论工作者也能够学习关于 CMB、弱引力透镜和极化 (偏振) 等最新的理论观念。我也已经试图强调所有这些相关现象（平滑背景附近的微小扰动）的共同起源。一般而言，对于试图理解宇宙学最新进展的其他领域的物理学家也可从中了解这些进展及其所依赖的物理原理。

虽然我的主要目的是本书应该适合物理系和天文系的低年级研究生和想尽早开始宇宙学研究的高年级研究生之用，但其仅需必备的数学也只是普通微积分和微分方程。如前所述，相当多的物理对宇宙学产生影响，然而你 (读者) 在学习宇宙线之前无需修完所有这些领域的课程。广义相对论是必备的工具，修一门广义相

对论的课将大有裨益，但是当我们需要时我会介绍其一些相关专题内容。例如，我们不会对 Einstein 方程详加推导，但我们需要使用它时，习惯指标运算是很容易做到的。同样，尽管第 6 章的暴胀理论基于场论，但你当然无需修一门场论课程之后再去理解暴胀理论所需的最小量概念。当然，如果你 (读者) 熟悉谐振子的量子力学原理，则很容易理解它。

为便于使用本书，我在一些章节的最后进行了总结。你 (读者) 可能对 Boltzmann 方程如何推导不感兴趣，但仍然需要知道在第 7~11 章中得到的主要宇宙学结论。在那种情况下，你 (读者) 可以跳过第 4 章的大部分内容而只浏览其总结部分。

这本书的写作过程充满了十足的乐趣，因为它驱使我认真阅读以前被我忽略的文章。因此大力感谢那些推进宇宙学迈进 21 世纪而辛苦付出的科学家。在每章最后的 “精选读物” 部分，我指出了一些其他有用的相关书籍，和一些在理解相应章节内容中影响我颇深的文章。这些参考文献以及贯穿在书中的其他文献是远远不够完整的：它们仅仅为我们打开了一扇领略过去十年来急剧增长起来的浩瀚宇宙学文献之门。

诚挚感谢那些认真查阅本书初稿并提出有用意见的学者，特别是 Mauricio Calvao, Duglas Scott 和 Uros Seljak 。Kev Abazajian, Joremy Bernstein, Pawel Dyk, Marc Kamionkowski, Manoj Kaplinghat, Eugene Lim, Zhaoming Ma, Angela Olinto, Euaro Rozo, Ryan Scranton, Tristan Smith 和 Iro Tasitsiomi 也提出了有用的建议。Jeremy Berstein, Sanghamitra Deb, James Dimech, Jim Fry, Donghui Jeong, Bob Klauber, Chungpei Ma, Olga Mena, Aravind Natarajan, Mark Alan Peot, Eduardo Rozo, Suharyo Sumowidagdo 和张同杰 (本书译者) 在早期的书稿中发现了若干错误并善意地告之于我。也感谢 Andy Albrecht 把我介绍给 Susan Rabiner，以及 Susan 自始至终对我的大力支持。感谢 Nora Donaghy, Julio Esperas, Jeremy Hayhurst 和 Lakshmi Sadasiv 我的这些在学术出版界交往的朋友们。我也得到了许多基金的支持，包括 NASA Grant NAG5-10842, DOE 和 NSF Grant OHY-0079251。最后，最真挚地感谢 Marcia, Matthew, Ilana, David 和 Coby 对我的支持和爱。

目　　录

第 1 章　标准 (宇宙学) 模型及其他

20 世纪爱因斯坦 (Einstein) 广义相对论的发现, 使我们在历史上第一次找到了一个引人入胜的、可检验的宇宙理论. 我们意识到宇宙在膨胀, 并且曾经处于非常热、非常致密的状态, 这让我们得以用现代的方法思考那些难以理解的古老而又深刻的问题:“我们为何在这里?”“我们如何到达这里?”. 现在这些问题的更新升级版本是:“元素是如何形成的?”“宇宙为何如此平滑?”“星系是如何在这种平滑宇宙中起源形成的?”. 值得注意的是, 这些问题以及许多类似的问题都有了定量的答案, 而这些答案只需把我们的基础物理学的知识和对早期宇宙状态条件的理解结合起来即可得到. 更加引人注目的是, 这些答案可以通过天文观测进行验证.

本章不借助广义相对论的方程来描述一个膨胀宇宙的构想. 大爆炸宇宙学的成功依靠于三大观测支柱: ① 展示宇宙膨胀的哈勃图; ② 与大爆炸核合成理论相符合的轻元素丰度; ③ 宇宙最初几十万年留下的黑体辐射–宇宙微波背景辐射. (译者注: 也有天体物理学家和宇宙学家认为大爆炸宇宙学基于四个支柱. 除上面所述三个外, 第四个是: 宇宙大尺度结构的观测.) 在介绍完这些观测证据之后, 我们将走出被这三个观测支柱包围支持的标准 (宇宙学) 模型. 20 世纪的最后二十年间, 宇宙学的理论和观测的发展指向下面几个方向:

暗物质、甚至暗能量的存在;

需要理解零阶、平滑宇宙附近的扰动的演化;

产生这些扰动的暴胀.

图 1.15 以时间为线索总结了宇宙早期的景象.

1.1　膨胀的宇宙

我们有充分的证据表明宇宙正在膨胀. 这意味着在宇宙历史的早期, 我们与遥远星系之间的距离比现在更近. 引入尺度因子 a 可以很方便地描述这种效应, a 现在的取值设为 1. 在更早的时期, a 比现在的取值更小. 可以将空间描述成图 1.1 中所示的一个网格, 这个网格随时间均匀膨胀. 网格上的点的坐标保持不变, 这样仅测量坐标值之差的两点之间的*共动距离*也保持常数. 然而物理距离正比于尺度因子, 它会随时间演化.

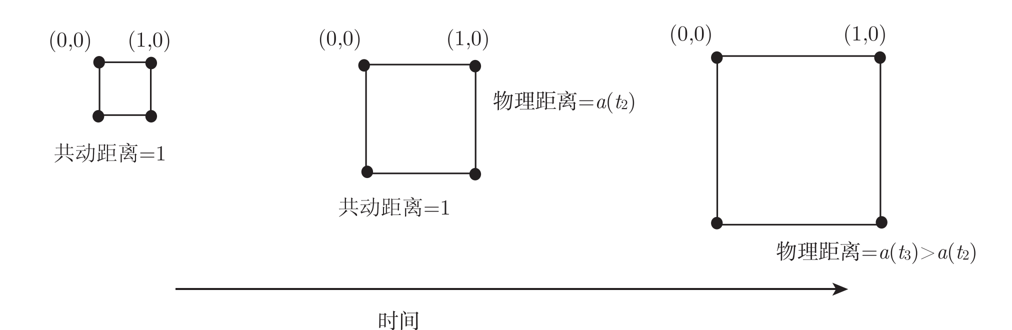


图 1.1　宇宙的膨胀. 在图中假想网格上的点之间的共动距离随宇宙的膨胀保持不变. 物理距离正比于共动距离与尺度因子的乘积, 因而随时间的演化变大

除了尺度因子及其演化规律外, 平滑宇宙还需要由另一个描述其几何形态的参量来表征. 宇宙存在三种可能的几何形态：平坦的、开放的和封闭的. 理解这三种不同的几何可能性的最好方法是考虑两个初始时刻相互平行运动的自由粒子. *平坦*的宇宙遵循欧几里得几何：两个自由粒子永远保持平行. 广义相对论将几何与能量联系到一起. 因此, 平坦宇宙的能量密度等于一个临界值, 之后我们会看到它近似为 10^{-29}g cm^{-3}. 如果密度高于这个临界值, 宇宙是*封闭*的：初始时刻平行运动的粒子将逐渐发生汇聚, 就像所有的经线都聚于地球的南北极一样. 封闭的宇宙与球面的类比更加形象：两者都具有*正曲率*, 只是前者和后者分别存在于三维和二维空间中. 最后一种情形, 密度低于临界值的低密度宇宙是*开放*的, 最初平行运动的粒子轨迹将会发散, 就像两个弹球从马鞍上滚下.

为了理解宇宙的历史, 我们必须确定尺度因子 a 随宇宙时间 t 的演化. 同样地, 广义相对论提供了这个演化与宇宙中的能量 (密度) 之间的联系. 图 1.2 显示了尺度因子如何随宇宙的年龄而增加. 注意 a 对 t 的依赖关系随宇宙的演化而改变. 在早期, $a \propto t^{1/2}$, 而后来这种依赖关系转换为 $a \propto t^{2/3}$. 尺度因子如何随时间变化由宇宙中的能量密度决定. 在早期, 一种形式的能量—辐射—起主导作用, 而后来非相对论性的物质占据了宇宙中大部分比例的能量密度. 实际上, 探索宇宙中能量成分的方法之一就是测量尺度因子的变化. 我们将会看到, 作为这种探索的结果的一部分, 我们现在确信在最近的时期内 a 停止随 $t^{2/3}$ 形式增长, 这标志着一种新形式的能量已主导宇宙.

为了量化尺度因子的变化及其与能量的关系, 首先定义哈勃膨胀率 (译者注: 或者称为哈勃参量) 是很有用的

$$H(t) \equiv \frac{\mathrm{d}a/\mathrm{d}t}{a} \tag{1.1}$$

它度量尺度因子的变化有多快. 例如, 如果宇宙是平坦的, 并且是物质主导的, 那么 $a \propto t^{2/3}$, $H = (2/3)t^{-1}$. 这样, 一个对该宇宙学有效的检验方法是分别测量今天的哈勃膨胀率 H_0(译者注: 或称哈勃常数) 和宇宙的年龄. 本书中下角标 0 表示一个量在现在时刻的取值. 在平坦且由物质主导的宇宙中, 乘积 $H_0 t_0$ 应等于 2/3.

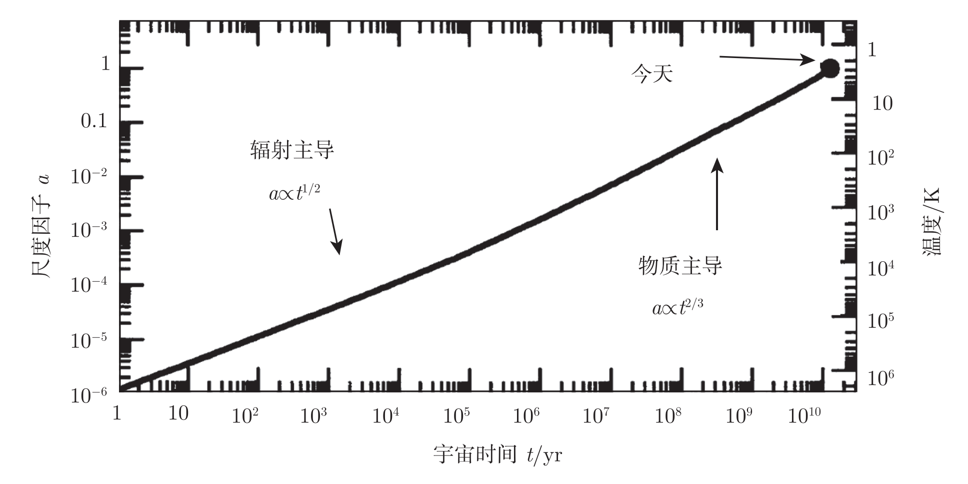


图 1.2 宇宙尺度因子随宇宙时间的演化. 当宇宙很年轻时, 辐射是宇宙的主导成分, 尺度因子随 $t^{1/2}$ 增长. 后来, 物质开始主导宇宙, 这个依赖关系转换为 $t^{2/3}$. 右侧的坐标轴显示了对应的温度, 现在等于 3K

更一般地, 尺度因子的演化由 Friedmann 方程确定

$$H^2(t) = \frac{8\pi G}{3}\left[\rho(t) + \frac{\rho_{\rm cr} - \rho_0}{a^2(t)}\right] \tag{1.2}$$

其中 $\rho(t)$ 是宇宙中的能量密度, 是时间的函数, 其现在值为 ρ_0. 而临界密度

$$\rho_{\rm cr} \equiv \frac{3H_0^2}{8\pi G} \tag{1.3}$$

其中 G 是牛顿引力常数.

为了应用爱因斯坦场方程, 我们必须知道能量密度如何随时间演化. 这是一个复杂的问题, 因为方程 (1.2) 中的 ρ 是许多不同成分的能量密度之和, 每种成分随时间的变化规律也不同. 首先考虑非相对论性物质. 一个非相对论性粒子的能量等于其静止质量能, 在时间演化中保持常数. 所以许多这种粒子的能量密度应该等于粒子的静止质量能乘以其数密度. 当尺度因子很小时, 其能量密度必然很高. 由于数密度与体积成反比, 所以它应该正比于 a^{-3}. 因此, 物质的能量密度随 a^{-3} 变化.

光子构成了今天的宇宙微波背景辐射 (the cosmic microwave background, CMB), 其温度得到了很好的测量：$T_0 = (2.725 \pm 0.002)\,\mathrm{K}$ (Mather et al., 1999). 今天能量为 $k_\mathrm{B}T_0$ 的光子的波长是 $hc/k_\mathrm{B}T_0$. 较早时期, 尺度因子小于今天的值, 所以光子的波长也应该相应地变小. 由于光子的能量反比于它的波长, 所以光子的能量应比其现在的值多一个因子 $1/a$ 而变大. 这些论点在大量热光子中的应用意味着由光子组成的等离子体的温度随时间的变化为

$$T(t) = T_0/a(t). \tag{1.4}$$

那么, 正如图 1.2 所表明的：宇宙早期的温度高于现在的值. 辐射的能量密度等于数密度与单个粒子的平均能量的乘积, 所以它的变化形式为 a^{-4}.

来自遥远的超新星的观测 (见第 2 章; Riess et al., 1998; Perlmutter et al., 1999) 的证据暗示着宇宙中除了通常的物质或辐射之外还可能存在一种能量——*暗能量*. 这种新形式的能量很可能不随时间变化, 即作为*宇宙学常数*, 这种可能性首先由爱因斯坦提出 (后来又被他舍弃). 宇宙学家还探讨了其他可能形式的暗能量, 其中许多形式与宇宙学常数的表现非常不同. 在之后的章节我们将会看到更多这些形式的暗能量.

方程 (1.2) 允许宇宙有非平坦的可能性：如果宇宙是平坦的, 那么今天所有能量密度之和应该等于临界密度, 并且方程 (1.2) 最后一项应为零; 如果宇宙不是平坦的, 则*曲率*能量变化规律为 a^{-2}. 在这本书大部分章节中, 我们将在平坦宇宙背景下介绍宇宙学. 在这样的宇宙中, 扰动的演化要比在开放和封闭宇宙中更加容易计算. 此外, 存在许多令人信服的事实论据, 既有理论也有最近的观测, 这些强烈支持宇宙的平坦性. 其更多内容见第 2 和 8 章.

图 1.3 展示了方程 (1.2) 中不同的项 (即组成部分) 如何随尺度因子变化. 现在, 物质和可能的宇宙学常数主导宇宙的全景; 然而, 在宇宙较早时期, 由于其 a^{-4} 的变化律, 辐射是宇宙的主导成分.

我们引入一些常数. 哈勃膨胀率测量宇宙膨胀多快, 它是由测量遥远星系的退行速度和与我们之间的距离之比来确定的 (1.2 节), 所以其单位是单位距离范围内的速度大小. 哈勃膨胀率现在时刻的测量值, 即哈勃常数, 由 h 参数化定义为

$$\begin{aligned} H_0 &= 100h \text{ km sec}^{-1}\text{Mpc}^{-1} \\ &= \frac{h}{0.98 \times 10^{10} \text{ years}} = 2.133 \times 10^{-33} h \text{ eV}/\hbar \end{aligned} \tag{1.5}$$

其中 h 与普朗克常数 $\hbar$ 无关. 一兆秒差距 (Mpc) 的天文距离大小等于 3.0856×10^{24} cm. 目前的测量将 h 确定为 $h = 0.72 \pm 0.08$(Freedman et al., 2001).

对于平坦的、物质主导的宇宙年龄的理论预言是 $(2/3)H^{-1}$, 即 8~10 Gyr (1 Gyr=10 亿年). 目前对宇宙年龄的最佳估计值是 12.6 Gyr, 其置信水平为 95%、

下限是 10.4 Gyr(Krauss and Chaboyer, 2001). 这意味着平坦的、物质主导的宇宙模型几乎是不可行的. 练习 2 将会需要你 (读者) 来证明带有一个宇宙学常数的宇宙的年龄会更大一些 (对于 h 取固定值); 实际上支持这种额外能量的最初理由之一就是这样得到的宇宙年龄更大.

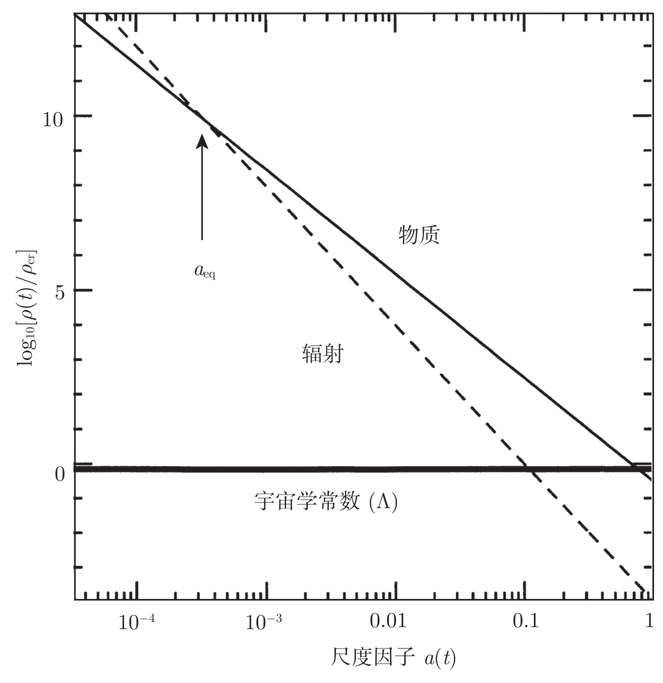


图 1.3 平坦宇宙中不同组成部分的能量密度随尺度因子的变化. 图中显示了非相对论性物质、辐射和宇宙学常数三种成分, 它们都以现在时刻的临界密度为单位. 尽管物质和宇宙学常数现在主导宇宙, 但在早期, 辐射密度是最大的. 物质和辐射密度相等的时刻用 $a_{\rm eq}$ 表示

方程 (1.3) 中的牛顿引力常数等于 $6.67\times10^{-8}\mathrm{cm}^3\mathrm{g}^{-1}\mathrm{sec}^{-2}$. 再加之 (1.5) 式的结果, 可以得出临界密度的数值:

$$\rho_{\rm cr} = 1.88h^2 \times 10^{-29}\mathrm{g\ cm}^{-3} \tag{1.6}$$

在宇宙过去高密度状态的一个重要结果是粒子之间的相互作用率在越早时期越高, 它随密度而变化. 图 1.4 显示了一些很重要的相互作用率随尺度因子的变化. 例如, 当宇宙的温度大于几个 $\mathrm{MeV}/k_{\rm B}$ 时, 电子和中微子的散射率大于宇宙膨胀率. 这样, 在宇宙的大小膨胀到其原来的二倍之前, 中微子与背景电子发生多次散射. 所有这些散射, 使中微子与宇宙等离子体的其他成分一起达到平衡态. 这只是一个简单的例子, 但呈现出了非常普遍的、深远的事实：如果粒子的散射率大于此时的宇宙膨胀率, 那么这种粒子就处于平衡态. 在宇宙早期, 粒子之间典型的相互

作用率非常大, 因此早期宇宙的环境相对简单：宇宙不仅分布均匀, 而且其许多组成成分处于平衡态. 第 2 章会探讨平衡条件的一些例证, 而第 3 章中涉及了一些由于相互作用率低于宇宙膨胀率而导致的平衡态不再能够维持的情况.

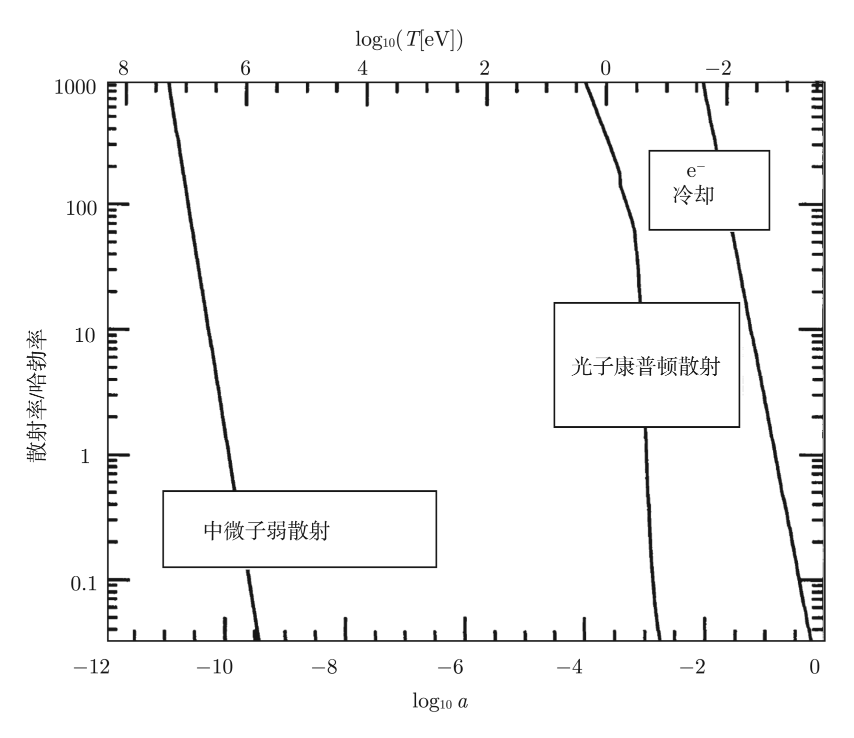


图 1.4　粒子相互作用率随尺度因子的变化. 当给定的相互作用率低于宇宙膨胀率 H 时, 其相互作用脱离平衡态. 图上方标度 (乘以 k_{B}) 给出了宇宙的温度, 表示单个粒子的典型动能

1.2　哈　勃　图

如果宇宙像图 1.1 所描述的方式膨胀, 宇宙中的星系应相互远离. 因此我们应该观测到星系相对我们的退行. 回顾 [译者注：多普勒 (Doppler) 效应]：从退行的物体所发射的光或声的波长会被拉长, 以致接收到的波长大于其发射时的波长. 我们可以方便地定义这种拉长因子为红移 z：

$$1+z \equiv \frac{\lambda_{\mathrm{obs}}}{\lambda_{\mathrm{emit}}} = \frac{1}{a}. \tag{1.7}$$

红移较小时, 标准的多普勒公式适用, 即 $z \simeq v/c$. 所以, 对光谱中的吸收和/或者发射线的红移的测量就是对产生光谱的宿主结构相对我们的退行速度的直接测量.

哈勃 [Hubble (1929)] 首先发现了遥远的星系实际上在相对我们退行运动. 他也注意到星系离我们越远退行速度越快. 这正是我们在膨胀的宇宙中所预期的现象. 两星系之间的物理距离是 $d = ax$, 其中 x 是其共动距离. 当没有任何共动运动时 ($\dot{x} = 0$, 即无本动速度), 相对运动速度 $v = \dot{d}$ 等于 $\dot{a}x = Hd$. 所以, 速度应随距离线性增加 (至少在低红移范围) 且斜率由哈勃常数 H 给定. 从图 1.5 中可以容易地得出哈勃常数, $H = 1000/2\text{km sec}^{-1}\text{Mpc}^{-1}$, 几乎比现在的估计值高 10 倍. 也要注意, 哈勃的数据的红移范围达到 $z = 1000\text{km sec}^{-1}/c \simeq 0.003$.

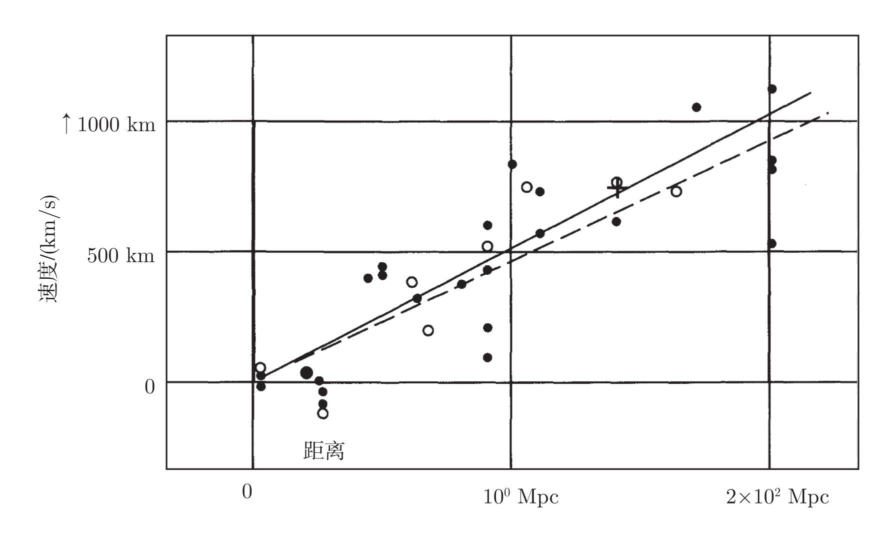


图 1.5 原初的哈勃图 (Hubble, 1929). 图中画出了遥远星系的退行速度 (单位应为 km sec^{-1}) 对距离 (单位应为 Mpc) 的观测数据点. 图中实线 (破折线) 是对实心 (空心) 点的最佳拟合. 实心点是经过了太阳运动改正的结果, 破折线则没有进行改正

哈勃图依然是我们拥有的关于宇宙膨胀的最直接证据. 目前的研究手段也应用与原先相同的原理：探寻遥远天体的距离和红移. 对红移的测量很简单, 难度在于对未知固有亮度天体的距离的测量. 最常用的方法是寻找一类有相同固有亮度的天体：*标准烛光*. 两个这类天体的视亮度的差别来自于它们与我们之间的距离差异. 这种方法的本质是寻找一类天体的可观测量与其固有亮度之间的相关性. 例如, 造父变星 (Cepheid variables) 就是一类固有亮度与其光变周期紧密联系的恒星 (译者注：此关系称为造父变星的周光关系). 哈勃空间望远镜 (Hubble Space Telescope) 测量了距离远至 20Mpc 的星系中上千个造父变星的光变周期. 结合这些确定的星系的距离, 我们用到了五种不同的距离测量方法, 使距离的测量范围扩展到 400Mpc. 图 1.6 表明所有这五种距离指示体互相符合得很好, 观测点都收敛在 $H_0 = 72\ \text{km sec}^{-1}\text{Mpc}^{-1}$，误差为 10% 的范围内.

如图 1.6 所示, Ia 型超新星是距离观测得最远的标准烛光. 它们如此明亮, 因此可以将哈勃图延伸到很高的红移 (目前的记录是 $z \simeq 1.7$), 此时简单的多普勒定律已不再适用. 图 1.7 显示了最近用这些非常遥远的天体得出的哈勃图. 在第 2 章, 将推导出距离 (这种情况是*光度*距离) 作为红移的函数的正确表达式. 现在仅指出, 这个表达式依赖于宇宙的能量成分. 图 1.7 中三条曲线描绘出了三种可能: 平坦且物质主导的; 开放的; 平坦且带有宇宙学常数的宇宙模型. 高红移的数据目前已足够好地来区分这些可能性, 结果强烈地不支持以前支持的平坦且物质主导的模型. 当今观测数据的最佳拟合支持的宇宙是 70% 的能量以宇宙学常数形式存在, 或者其他形式的暗能量. 更多关于这方面的内容见第 2 章.

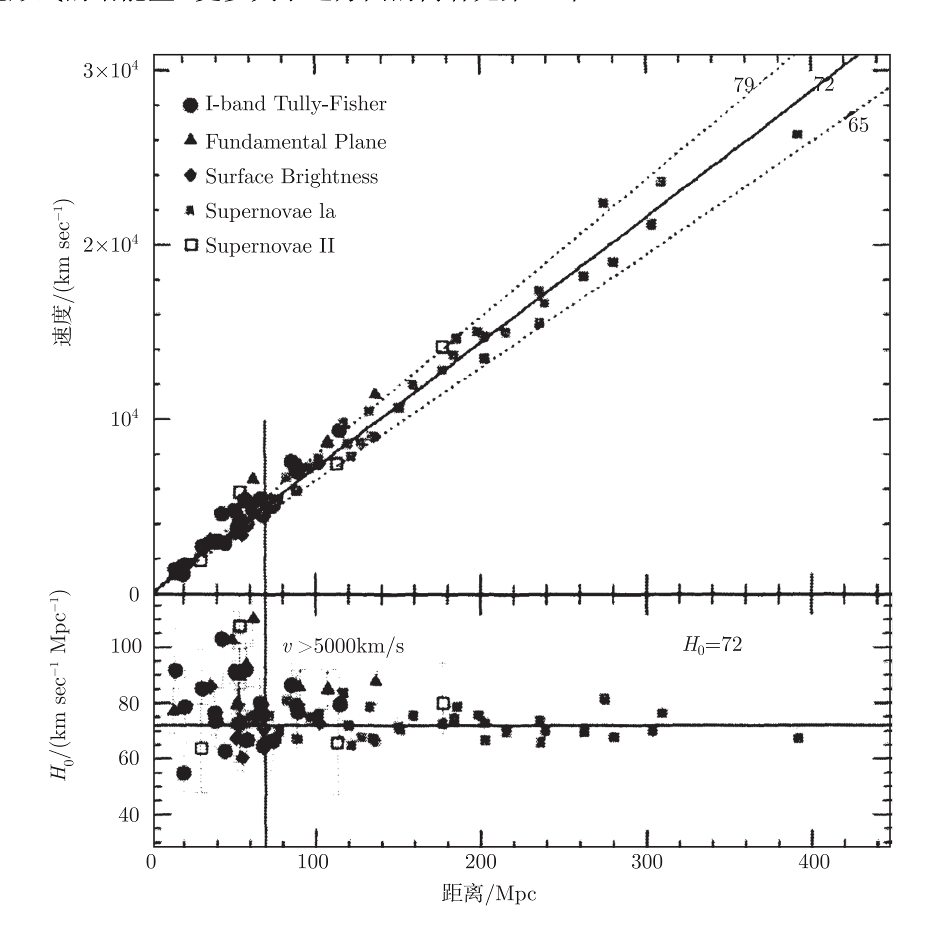


图 1.6　哈勃空间望远镜重点项目 (Hubble Space Telescope Key Project)(Freedman et al., 2001) 利用五种不同的距离测量方法得到的哈勃图. 图的下半部分给出了 H_0 随距离的变化, 图中水平线等于 H_0 的最佳拟合值 72km $\text{sec}^{-1}\text{Mpc}^{-1}$

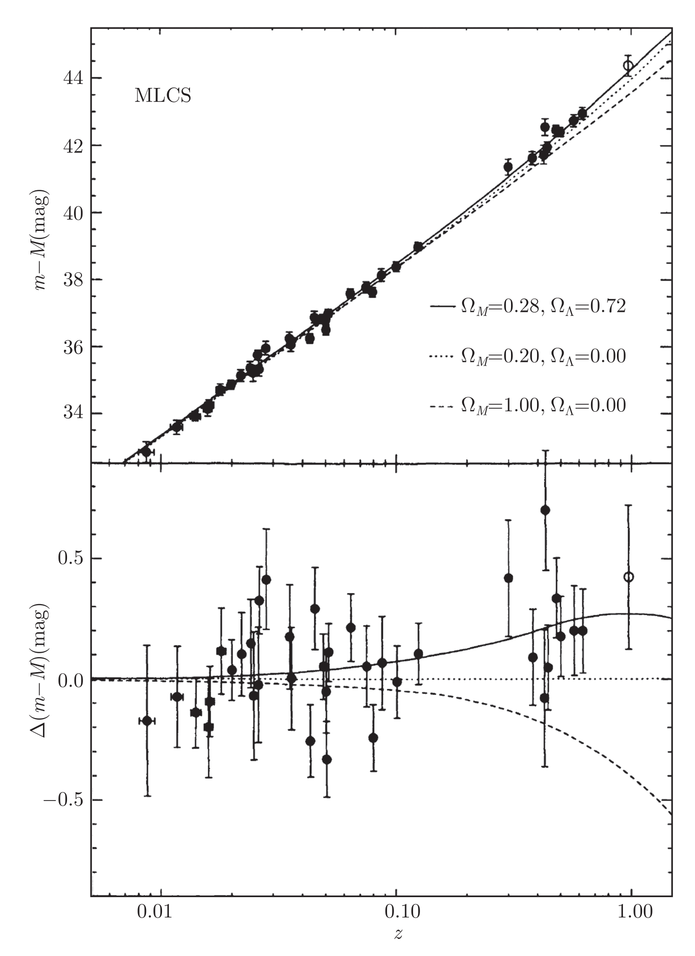


图 1.7 由 Ia 型超新星得出的哈勃图. 上图画出了视星等 (一种距离指示器) 随红移的变化. 曲线表示宇宙中不同能量成分的理论预言值, 其中 Ω_M 是今天物质能量密度与临界密度的比值, Ω_Λ 是宇宙学常数形式的能量密度与临界密度的比值. 下图画出了观测数据以及理论值的残差, 清楚地表明高红移超新星观测支持一个 Λ 主导的宇宙, 而非物质主导的宇宙

1.3 大爆炸核合成

当宇宙非常热、非常致密, 温度为 $\mathrm{MeV}/k_\mathrm{B}$ 量级时, 不存在中性原子甚至束缚的原子核 (译者注：这里不包括只包含一个质子的氢原子核). 在如此高温的环境中，大量的辐射使得原子或原子核一旦形成, 就立刻被高能光子摧毁. 当宇宙的温度完全下降到经典原子核的结合能时, 轻元素便开始形成. 已知早期宇宙的环境条件和相关的核反应截面, 可以计算出所有元素预期的原初丰度 (见第 3 章).

图 1.8 展示了大爆炸核合成理论 (BBN) 对轻元素丰度的理论预言①. 图 1.8 中的矩形框和箭头表示目前估计的轻元素丰度. 它们与理论预言一致, 这种一致性检验也为大爆炸理论提供了另一个强烈的证据. 对轻元素的测量进一步给我们提供了更多关于早期宇宙的信息. 在第 3 章中将详细探讨的轻元素丰度的理论预言依赖于核合成时期的质子和中子密度. 由于质子和中子的重子数都为 1, 并且是当时仅有的重子粒子, 故它们的密度合称为*重子*密度. 这样, 大爆炸核合成给我们提供了一种测量宇宙中重子物质密度的方法. 知道这些重子物质密度如何随宇宙演化 (它们以 a^{-3} 规律衰减), 可以将轻元素丰度的测量转换为对当今重子物质密度的测量.

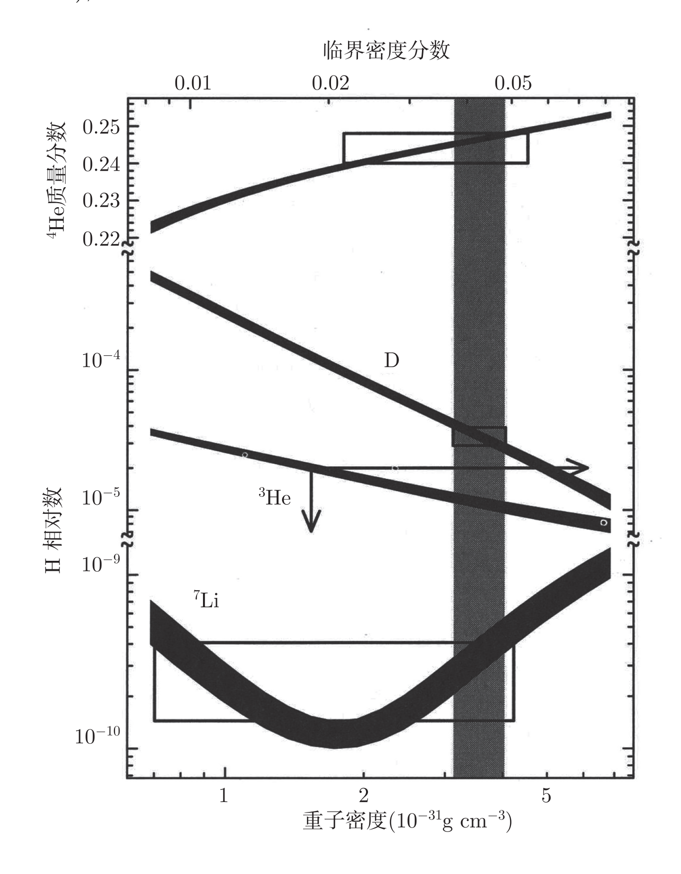


图 1.8　大爆炸核合成对重子物质密度的限制 (Burles, Nollett and Turner, 1999). 图中展示了四种轻元素丰度的理论预言：^{4}He、氘 (重氢)(D)、^{3}He 和锂——其丰度跨度达 10 个量级. 竖直的实心带区域由重氢原初丰度的测量确定. 方框表示观测限制, 其中对 ^{3}He 原初丰度的限制只存在上限

① 回忆原子核的标记：^{4}He 中的 “4” 指核子 (质子和中子) 的总数. 这样 ^{4}He 有两个质子和两个中子, 而 ^{3}He 有两个质子和一个中子. 详见第 55 页的框图.

特别地, 氘原初丰度的测量极其精确地把重子物质密度约束到仅为临界密度的百分之几. 普通物质 (重子物质) 最多只占临界密度的 5%. 因为今天总的物质密度实际上一定大于这个数值 (直接的估计给出为 20%~30% 的量级), 所以核合成为非重子暗物质的存在提供了极其可信的证据.

对氘 (重氢) 的测量 (Buries and Tytler, 1998) 是一个新的发展领域. 这些测量之所以如此令人兴奋, 原因在于它能够探讨红移在 3-4 处的氘 (重氢) 丰度, 此时完全在大量改变元素初始丰度的物理过程发生之前. 图 1.9 展示了这样一项探测. 基本思想是来自遥远类星体 (QSOs) 的光线被在其穿行期间的中性氢系统吸收 (译者注：在光谱中产生吸收线). 主要的吸收特征来自氢基态 ($n = 1$) 到第一激

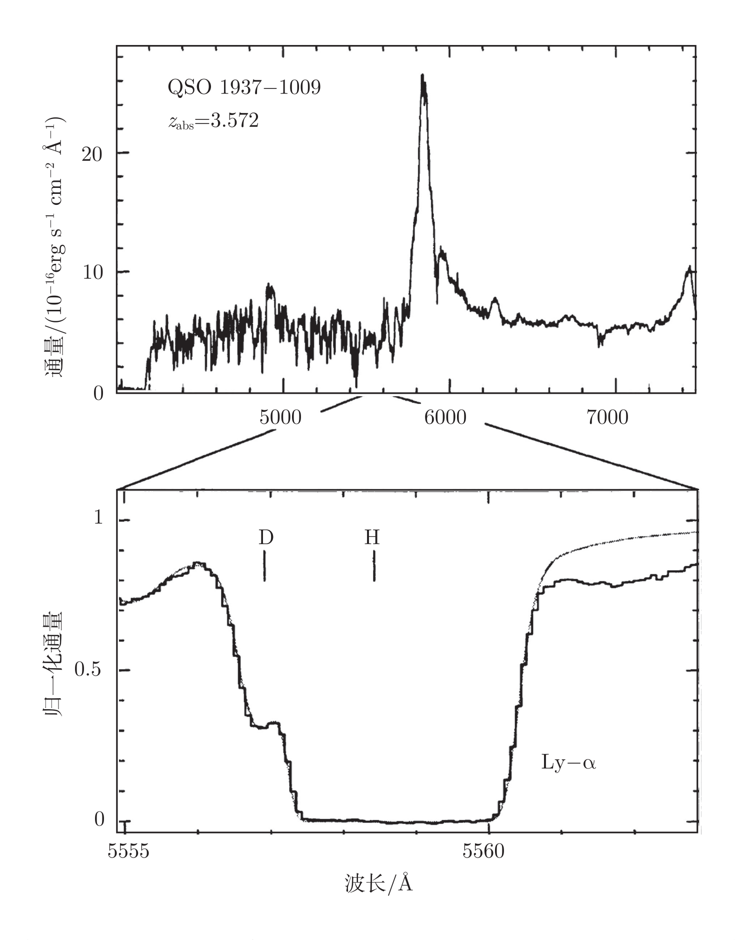


图 1.9　遥远类星体 (QSOs) 的光谱 (Burles, Nollett and Turner, 1999). 对应于氢从 $n = 1$ 到 $n = 2$ 态跃迁的静止波长为 1216Å 的光谱吸收线, 被红移至 1216(1 + 3.572)Å. 下图提供了在此波长范围内光谱的细节, 清晰地证实了氘 (重氢) 的存在

发态 ($n=2$) 的跃迁, 这有赖于波长 $\lambda = 1215.7\text{Å}$ 的光子. 由于氢处于这种方式的激发状态中光子被吸收, 在光谱的 $\lambda = 1215.7\text{Å}$ 处会出现一个波谷即吸收线, 并且被红移了 $1+z$ 倍. 氘 (重氢) 的相应谱线应为：① 被红移了 $0.33(1+z)\text{Å}$(见练习 3) 以及② 较弱的衰减, 因为存在较少量的氘 (重氢). 图 1.9 展示的正是这样的一个系统; 目前有 6 个如图 1.8 所示精度附近的精确探测. 注意氘 (重氢) 丰度随重子物质密度的下降而急剧减少，因此即使有相对较大的 D 测量误差，重子物质密度的误差也相对较小.

1.4 宇宙微波背景辐射

宇宙微波背景辐射 (CMB) 使我们看到了宇宙年龄只有 30 万年时的景象. CMB 中的光子在红移等于 1100 时最后散射电子; 之后它们在空间自由穿行. 我们今天观测到的它们的图像确实是来自宇宙的最早时刻, 因此它们成为早期宇宙最强有力的探针. 我们将在本书中花费相当多的篇幅阐述在光子最后散射时刻之前发生的细节, 也将发展自散射时刻之来发生的光子自由流动过程的数学. 关于这段演化历史的关键事实是, 在最后散射之前, 光子与电子的碰撞确保了光子处于平衡态, 因此它们应该具有黑体辐射谱.

光子气体黑体谱的比强度是

$$I_\nu = \frac{4\pi\hbar\nu^3/c^2}{\exp(2\pi\hbar\nu/k_\mathrm{B}T)-1} \tag{1.8}$$

图 1.10 中展示了大爆炸宇宙学的预言 (见练习 4) 与 COBE 卫星上的 FIRAS(远红外分光光度计) 探测器的观测显著的一致性. 20 世纪 60 年代中期, 威尔逊 (Wilson) 和彭齐亚斯 (Penzias) 对 3K 的宇宙微波背景辐射的探测提供了充足的证据, 支持大爆炸宇宙学在与稳恒态宇宙学的辩论中取胜①. 然而威尔逊和彭齐亚斯只是在一个波段上对背景辐射进行了观测. 如果他们的单波段的观测结果也足以起到决定性的作用, 那么图 1.10 描绘的当前数据应将那些大爆炸宇宙论的怀疑者从物理学期刊版面中送回到开放的网络聊天群中的深远可及之处.

我们从最初 25 年的 CMB 巡天中知晓的最重要的事实是：早期的宇宙非常均匀, 没有在 CMB 中探测到各向异性. 这个时期毋容置疑地使寻找背景辐射各向异性的观测者们沮丧, 同时也巩固了平滑大爆炸理论的观点. 现在, 我们在继续前进. 我们已经发现了 CMB 中的各向异性, 这表明早期的宇宙并非完全平滑, 在宇宙等离子体中存在微小的扰动. 为了理解这些各向异性和微小扰动, 我们必须超越出标准宇宙学模型.

① 有关 CMB 发现史的吸引人的一手报道, 参见文献 (Partridge, 1995) 的第 1 章.

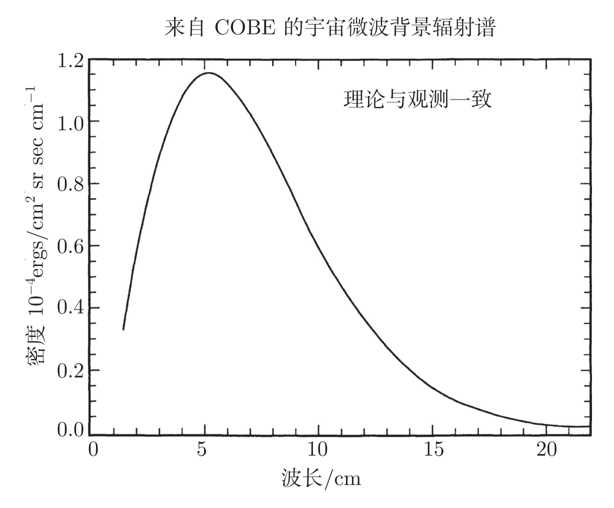


图 1.10　COBE 卫星上的远红外分光光度计 (FIRAS) 测量到的宇宙微波背景辐射的强度随波长变化的曲线 (Mather et al., 1994). 图中黑体谱的理论曲线中隐藏着许多观测的数据点, 所有的点误差都小于这条曲线的宽度

1.5　超越标准模型

当大爆炸模型屹立在三大观测坚实支柱之上时, 其他的天文观测急需更多的细节. 在上文的三大观测支柱的一节中, 我曾暗示过: 宇宙中一定存在非重子物质. **暗物质**是天文学家所熟悉的概念, 其最初设想由 Zwicky 在 1933 年首先提出. 图 1.11 阐明了在星系中发现暗物质的方法: 利用可以探测星系引力场的旋转曲线. 实际上, 几乎在所有可观测尺度上, 引力推测出的质量和可见质量之间都不一致.

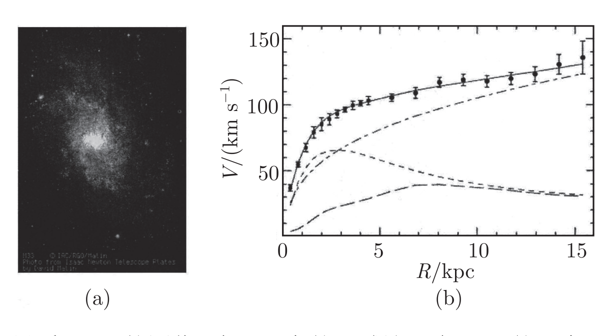


图 1.11　(a) 旋涡星系 M33 的图像. 中心明亮的区域达几个 kpc 的尺度. (b) M33 的旋转曲线 (Corbelli and Salucci, 2000). 带误差棒的数据点来自中性氢的 21cm 谱线观测. 实线是观测数据的模型拟合. 对星系总旋转曲线的不同物质的贡献是: 暗物质晕 (点划线)、恒星盘 (短划线), 以及气体 (长划线). 在星系大半径处, 暗物质起主导作用

由于来自大爆炸核合成的局限性, 暗物质或者至少其中相当可观的一部分一定是非重子的. 这种新形式的物质是什么? 它们在宇宙早期如何形成? 目前最流行的设想是：暗物质由产生于宇宙极早期的基本粒子组成. 在第 3 章中, 将详细地探讨这种可能性, 并讨论暗物质可能是当宇宙温度为几百 GeV/$k_{\rm B}$ 量级时形成的. 我们还将看到, 暗物质由宇宙早期的原始残留物组成的假设将很快被实验检验.

20 世纪的最后 10 年目睹了许多旨在测量宇宙结构的大型星系巡天. 其中斯隆数字巡天 (Sloan Digital Sky Survey) 和 2 度视场星系红移巡天 (Two Degree Field galaxy)(图 1.12) 达到了极致, 它们汇编了上百万个星系的红移及其距离的数据. 图 1.12 中的星系清晰地显示非随机分布：宇宙在大尺度上存在结构. 为了理解这些结构, 我们必须走出标准宇宙模型, 不仅需要考虑暗物质, 还包括对平滑宇宙的偏离. 我们必须发展一些工具方法, 研究标准宇宙模型中的平滑背景附近的扰动. 我们将在第 4 章和第 5 章中看到, 只要扰动保持小量, 这些方法在理论上是简单直接的.

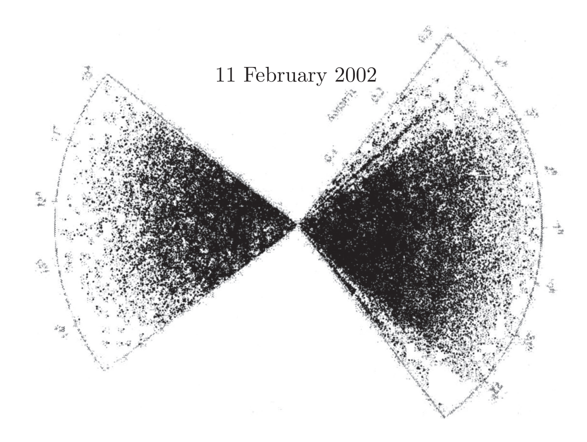


图 1.12　2 度视场星系红移巡天 (2dF) 中的星系分布 (Colless et al., 2001). 巡天结束时, 将获得 25 万个星系的红移数据. 如图所示, 此巡天探测宇宙的结构达到 $z = 0.3$, 对应于离我们 1000 h^{-1}Mpc 远的距离 (我们位于图的中心).

认识宇宙结构演化和将理论与观测比较的最佳方法是测量 CMB 中的各向异性和物质在大尺度上如何分布. 为了把理论与观测对比, 首先要努力避开非线性主导的尺度. 举一个极端的例子, 我们不可能希望通过细查地球上岩石的形成来理解宇宙学. 中间演化步骤—物质坍缩形成星系、分子云的冷却、恒星形成以及行星形成等—太过复杂以至于不可能使线性理论和观测进行比较. 当小尺度 (约小于 10Mpc) 的物质扰动增长至非线性阶段, 大尺度的扰动仍然很小. 所以这些扰动的进程大大少于相应的小尺度的扰动. 类似地, 由于组成 CMB 的光子不成团, 所以 CMB 的各向异性已保持很小.

确认大尺度结构和 CMB 作为两个最大有可为的研究领域, 只解决了一方面的问题. 另一个非常重要的挑战是理解如何刻画这些结构分布的特征, 使得理论能够与试验比较. 简单地看图和定量检验宇宙学模型完全是两回事. 为了实施这种检验, 通常有用的方法是对问题中的结构分布进行傅里叶变换; 我们将会看到, 在傅里叶空间可以很容易地从小尺度分布中分离出大尺度信息. 在 CMB 和大尺度结构中, 最重要的统计量是*两点相关函数*, 在傅里叶空间称为*功率谱*. 设星系的平均密度为 $\bar{n}$, 那么可以将其非均匀性表征为 $\delta(\vec{x}) = (n(\vec{x}) - \bar{n})/\bar{n}$, 或其傅里叶变换 $\tilde{\delta}(\vec{k})$. 功率谱定义为

$$\langle \tilde{\delta}(\vec{k})\tilde{\delta}(\vec{k}')\rangle = (2\pi)^3 P(k)\delta^3(\vec{k} - \vec{k}'). \tag{1.9}$$

这里的尖括号表示在整个分布上的平均, 而 $\delta^3()$ 是约束 $\vec{k} = \vec{k}'$ 的 Dirac Delta 函数. 暂不讨论其细节, 方程 (1.9) 表示功率谱是一个分布的弥散程度, 或称方差. 如果存在许多非常低和高密度区域, 其功率谱便会很大; 反之, 分布平滑的功率谱较小. 图 1.13 展示了星系分布的功率谱. 由于功率谱是 k^{-3} 或 (长度)^3 的量纲, 图 1.13 展示了无量纲组合量 $k^3P(k)/2\pi^2$, 它很好地描述了在尺度 k 上的成团性.

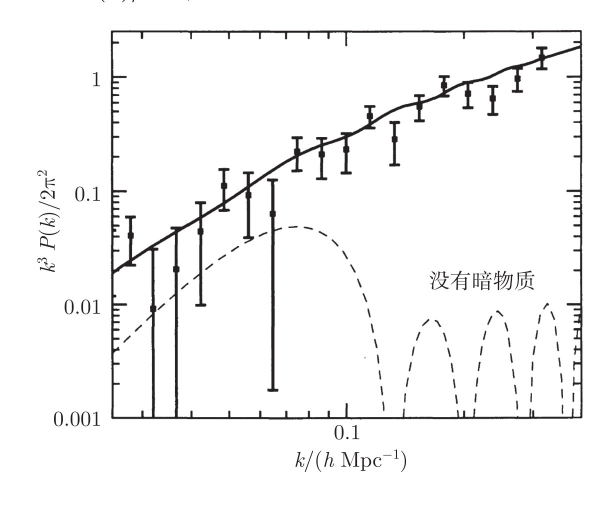


图 1.13 星系分布傅里叶变换的方差 $\Delta^2 \equiv k^3P(k)/2\pi^2$ 随尺度的变化. 在大尺度上, 方差小于 1, 所以分布平滑. 实线是含有暗物质、宇宙学常数和暴胀产生的扰动的宇宙学模型的功率谱的理论预言. 虚线表示只包含重子物质, 没有暗物质的宇宙的功率谱的理论值. 图中的数据来自 PSCz 巡天 (Saunders et al., 2000), 由 Hamilton 和 Tegmark 分析处理 (2001)

对 CMB 各向异性最好的测量也是其温度分布的两点相关函数, 但是用来测量星系分布和 CMB 的功率谱存在细微的技术性差别. 这种差别起因于 CMB 温度是二维场, 在天空中每一个方向进行测量 (即带有两个角坐标). 于是, 我们所用的典型方法是将 CMB 二维的温度场用球谐函数展开, 而不是傅里叶变换, 这些球谐基

函数更适合球面上的二维场. 因此, CMB 的两点相关函数的自变量是多极矩 l, 而不是波数 k. 图 1.14 展示了自 1992 年以来许多组对 CMB 各向异性的测量, 那时 COBE 卫星最先发现了 CMB 的大角度 (图中低的 l) 各向异性.

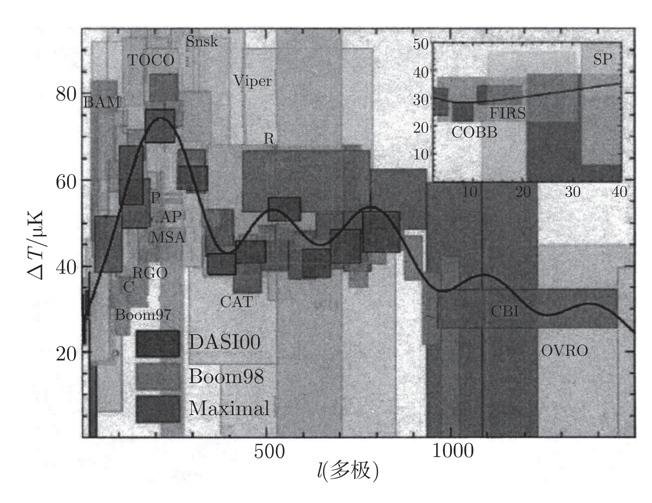


图 1.14　暴胀理论对 CMB 各向异性的预言与观测的比较. x-轴是多极矩 (例如, $l = 1$ 代表偶极子, $l = 2$ 代表四极子), 所以大角度尺度对应于低的 l; y-轴是方均根各向异性 (两点相关函数的平方根), 它是尺度的函数. 暴胀理论预言的典型特征是一系列波峰和波谷, 这种特征已被试验验证

图 1.13 和图 1.14 都包含与观测数据看起来相符得很好的理论预言曲线. 本书大部分章节的主要目标是发展第一性原理来理解这些理论预言. 实际上, 理解宇宙中结构的形成已经成为当今众多宇宙学家的主要目标. 注意, 这种超越标准宇宙学模型的第二个方面也加强了第一个方面, 即对宇宙结构的观测导致了暗物质必然存在的结论. 特别地, 图 1.13 中的虚线是宇宙只含重子物质, 不含暗物质的理论模型预言. 这种模型预言出的不均匀性 (当归一化到 CMB 的观测结果) 远小于观测值. 在第 7 章将会逐渐理解, 为什么一个只含重子物质的宇宙会如此均匀. 不过现在我们清楚: 暗物质不仅是解释星系旋转曲线的需要, 而且也是解释宇宙在大尺度上结构的需要.

当试图理解宇宙中的结构是如何演化之时, 我们将不得不面临这样的问题: 初始条件和结构形成的种子原初扰动是如何产生的. 这个问题引导我们进入了超越标准宇宙学模型的第三个重要方面: 暴胀理论. 第 6 章引入了这个引人入胜的设想: 宇宙在年龄仅为 10^{-35}s 时经历了一次剧烈的指数膨胀. 几年前有关暴胀理论的证据还很少. 作为一个可行的理论, 暴胀模型主要因其美学感染力而存在至今. 过去几年的发现已经改变了这个状况, 这些发现大体上已经验证了暴胀理论的一些

基本预言. 最引人注意的是, 暴胀理论对宇宙的初始条件做出了具体的预言, 今天这些预言已经有了观测结果. 对于我而言, 宇宙学最令人激动的、意义深远的发现是 CMB 各向异性的观测，它符合暴胀理论预言的特征形式.

这些标准宇宙学模型之外的成分—暗物质、结构形成与演化、暴胀—所构成的理论模型, 称为*冷暗物质* (cold dark matter) 模型, 或称 CDM 模型. 这个绰号中的“冷” 字部分来自暗物质粒子在宇宙早期能够有效地成团的需要. 如果暗物质不是冷而是热的, 即它们具有很大的压力, 那么结构将不会在适当的程度上形成.

1.6　小　　结

作为上面我已经概述和未来章节将要详细探讨的膨胀宇宙特征的总结, 下面构建一个时间轴. 我们可以从大爆炸时刻算起来表征宇宙中的任意时刻; 利用在那时的宇宙尺度因子的大小或宇宙等离子体的温度值. 例如在现在的时刻, $a=1$, $t=140$ 亿年, $T=2.725\mathrm{K}=2.35\times10^{-4}\mathrm{eV}/k_{\mathrm{B}}$. 图 1.15 同时用时间和温度作为标识显示了宇宙的时间轴. 时间轴指示的里程碑范围跨度从我们非常确定的 (如核合成 (nucleosynthesis)、CMB), 直至另一些更具推测性的 (如暗物质产生、暴胀、今天的暗能量).

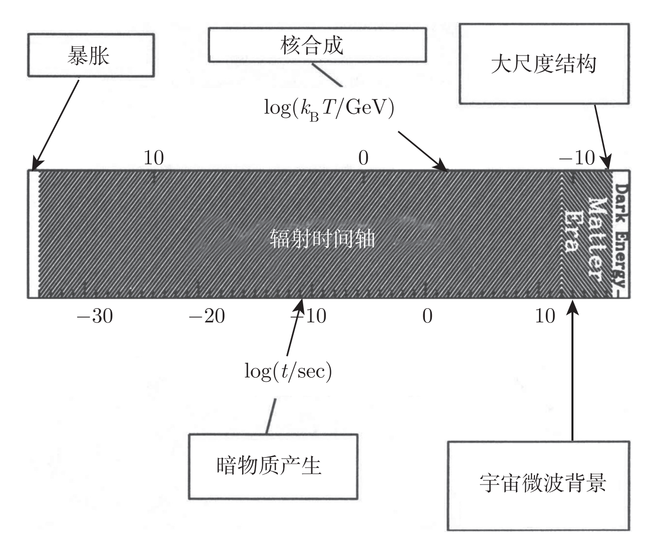


图 1.15　宇宙演化史. 其中任何一个时期都 (关联) 对应于一个温度 (上标注) 或者时间 (下标注)

图 1.15 中的时间轴还显示了宇宙在各个时期的主导组成部分. 在早期, 宇宙中的大部分能量以辐射形式存在. 最终, 由于相对论性粒子的能量随 $1/a$ 形式衰减,

而非相对论性粒子的能量以质量 m 形式保持不变, 物质超过辐射主导宇宙. 在离今天较近的时期, 宇宙看起来已经并非由物质而是一种暗能量主导, 其能量密度随时间变化保持相对的常数. 这种未能解释的能量形式的证据是新出现的, 很不确定且没有定论, 但非常具有启发推测性.

宇宙学的一些经典结论可以在平滑宇宙的背景下理解. 宇宙诞生后几分钟时轻元素形成, CMB 光子则是在宇宙温度为 $k_{\rm B}T \sim 1/4{\rm eV}$ 量级时从物质中退耦. 重元素粒子可以构成宇宙中的暗物质; 若确实如此, 那么它们的丰度在很高的温度量级 $k_{\rm B}T \sim 100{\rm GeV}$ 时就已经确定.

本书将把主要兴趣放在平滑宇宙上的扰动部分. 图中时间轴左侧最早端包含一个简短的暴胀时期, 在这个时期产生了原初扰动. 当宇宙变为物质主导时这些微扰开始成长. 暗物质仅仅由于自引力效应, 其成团性变得越来越高. 当宇宙温度从 1eV 下降到 0.1eV 时, 暗物质的密度起伏 (overdensity)(译者注: 与宇宙平均密度的相对差别) 从 1/1000 增长为 1/10. 最终, 在离今天较近的时期, 物质扰动不再是小量, 它们已经变成我们今天所观测到的非线性结构. 今天观测到的 CMB 的各向异性告诉我们当宇宙的年龄只有几十万年的时候是什么样子, 因此它是扰动的极好探针.

图 1.15 时间轴中的一些要素可能是不确切的. 然而, 这些要素大多数是可以被验证的, 在接下来的十年中获得的观测数据将会告诉我们, 这个时间轴的哪些部分是正确的, 哪些部分则需要抛弃. 这本身看起来就是研究 CMB 和大尺度结构的充足理由.

推 荐 读 物

许多优秀的教科书涵盖了均匀大爆炸理论模型. 我对 *The Early Universe* (早期宇宙) (Kolb and Turner) 最为熟悉, 这本书尤其对核合成和暴胀做了很好的讨论. Peacock 的 *Cosmological Physics* (宇宙物理学) 是一本最新、或许也是覆盖面最广泛的标准宇宙学教程, 此书比 *The Early Universe* (早期宇宙) 或者本书更侧重于河外天文学的内容. 一本至今流行的、仍然能够刻画描述均匀大爆炸宇宙学之精髓的书：*The First Three Minutes* (最初三分钟) (Weinberg)(证实大爆炸模型的成功：该书长达 25 年来未曾改版). 近期, 有三本书值得我们关注：*The Whole Shebang* (Ferris), *The Little Book of the Big Bang* (大爆炸宇宙学袖珍书)(Hogan) 和 *A Short History of the Universe* (宇宙的简史) (Silk).

Freedman (1998) 的一篇文章总结了膨胀宇宙的证据以及对其量化的方法. 大爆炸核合成领域的两个创始人 Schramm 和 Turner 写过一篇很清晰的综述文章 (1998), 此后不久一次悲惨的事故带走了第一作者 Schramm 的生命. 1983 年 Vera Rubin 在 *Scientific American* (科学美国人) 上发表的卓越文章叙述了旋涡星系中暗

物质存在的证据.

本书中并未试图记录大爆炸的发现历史. 我所熟悉的三本书详细地介绍了这段历史: *Blind Watchers of the Sky* (天空盲人观察者) (Kolb), *3K: The Cosmic Microwave Background* (3K 宇宙微波背景) (Partridge), *Three Degrees Above Zero: Bell Labs in the Information Age* (零上三度: 信息时代的贝尔实验室)(Bernstein), Alpher 和 Herman (1988) 的文章也讲述了这段历史.

练　　习

1. 假设 (不正确地), 一直追溯到宇宙的温度为 $10^{19}\mathrm{GeV}/k_{\mathrm{B}}$ 时, H 随温度的平方变化 (即假设一直追溯到普朗克时间宇宙一直处于辐射主导时期), 并且假设今天的暗能量以宇宙学常数 Λ 形式存在, 这样现在 $\rho_\Lambda = 0.7\rho_{\mathrm{cr}}$, 且 ρ_Λ 贯穿整个宇宙历史一直保持常数. 求 $\rho_\Lambda/(3H^2/8\pi G)$ 在那时 (普朗克时期) 的值.

2. 假设今天的宇宙是平坦的, 包含物质和宇宙学常数, 后者的能量密度不随时间变化. 积分 (1.2) 式求出宇宙现在的年龄, 即改写 (1.2) 式为

$$\mathrm{d}t = H_0^{-1}\frac{\mathrm{d}a}{a}\left[\Omega_\Lambda + \frac{1-\Omega_\Lambda}{a^3}\right]^{-1/2} \tag{1.10}$$

其中 Ω_Λ 是宇宙学常数的能量密度与临界密度之比. 从 a=0(即 t=0) 积分到现在 $a=1$ 得到今天宇宙的年龄. 在以下两种情况下可以得到积分的分析表达式.

(a) 首先在 $\Omega_\Lambda = 0$ 时进行积分.

(b) 在 $\Omega_\Lambda = 0.7$ 时积分. 固定 H_0 的值, 哪种宇宙年龄更老?

3. 利用氘 (D) 原子中电子–原子核的约化质量大于氢 (H) 原子和氢原子 Ly-α($n=1 \rightarrow n=2$) 跃迁对应的波长等于 1215.67Å 的事实, 计算氘原子的对应能级跃迁发射光子的波长. 天文学家通常定义

$$v \equiv c\frac{\Delta\lambda}{\lambda} \tag{1.11}$$

来表征两条临近谱线的分裂. H-D 对应的 v 等于多少?

4. 将 (1.8) 式中的比强度转化为图 1.10 中所画曲线的表达式, 即每平方厘米, 单位立体角, 每秒的能量. 注意 x-轴坐标为波长的倒数 $1/\lambda$. 证明 2.73K 的黑体谱的峰值位于 $1/\lambda = 5\mathrm{cm}^{-1}$ 处.

第 2 章　均匀膨胀的宇宙

正如早期航海家需要复杂的工具帮助他们在大海中找到航线一样, 我们也需要现代科技帮助我们理清膨胀宇宙的分支结构. 在这一章中, 介绍两个必要工具: 广义相对论和统计力学. 借助于它们, 我们将导出第 1 章中展示的一些基本结果：膨胀定律方程 (1.2); 能量密度的不同成分对尺度因子的依赖关系, 这种依赖关系主宰宇宙的膨胀; 图 1.3 中物质–辐射密度相等时期 $a_{\rm eq}$ 和图 1.7 中用来理解超新星哈勃图含义所需要的光度距离. 实际上, 借助于广义相对论和统计力学, 我们可以深入了解宇宙的组成成分, 分辨在宇宙演化的各个阶段主宰宇宙命运的那些成分.

不言而喻, 这一章的讨论将建立在宇宙是平滑的 (密度在空间中不变化) 并且处于平衡状态 (其结果将在 2.3 节中探讨) 的假设下. 在后面的章节中, 我们将会看到对平衡与平滑状态的偏离是宇宙中的大多丰度的来源. 然而, 对任何宇宙学家来说, 为了理解这些偏离产生的理论框架, 对零阶 (或者 0 阶) 宇宙的基础知识的掌握是必需的.

在这一章中, 使用以下自然单位制,

$$\hbar = c = k_{\rm B} = 1. \tag{2.1}$$

很多文章都使用这些单位, 因此习惯这种表述非常重要. 如果读者对将光速设为 1 的做法不适应, 请先求解习题 1.

2.1　广义相对论

学习大部分宇宙学的知识仅需要简单的广义相对论理论基础. 读者必须熟悉度规的概念, 理解测地线的意义, 并能够把爱因斯坦方程应用到 Friedmann-Robertson-Walker (FRW) 度规中, 从而把度规中的参数与宇宙的密度联系起来. 方程 (1.2) 是把爱因斯坦方程应用于零阶 (或者 0 阶) 宇宙的结果. 在这一节里, 我们将推导出这一结果. 第 4 和 5 章将把这些结果应用到扰动的宇宙中. 拥有这一节获得的经验, 后续章节的学习将毫无困难. 原理是相同的, 只不过代数运算稍显繁琐.

2.1.1　度规

第 1 章的图 1.1 表明即使知道一个矢量的成分, 即两个格点的差别, 与这个矢量关联的物理距离还需要额外的信息. 在平滑膨胀宇宙的情况下, 尺度因子把坐标

距离和物理距离联系在一起. 更广义地说, 度规把坐标距离转换为物理距离, 因此它成为我们为膨胀宇宙做定量预言的探索过程中的一个必要工具. 我们熟悉笛卡儿坐标系统中的度规, 它是说在一个二维平面内, 间隔为 $\mathrm{d}x$ 和 $\mathrm{d}y$ 的两点之间物理距离的平方为 $(\mathrm{d}x)^2+(\mathrm{d}y)^2$. 然而, 如果我们使用极坐标系, 其物理距离的平方将不再是两个坐标差的平方和. 如果坐标间隔 ($\mathrm{d}r$ 和 $\mathrm{d}\theta$) 足够小, 两点之间距离的平方为 $(\mathrm{d}r)^2+r^2\times(\mathrm{d}\theta)^2\neq(\mathrm{d}r)^2+(\mathrm{d}\theta)^2$. 这个距离是个不变量：观测者使用笛卡儿坐标系得到的结果与使用极坐标系得到的一样. 因此, 另一种阐述度规的方式是：它将依赖于观测者的坐标转化为不变量. 在数学上, 二维 (2D) 平面内不变距离的平方表示为：二维度规 g_{ij} 是一个 2×2 对称矩阵. 在笛卡儿坐标系, 度规是一个对角 (矩阵), 其每个对角元都等于 1. 在极坐标系 (取 $x^1=r$ 和 $x^2=\theta$), 度规仍是对角的, 即 $g_{11}=1$, 但与 $(\mathrm{d}\theta)^2$ 相乘的对角元 g_{22} 等于 r^2.

也存在另一种思考度规的方法, 即使用图像. 当谈及矢量, 我们马上会想到一个带有箭头的线段, 线段的长度对应矢量的长度, 箭头的方向代表其方向. 事实上, 这种概念在欧几里得空间中根深蒂固. 实际中, 这个矢量的长度依赖于度规. 一个理解矢量概念的直观方法是考虑图 2.1 所示的等高线. 一个矢量穿过的线的个数是这个登山者旅行的垂直距离的度量. 拥有相同表观二维长度的矢量, 即对应于相同的坐标距离, 可以对应非常不同的物理距离. 数学上, 地球的表面可以用两个坐标 θ 和 Φ 来参数化. 那么度规则是 θ 和 Φ 的完全非平凡函数, 它表述在这个表面上的所有海拔的变化.

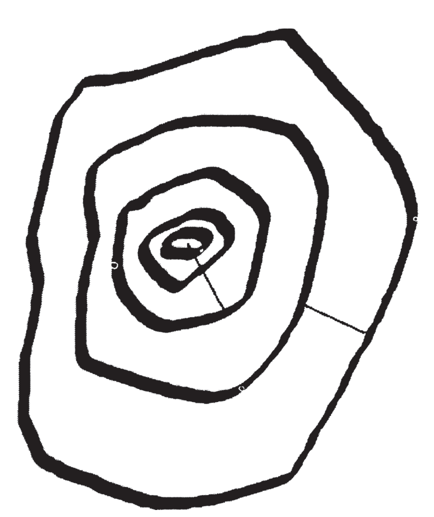


图 2.1 一座山峰的等高线图. 靠近中心间隔紧密的等高线间对应于海拔的迅速升高. 两条细线代表了两条难度差别很大的登山路径, 虽然它们看起来具有相同的长度. 同样地, 理解一个矢量的真实长度需要了解度规

度规的极大优势在于它包含了引力. 我们不是把引力考虑为一个外力, 也不是谈论粒子在引力场中的运动, 而是可以把引力包含在度规中, 从而谈论粒子在一个扭曲或弯曲时空中的自由运动. 在这种时空下, 度规不能在空间中处处都转化为欧几里得的形式.

在四维时空中, 不变量同样也包括时间间隔,

$$\mathrm{d}s^2 = \sum_{\mu,\nu=0}^{3} g_{\mu\nu}\mathrm{d}x^\mu \mathrm{d}x^\nu \tag{2.2}$$

这里指标 μ 和 ν 取值从 0 到 3(见 23 页框中内容), 其中第一个指标是类时坐标 ($\mathrm{d}x^0 = \mathrm{d}t$), 后三个是空间坐标. 这里我们明显地写出了求和符号, 但从现在开始将使用 (爱因斯坦求和) 约定, 即重复出现的指标自动求和. 度规 $g_{\mu\nu}$ 必定是对称的, 所以原则上讲它有 4 个对角元和 6 个非对角元. 它提供了坐标取值和对间隔 $\mathrm{d}s^2$ 的更多物理测量 (有时叫做固有时) 之间的联系. 狭义相对论由闵可夫斯基时空的度规 $g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu}$ 来描述, 其中

$$\eta_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \tag{2.3}$$

描述膨胀宇宙的度规又是什么呢? 让我们回到图 1.1 描述的格点. 我们之前说过两个格点相互远离, 所以它们之间的距离总是正比于尺度因子. 如果今天的共动距离是 x_0, 那么在较早的时刻, 两点间的物理距离则是 $a(t) \times x_0$. 至少在平直 (相异于开放或闭合) 宇宙, 除了距离必须乘以尺度因子外, 度规基本上等同于闵可夫斯基度规. 这暗示在一个膨胀的平直的宇宙中度规是

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a^2(t) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a^2(t) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a^2(t) \end{pmatrix}. \tag{2.4}$$

这称为 Friedmann-Robertson-Walker (FRW) 度规.

正如方程 (1.2) 指出的, 尺度因子的演化依赖于宇宙的密度, 这一点不久后我们将会推出. 引入扰动, 度规将变得更加复杂, 而度规中的扰动部分将由物质和辐射的不均匀性所决定 [译者注: 参见第 4 章方程 (4.3)].

指标

在三维空间中, 一个矢量 A 有三个分量, 我们用 A^i 来表示, 上标 i 取值为 1, 2 或 3. 那么, 两个矢量的点积为

$$\vec{A}\cdot\vec{B}=\sum_{i=1}^{3}A^iB^i\equiv A^iB^i, \tag{2.5}$$

这里已经引入了爱因斯坦求和约定, 即当一个指标 (这里指 i) 出现两次时, 不明显地写出求和符号. 同样地, 矩阵也可以写成分量形式. 例如, 矩阵 M 和 N 的乘积为

$$(MN)_{ij}=M_{ik}N_{kj} \tag{2.6}$$

再次隐含了对 k 求和.

在相对论中, 需要做两种推广. 第一, 任一矢量需要有第四维分量, 即时间分量. 既然空间指标取值从 1 至 3, 习惯上用 0 代表时间分量. 希腊字母用来表征所有四个分量, 即 $A^\mu=(A^0,A_i)$. 第二, 更加细致地说, 广义相对论的一大特征是上下指标的区分, 上指标为逆变, 下指标为协变. 读者可以上下作用于度规矢量, 即

$$A_\mu=g_{\mu\nu}A^\nu;\quad A^\mu=g^{\mu\nu}A_\nu. \tag{2.7}$$

逆变和谐变矢量相互缩并产生一个不变量, 即一个标量. 例如, 其表述为一个无质量的粒子的四维动量的标积一定等于零

$$P^2\equiv P_\mu P^\mu=g_{\mu\nu}P^\mu P_\nu=0. \tag{2.8}$$

这种缩并等价于图 2.1 所示的一个矢量穿过等高线的个数.

正如度规可以把一个矢量的上指标转化为下指标, 它可以用来升降带有任意指标个数的张量的指标. 例如, 对度规张量本身进行指标上升导致

$$g^{\mu\nu}=g^{\mu\alpha}g^{\nu\beta}g_{\alpha\beta}. \tag{2.9}$$

如果指标 $\alpha=\nu$, 则等号右边第一项等价于等号左边的项, 那么如果等号右边最后两项的组合使 α 等于 ν, 那么这个方程成立. 因此,

$$g^{\nu\beta}g_{\alpha\beta}=\delta^\nu_\alpha, \tag{2.10}$$

这里 δ^ν_α 是 Kronecker delta 符号. 只有当 $\nu=\alpha$ 时等于 1, 其他情况等于 0.

2.1.2 测地线方程

在闵可夫斯基空间, 除非一个力作用于它, 粒子都会沿直线运行. 不要觉得

奇怪, 在更加广义的时空中, 粒子的运动路径将会更加复杂. 直线的概念推广为**测地线**, 即不存在任何力的作用下粒子遵循的路径. 为了用方程表达这一概念, 我们必须将无外力作用的牛顿第二定律, $\mathrm{d}^2(x)/\mathrm{d}t^2 = 0$, 推广到膨胀的宇宙. 推广 $\mathrm{d}^2(x)/\mathrm{d}t^2 = 0$ 的必要方法流程或许最好用一个简单的例子开始引入：二维欧几里得平面中的粒子运动. 在那种情况下, 在笛卡儿坐标系 $x^i = (x, y)$ 中的运动方程为

$$\frac{\mathrm{d}^2 x^i}{\mathrm{d}t^2} = 0. \tag{2.11}$$

然而, 如果换用极坐标 $x'^i = (r, \theta)$ 来代替, 自由粒子的运动方程看起来极其不同. 两个坐标系之间的基本差别在于极坐标的基矢量 $\hat{r}, \hat{\theta}$ 在平面内变化. 所以, $\mathrm{d}^2\vec{x}'/\mathrm{d}t^2 = 0$ 并不意味着每个坐标 r 和 θ 也满足 $\mathrm{d}^2 x'^i/\mathrm{d}t^2 = 0$.

为了确定极坐标满足的方程, 我们可以从方程的笛卡儿形式出发, 然后进行变换. 特别地,

$$\frac{\mathrm{d}x^i}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial x^i}{\partial x'^j} \frac{\mathrm{d}x'^j}{\mathrm{d}t}. \tag{2.12}$$

$\partial x^i/\partial x'^j$ 称为从一个基矢到另一个基矢的**变换矩阵**. 在从二维笛卡儿坐标变换到极坐标的情况下, 有 $x^1 = x'^1 \cos x'^2$ 和 $x^2 = x'^1 \sin x'^2$, 所以变换矩阵为

$$\frac{\partial x^i}{\partial x'^j} = \begin{pmatrix} \cos x'^2 & -x'^1 \sin x'^2 \\ \sin x'^2 & x'^1 \cos x'^2 \end{pmatrix}. \tag{2.13}$$

因此, 测地线方程变为

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[\frac{\mathrm{d}x^i}{\mathrm{d}t}\right] = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[\frac{\partial x^i}{\partial x'^j}\frac{\mathrm{d}x'^j}{\mathrm{d}t}\right] = 0. \tag{2.14}$$

其中对时间的微分作用于括号内的两项. 如果从笛卡儿基矢到新的基矢的变换是线性的, 那么作用于变换矩阵的微分将会等于零, 测地线方程在新的基矢下仍为 $\mathrm{d}^2 x'^i/\mathrm{d}t^2 = 0$. 但是在极坐标情况下, 这个变换不是线性的, 所有我们需要下面的事实

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial x^i}{\partial x'^j}\right) =& \frac{\partial}{\partial x'^j}\left(\frac{\mathrm{d}x^i}{\mathrm{d}t}\right) \\ =& \frac{\partial^2 x^i}{\partial x'^j \partial x'^k}\frac{\mathrm{d}x'^k}{\mathrm{d}k} \end{aligned} \tag{2.15}$$

这里第一个等式成立是因为微分的交换性, 第二个等式来自于代入了方程 (2.12) 给出的 $\mathrm{d}x^i/\mathrm{d}t$ 的形式, 并把哑指标从 j 变为 k. 所以在新坐标系下, 测地线方程变为

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[\frac{\partial x^i}{\partial x'^j}\frac{\mathrm{d}x'^j}{\mathrm{d}t}\right] = \frac{\partial x^i}{\partial x'^j}\frac{\mathrm{d}^2 x'^j}{\mathrm{d}t^2} + \frac{\partial^2 x^i}{\partial x'^j \partial x'^k}\frac{\mathrm{d}x'^k}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}x'^j}{\mathrm{d}t} = 0. \tag{2.16}$$

为了得到其更加清楚明了的形式, 注意到与时间二阶微分项相乘的项即是变换矩阵. 如果我们用此变换矩阵的逆乘上这个方程, 那么时间二阶微分项将独立出来, 剩下

$$\frac{\mathrm{d}^2x'^l}{\mathrm{d}t^2}+\left[\left(\left\{\frac{\partial x}{\partial x'}\right\}^{-1}\right)^l_i\frac{\partial^2x^i}{\partial x'^j\partial x'^k}\right]\frac{\mathrm{d}x'^k}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}x'^j}{\mathrm{d}t}=0. \tag{2.17}$$

读者可以检验这个相当繁琐的方程的确给出了正确的极坐标系中的运动方程. 更重要的是, 通过保持其一般性, 我们导出了在非笛卡儿基矢下的测地线方程.

方便的做法是把方程 (2.17) 中的 Γ^l_{jk} 项定义为**克里斯托弗符号**, $(\mathrm{d}x'^k/\mathrm{d}t)\cdot(\mathrm{d}x'^j/\mathrm{d}t)$. 注意到通过这一定义, 其下指标 j 和 k 是对称的. 在笛卡儿坐标系中, 克里斯托弗符号消失, 测地线方程简化为 $\mathrm{d}^2x^i/\mathrm{d}t^2=0$. 但广义上讲, 克里斯托弗符号不会消失, 其存在描述了在非平凡坐标系中的测地线方程. 这个广义的测地线方程如此强大的原因是在一个诸如膨胀的宇宙这样的非平凡的时空中, 不可能找到一个固定的笛卡儿坐标系统, 所以我们需要知道粒子在更一般的情形下是如何行走的.

当把测地线方程 (2.17) 引入到相对论中时, 需要做两个小的改变. 第一个是普通而平常的, 即允许指标取值从 0 到 3, 包含时间和三个空间的维度. 第二个也是不奇怪的, 既然时间现在已经是我们的坐标之一, 它就不再用作演化参量. 作为代替, 引入一个参数 λ, 它沿着图 2.2 所示的粒子的路径单调增加. 那么测地线方程变为

$$\frac{\mathrm{d}^2x^\mu}{\mathrm{d}\lambda^2}=-\Gamma^\mu{}_{\alpha\beta}\frac{\mathrm{d}x^\alpha}{\mathrm{d}\lambda}\frac{\mathrm{d}x^\beta}{\mathrm{d}\lambda}. \tag{2.18}$$

通过对笛卡儿基矢进行变换, 我们得到了这一方程, 所以对应的克里斯托弗符号由方程 (2.17) 的方括号中项给出. 然而, 直接从度规出发得到克里斯托弗符号往往更加方便. 表示这种依赖关系的方便公式是

$$\Gamma^\mu{}_{\alpha\beta}=\frac{g^{\mu\nu}}{2}\left[\frac{\partial g_{\alpha\nu}}{\partial x^\beta}+\frac{\partial g_{\beta\nu}}{\partial x^\alpha}-\frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial x^\nu}\right]. \tag{2.19}$$

注意 $g^{\mu\nu}$ 的上指标非常关键: $g^{\mu\nu}$ 是 $g_{\mu\nu}$ 的逆 (见 23 页方框). 因此, $g^{\mu\nu}$ 在平直的 FRW 度规下等于 $g_{\mu\nu}$, 除了其空间分量由 $1/a^2$ 代替 a^2.

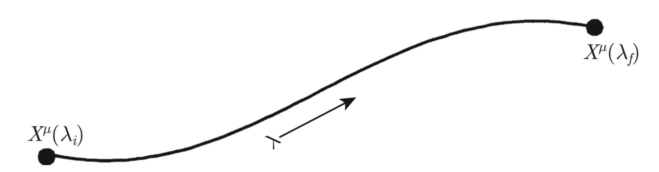


图 2.2　由 λ 参数化的一个粒子的路径. λ_i 从初始值 λ_f 到最终值单调递增

运用方程 (2.19) 给出的广义表达式以及方程 (2.4) 给出的 FRW 度规, 我们可以推导出在一个均匀膨胀的宇宙中的克里斯托弗符号. 首先, 计算上指标为 0 的分

量, ${\Gamma^0}_{\alpha\beta}$. 既然度规是对角的, 除非 $g^{0\nu}$ 此时它取值为 -1, 否则 $\nu = 0$ 因子消失. 因此有

$$
{\Gamma^0}_{\alpha\beta} = \frac{-1}{2}\left[\frac{\partial g_{\alpha\nu}}{\partial x^\beta} + \frac{\partial g_{\beta 0}}{\partial x^\alpha} - \frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial x^0}\right]. \tag{2.20}
$$

这里前面的两项简化为 g_{00} 的导数. 因为 FRW 度规有一个常数 g_{00}, 所以这些项都消失, 从而剩下

$$
{\Gamma^0}_{\alpha\beta} = \frac{1}{2}\frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial x^0}. \tag{2.21}
$$

只有当 α 和 β 都是空间指标, 即它们等同于罗马字母从 1 到 3 取值时, 这个导数才不为 0. 又因为 $x^0 = t$, 我们有

$$
\begin{aligned}
{\Gamma^0}_{00} &= 0 \\
{\Gamma^0}_{0i} = \Gamma^0_{i0} &= 0 \\
{\Gamma^0}_{ij} &= \delta_{ij}\dot{a}a
\end{aligned} \tag{2.22}
$$

这里字母上的点表示对时间的导数①. 一个简单而有用的推导练习表明, 只有当 ${\Gamma^i}_{\alpha\beta}$ 的两个下指标其一为 0, 另一代表空间分量, ${\Gamma^i}_{\alpha\beta}$ 的值才不为 0. 于是

$$
{\Gamma^i}_{0j} = {\Gamma^i}_{j0} = \delta_{ij}\frac{\dot{a}}{a} \tag{2.23}
$$

而 ${\Gamma^i}_{\alpha\beta}$ 其他所有的分量均为 0.

这一小节到这里已经十分翔实而正式, 它以测地线方程向弯曲的时空推广为开始, 然后进行了在由 FRW 度规描述的膨胀宇宙中的克里斯托弗符号的计算. 在完成我们的主要任务和使用爱因斯坦方程推导方程 (1.2) 之前, 让我们短暂休息, 把测地线方程应用到一个单粒子问题. 特别地, 让我们看一看一个粒子的能量是怎样随着宇宙的膨胀而变化的. 这里我们将对一个无质量粒子进行计算; 对于一个具有质量的粒子的几乎完全等同的问题移交给习题 4 来解决.

首先考虑四维能量–动量矢量 $P^\alpha = (E, \vec{P})$, 其时间分量是能量. 我们使用四矢量来定义方程 (2.18) 中的参数

$$
P^\alpha = \frac{\mathrm{d}x^\alpha}{\mathrm{d}\lambda}. \tag{2.24}
$$

这是 λ 的一个隐含定义. 幸运的是, 我们从不需要明显地求出 λ. 因为通过下面的提示, λ 可以被直接消除

$$
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\lambda} = \frac{\mathrm{d}x^0}{\mathrm{d}\lambda}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x^0} = E\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}. \tag{2.25}
$$

那么, 方程 (2.18) 的测地线方程的 0 阶分量变为

$$
E\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}t} = -{\Gamma^0}_{ij}P^iP^j \tag{2.26}
$$

① 我将使用这个约定直到第 4 章. 之后, 字母上的点将表示对共形时间的导数.

这里等号成立, 因为只有 $\Gamma^0_{\alpha\beta}$ 的空间分量是非 0 的. 代入这些分量, 导致其右边等于 $-\delta_{ij}a\dot{a}P^iP^j$. 一个无质量粒子具有能量–动量[①]矢量 $(E,\vec{P})$, 其大小为 0,

$$g_{\mu\nu}P^\mu P^\nu = -E^2 + \delta_{ij}a^2P^iP^j = 0, \tag{2.27}$$

它可以使我们把方程 (2.26) 的右边写为 $-(\dot{a}/a)E^2$. 因此测地线方程得出

$$\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}t} + \frac{\dot{a}}{a}E = 0, \tag{2.28}$$

其解为

$$E \propto \frac{1}{a}. \tag{2.29}$$

这个结果证实了我们在第 1 章示意性 (手写) 的论据, 无质量粒子的能量应该随宇宙的膨胀而减低, 因为它的能量反比于其随宇宙膨胀被拉伸的波长. 在第 4 章, 我们将用另一方法, 即玻耳兹曼方程, 重新推得这一结果.

2.1.3 爱因斯坦场方程

如果你对前两个小节进行字词搜索, 你会惊异地发现 “广义相对论” 这个词从来没有出现过. 度规的概念和非平凡度规影响测地线的认识都完全独立于广义相对论而存在. 上面被隐藏起来的广义相对论的一部分是指引力作用可以由度规来描述, 即我们所述的方程 (2.4). 然而广义相对论还有第二个方面, 即把度规同宇宙中的物质和能量联系起来. 这第二个部分包含于爱因斯坦方程中, 它把描述时空几何性质的爱因斯坦张量和描述能量的能量–动量张量联系在一起:

$$G_{\mu\nu} \equiv R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}\mathcal{R} = 8\pi G T_{\mu\nu}. \tag{2.30}$$

这里 $G_{\mu\nu}$ 是爱因斯坦张量; $R_{\mu\nu}$ 是里奇张量, 它依赖于度规及其导数; $\mathcal{R}$ 是里奇标量, 是里奇张量的并缩 $(\mathcal{R} \equiv g^{\mu\nu}R_{\mu\nu})$; G 是牛顿常数; $T_{\mu\nu}$ 是能量–动量张量. 在 2.3 节, 我们将把一些时间花在能量–动量张量上. 目前, 我们所有需要知道的是它是一个描述宇宙构成的对称张量. 方程 (2.30) 的左边是度规的函数, 右边是能量的函数: 爱因斯坦方程把两者联系起来.

里奇张量可以用克里斯托弗符号方便地表示出来

$$R_{\mu\nu} = \Gamma^\alpha{}_{\mu\nu,\alpha} - \Gamma^\alpha{}_{\mu\alpha,\nu} + \Gamma^\alpha{}_{\beta\alpha}\Gamma^\beta{}_{\mu\nu} - \Gamma^\alpha{}_{\beta\nu}\Gamma^\beta{}_{\mu\alpha}. \tag{2.31}$$

这里逗号代表对 x 的导数, 例如 $\Gamma^\alpha{}_{\mu\nu,\alpha} \equiv \partial\Gamma^\alpha{}_{\mu\nu}/\partial x^\alpha$. 尽管这个式子看起来可怕, 但是通过在一个由 FRW 度规描述的宇宙中计算克里斯托弗符号, 我们已经完成了

① 注意 $\vec{P}$ 测量共动 (非膨胀) 格点的运动. 物理动量测量物理距离的改变, 它与 $\vec{P}$ 的关系是乘以因子 a. 因此, 方程 (2.27) 中出现因子为 a^2.

最困难的工作. 事实证明, 里奇张量中只有两组分量不为 0：一组为 $\mu=\nu=0$, 另一组为 $\mu=\nu=i$.

考虑

$$R_{00}=\Gamma^{\alpha}{}_{00,\alpha}-\Gamma^{\alpha}{}_{\beta\alpha,0}+\Gamma^{\alpha}{}_{\beta\alpha}\Gamma^{\beta}{}_{00}-\Gamma^{\alpha}{}_{\beta 0}\Gamma^{\beta}{}_{0\alpha}. \tag{2.32}$$

回顾如果克里斯托弗符号的两个下指标都为 0, 其取值也为 0, 所以上式右边中第一和第三项消失. 同样地, 第二、四项中的指标 α 和 β 必须是空间分量. 于是我们有

$$R_{00}=-\Gamma^{i}{}_{0i,0}-\Gamma^{i}{}_{j0}\Gamma^{j}{}_{0i}. \tag{2.33}$$

利用方程 (2.23), 上式直接导致

$$\begin{aligned}R_{00}&=-\delta_{ii}\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)-\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2\delta_{ij}\delta_{ij}\\&=-3\left[\frac{\ddot{a}}{a}-\frac{\dot{a}^2}{a^2}\right]-3\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2\\&=-3\frac{\ddot{a}}{a}.\end{aligned} \tag{2.34}$$

上式第二行的因子 3 的出现是因为 δ_{ii} 表示对所有的三维空间指标进行求和, 对每一个指标求一次. 我将把空间–空间分量的推导留作练习, 其结果为

$$R_{ij}=\delta_{ij}[2\dot{a}^2+a\ddot{a}]. \tag{2.35}$$

爱因斯坦方程的下一个成分是里奇标量. 我们现在可做如下计算

$$\begin{aligned}\mathcal{R}&\equiv g^{\mu\nu}R_{\mu\nu}\\&=-R_{00}+\frac{1}{a^2}R_{ii}.\end{aligned} \tag{2.36}$$

同样, 对 i 的求和产生出因子 3, 所以有

$$\mathcal{R}=6\left[\frac{\ddot{a}}{a}+\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2\right]. \tag{2.37}$$

为了理解在均匀宇宙中的尺度因子的演化, 我们只需要考虑爱因斯坦方程的时间–时间分量：

$$R_{00}-\frac{1}{2}g_{00}\mathcal{R}=8\pi G T_{00}. \tag{2.38}$$

左边各项的求和结果是 $3\dot{a}^2/a^2$, 而能量–动量张量的时间–时间分量仅仅是能量密度 ρ. 所以最终有

$$\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2=\frac{8\pi G}{3}\rho. \tag{2.39}$$

为了将它改变为方程 (1.2) 的形式, 我们回顾这里其等号左边项就是哈勃膨胀率的平方, 并且宇宙的临界密度定义为 $\rho_{\rm cr} \equiv 3H_0^2/8\pi G$. 所以, 等号两侧同除以 H_0^2 导致

$$\frac{H^2(t)}{H_0^2} = \frac{\rho}{\rho_{\rm cr}}. \tag{2.40}$$

这里, 能量密度 ρ 计入了来自各种成分的能量密度：物质, 辐射和暗能量. 在我们的推导中, 假设宇宙是平直的, 因此, 方程 (2.40) 不包含对应宇宙曲率贡献的项. 我把在开放宇宙中推出爱因斯坦方程留做习题.

2.2 距　　离

我们可以预期在一个膨胀的宇宙中测量距离将是一件复杂的需要动脑筋的事情. 重新考虑图 1.1 所示的膨胀格点, 马上可以看出两种可能的测量距离的方法, 即当宇宙在膨胀时保持定值的共动距离, 或者仅仅由于膨胀而增长的物理距离. 通常, 这两者都不能精确地描述我们感兴趣的测量过程. 例如, 光线离开红移为 3 的遥远的类星体朝我们飞来, 那时尺度因子只有现在的四分之一; 当光线今天到达我们这里时宇宙已经膨胀为原来的 4 倍. 在这种情况下, 我们应该使用什么距离把该类星体的光度和我们接收到的流量联系起来呢?

基本的距离度量是在共动格点上的距离, 所有其他的距离都可以通过它计算出来. 如果正如我们在这本书大部分章节假设的, 宇宙是平直的, 那么在共动格点上计算距离则很容易：两点 $\vec{x}_1$ 与 $\vec{x}_2$ 之间的距离等于 $[(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2+(z_1-z_2)^2]^{1/2}$.

一个非常重要的共动距离是光线从 $t=0$ 时刻起 (到达宇宙任意时刻 t, 包括现在时刻 t_0) 行走 (不考虑相互作用) 的距离. 在时间间隔 $\mathrm{d}t$ 内, 光线穿行的共动距离为 $\mathrm{d}x = \mathrm{d}t/a$(回顾我们设定 $c=1$), 所以光线能够行走的总的共动距离为

$$\eta \equiv \int_0^t \frac{\mathrm{d}t'}{a(t')}. \tag{2.41}$$

这个距离非常重要的原因在于, 自时间开始没有任何信息可以传播得比 η 更远 (还是在共动格点上). 因此, 被大于 η 的距离分隔的区域没有因果联系. 如果这些区域看起来相似, 我们应该感到疑惑. 于是可以把 η 当成共动视界, 也可以把单调递增的 η 当成是时间变量, 并称为共形时间. 正如时间 t, 温度 T, 红移 z 和尺度因子 a, η 也可以用来讨论宇宙的演化. 事实上, 针对大多数目的, η 是最方便的时间变量. 所以当我们开始学习扰动的演化之时, 将使用它来代替 t. 在一些简单的情况下, η 可以解析地以尺度因子 a 的形式表达出来 (习题 11). 例如, 在物质主导的宇宙, $\eta \propto a^{-3/2}$, 而当辐射主导之时, $\eta \propto a$.

另一个重要的共动距离是遥远的辐射源与我们之间的距离. 在这种情况下, 从我们到一个尺度因子为 a(或红移为 $z = 1/a - 1$) 的天体的共动距离是

$$\chi(a) = \int_{t(a)}^{t_0} \frac{\mathrm{d}t'}{a(t')} = \int_a^1 \frac{\mathrm{d}a'}{a'^2 H(a')}. \tag{2.42}$$

这里我把对 t' 的积分改为了对 a' 的, 这样在分母引入了额外因子 $\mathrm{d}a/\mathrm{d}t = aH$. 典型来讲, 我们可以看到 $z \leqslant 6$ 的天体; 在这些很晚的时期, 辐射的贡献可以忽略 (回顾图 1.3). 如果在这个时期宇宙是纯的物质主导的, 那么 $H \propto a^{-3/2}$, 我们可以解析地求解方程 (2.42) 的积分,

$$\begin{aligned}\chi^{\mathrm{Flat,MD}}(a) &= \frac{2}{H_0}[1 - a^{1/2}] \\ &= \frac{2}{H_0}\left[1 - \frac{1}{\sqrt{1+z}}\right].\end{aligned} \tag{2.43}$$

这个共动距离在小 z (低红移) 情况下化为 z/H_0 (证实了在 1.2 节关于低红移处哈勃图的手写性讨论), 而在 z 变得非常大 (高红移) 时渐近于 $2/H_0$.

在天文学上, 确定距离的一个经典方法是测量一个具有已知尺度 l 的天体的张角 θ. 那么到这个物体的距离为 (假设张角很小)

$$d_{\mathrm{A}} = \frac{l}{\theta}. \tag{2.44}$$

这里下标 "A" 代表*角直径距离*. 为了计算在一个膨胀宇宙中的角直径距离, 我们首先注意到这个物体的共动大小是 l/a. 因为到这个物体的共动距离由方程 (2.42) 给出, 所以相应的张角为 $\theta = (l/a)/\chi(a)$. 对比方程 (2.44), 可以看出角直径距离为

$$d_{\mathrm{A}}^{\mathrm{flat}} = a\chi = \frac{\chi}{1+z}. \tag{2.45}$$

注意角直径距离在低红移处近似等于共动距离, 但是实际上在非常高红移处会减小. 至少在平直宇宙中, 物体在高红移处看起来会比它们在中红移处大! 这里的上标用来提醒我们这个结果只对平直宇宙成立. 在一个开放或封闭的宇宙中, 曲率密度定义为 $\Omega_k = 1 - \Omega_0$, 这里 Ω_0 是今天包括物质、辐射和诸如宇宙学常数这样的任何其他形式能量的宇宙总密度与临界密度的比值. 如果曲率项非 0, 则角直径距离推广为

$$d_{\mathrm{A}} = \frac{a}{H_0\sqrt{|\Omega_k|}}\begin{cases}\sinh[\sqrt{\Omega_k}H_0\chi] & \Omega_k > 0 \\ \sin[\sqrt{-\Omega_k}H_0\chi] & \Omega_k < 0\end{cases}. \tag{2.46}$$

注意在曲率密度 Ω_k 趋向于 0 的极限情况下, 这两个表达式都化为平直情况的结果. 图 2.3 展示了在平坦宇宙中的角直径距离, 分别考虑或忽略宇宙学常数的贡献.

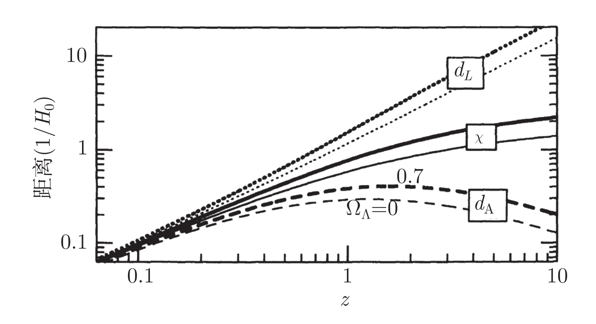


图 2.3　平坦膨胀宇宙中的三种距离测量. 从上到下依次是光度距离、共动距离和角直径距离. 每一种情况下的一对曲线分别对应于仅包含物质成分 (浅色线) 和包含 70%宇宙学常数 (深色线) 的平坦宇宙模型的结果. 在 Lamda(宇宙学常数) 主导的宇宙模型中, 到固定红移处的距离大于物质主导宇宙的结果

在天文学中, 另一种导出距离的方法是测量来自于一个已知光度天体的的辐射流量. 回顾观测一个已知光度 L、距离在 d 处的源的流量 F 为 (暂时忘记宇宙膨胀)

$$F = \frac{L}{4\pi d^2} \tag{2.47}$$

因为通过一个面积为 $4\pi d^2$ 的球壳总光度是恒定的. 如何把这个结果推广到膨胀宇宙? 同样, 在共动格点上推导最简单, 这一次源的中心位于原点. 我们观测到的流量是

$$F = \frac{L(\chi)}{4\pi\chi^2(a)} \tag{2.48}$$

这里 $L(\chi)$ 是通过一个半径为 $\chi(a)$ 的 (共动) 球壳的光度. 为了进一步简化, 假定所有辐射的光子都具有相同的能量. 那么 $L(\chi)$ 就是这个能量乘以单位时间内穿过一个 (共动) 球壳的光子数目. 对一个固定的时间间隔, 在共动格点上, 光子在早期行走的距离比在晚期行走的更远, 因为与之相关的物理距离在早期更小. 因此对于一个固定的时间间隔, 在现在时刻穿过球壳的光子数目将比在发射时刻少, 两者相差一个因子 a. 同样, 由于宇宙膨胀, 现在时刻光子的能量也将低于发射时刻. 所以, 来自光源单位时间内穿过距离 $\chi(a)$(即我们的距离) 的共动球壳的能量将比在光源处以因子 a^2 减小. 因此我们观测到的流量将为

$$F = \frac{La^2}{4\pi\chi^2(a)} \tag{2.49}$$

这里 L 是在光源处的光度. 只要我们定义下式作为*光度距离*, 就可以使方程 (2.47)

在膨胀宇宙的情况下继续适用①,

$$d_L \equiv \frac{\chi}{a}. \tag{2.50}$$

图 2.3 展示了光度距离.

所有这三种距离在一个包含宇宙学常数的宇宙中都比在不含宇宙学常数宇宙中的值大. 这来自事实, 在 Λ (宇宙学常数) 主导的宇宙中能量密度小, 从而膨胀率也较小. 因此在早期宇宙的膨胀较慢, 光需要更多的时间从遥远的天体行进到我们这里. 所以这些遥远的天体看起来将比其在只有物质主导的宇宙中显得更加暗淡.

2.3 能量的演化

让我们回到位于爱因斯坦方程等号右边的能量–动量张量. 最终我们将会把 $T^{\mu}{}_{\nu}$ 扰动包含在内, 但在这一章里, 首先考虑一个理想的各向同性流体的情形. 那么,

$$T^{\mu}{}_{\nu} = \begin{pmatrix} -\rho & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \mathcal{P} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mathcal{P} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mathcal{P} \end{pmatrix} \tag{2.51}$$

这里 $\mathcal{P}$ 是流体的压强.

能量–动量张量的各个分量如何随时间演化? 首先考虑没有引力而且速度可忽略的情形. 在这种情况下, 压强和能量密度的演化遵循连续性方程, 即 $\partial\rho/\partial t = 0$, 以及欧拉方程, 即 $\partial P/\partial x^i = 0$. 这可以升级为一个能量–动量张量的四分量守恒方程: $\partial T^{\mu}{}_{\nu}/\partial x^{\mu} = 0$. 但是在一个膨胀宇宙中, 这个守恒准则需要修改. 取而代之, 守恒意味着协变导数为 0,

$$T^{\mu}{}_{\nu;\mu} \equiv \frac{\partial T^{\mu}{}_{\nu}}{\partial x^{\mu}} + \Gamma^{\mu}{}_{\alpha\mu} T^{\alpha}{}_{\nu} - \Gamma^{\alpha}{}_{\nu\mu} T^{\mu}{}_{\alpha}. \tag{2.52}$$

$T^{\mu}{}_{\nu;\mu}$ 为零是四个分立的方程; 让我们考虑 $\nu = 0$ 分量, 即

$$\frac{\partial T^{\mu}{}_{0}}{\partial x^{\mu}} + \Gamma^{\mu}{}_{\alpha\mu} T^{\alpha}{}_{0} - \Gamma^{\alpha}{}_{0\mu} T^{\mu}{}_{\alpha} = 0. \tag{2.53}$$

因为假设各向同性, T^{i}_{0} 消失, 所以在第一项中的哑指标 μ 和第二项中的哑指标 α 必须等于 0:

$$\frac{-\partial\rho}{\partial t} - \Gamma^{\mu}{}_{0\mu}\rho - \Gamma^{\alpha}{}_{0\mu} T^{\mu}{}_{\alpha} = 0. \tag{2.54}$$

① 实际上还有一个区别需要考虑: 观测到的光度与在不同波长处发射的光度有关. 这里我们已经假设一个探测器接收所有光子.

根据方程 (2.23), 除非 α, μ 是取值相同的空间指标, 这时 $\Gamma^{\alpha}{}_{0\mu}$ 等于 $\dot{a}/a$, 否则它会消失. 所以膨胀宇宙中的守恒定律为

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\dot{a}}{a}[3\rho + 3\mathcal{P}] = 0. \tag{2.55}$$

对各项重新整理后, 得到

$$a^{-3}\frac{\partial[\rho a^3]}{\partial t} = -3\frac{\dot{a}}{a}\mathcal{P}. \tag{2.56}$$

守恒定律可以立即用来收集关于物质和辐射随宇宙膨胀的标度信息. 因为物质具有有效的 0 压强, 所以

$$\frac{\partial[\rho_{\mathrm{m}} a^3]}{\partial t} = 0 \tag{2.57}$$

这意味着物质的能量密度 $\rho_m \propto a^{-3}$. 在第 1 章中, 基于质量保持常数而数密度与体积成反比的一个简单的概念, 我们预期得到这个结果. 同样的, 应用到辐射的结果也不出意料. 辐射有 $\mathcal{P} = \rho/3$(习题 14), 所以从方程 (2.55) 可以推出,

$$\begin{aligned}\frac{\partial \rho_r}{\partial t} + \frac{\dot{a}}{a}4\rho_r &= a^{-4}\frac{\partial[\rho_r a^4]}{\partial t} \\ &= 0\end{aligned} \tag{2.58}$$

因此, 辐射的能量密度 $\rho_r \propto a^{-4}$, 可以解释为随着宇宙膨胀每个粒子的能量在衰减.

在早期宇宙大部分时间内, 相互作用进行得足够快, 能够使粒子处在平衡状态, 不同种类的粒子共有一个温度. 我们将经常用这个温度来表示能量密度和压强. 由于这个原因, 以及将要出现在后续章节的许多其他原因, 引入某个种类粒子的占有数, 或称为*分布函数*, 是很方便的. 它表征在相空间位置 $\vec{x}$ 和动量 $\vec{p}$ ①附近区域粒子的数目. 那么, 某种粒子的能量可以通过对能量在所有相空间元的求和来得到: $\sum f(\vec{x}, \vec{p})E(p)$, 这里 $E(p) = \sqrt{p^2 + m^2}$. 在一个体积为 $\mathrm{d}^3x\mathrm{d}^3p$ 的区域中有多少个相空间元? 根据海森伯原理, 粒子不能位于比 $(2\pi\hbar)^3$ 更小的相空间区域内, 所以这就是基本相空间元的大小. 因此, 在区域 $\mathrm{d}^3x\mathrm{d}^3p$ 内相空间元的数目是 $\mathrm{d}^3x\mathrm{d}^3p/(2\pi\hbar)^3$(图 2.4), 而且能量密度为

$$\rho_i = g_i \int \frac{\mathrm{d}^3 p}{(2\pi)^3} f_i(\vec{x}, \vec{p}) E(p) \tag{2.59}$$

这里 "i" 标示不同的粒子种类, g_i 是它们的简并度 (例如, 由于光子的自旋态其简并度等于 2), 而且我们又回到了 $\hbar = 1$. 在温度为 T 的平衡状态, 玻色子 (如光子) 服从玻色–爱因斯坦分布,

$$f_{\mathrm{BE}} = \frac{1}{\mathrm{e}^{(E-\mu)/T} - 1}, \tag{2.60}$$

① 在这里, p 不是方程 (2.24) 所定义的共动动量, 而是随宇宙膨胀而减小的固有动量. 可参见练习 15 对这一问题的讨论.

同时费米子 (如电子) 满足费米–狄拉克分布,

$$f_{\mathrm{FD}}=\frac{1}{\mathrm{e}^{(E-\mu)/T}+1}, \tag{2.61}$$

这里 μ 是化学势. 应该注意的是这些分布仅与动量的大小 p 有关, 而与位置 $\vec{x}$ 或者动量的方向 $\hat{p}$ 无关. 这是 0 阶平滑宇宙的一个特征. 当考虑非均匀性和非各向同性时, 我们将会看到这些分布函数在 0 阶值附近会有小扰动, 而且这些扰动的确依赖于位置和传播方向.

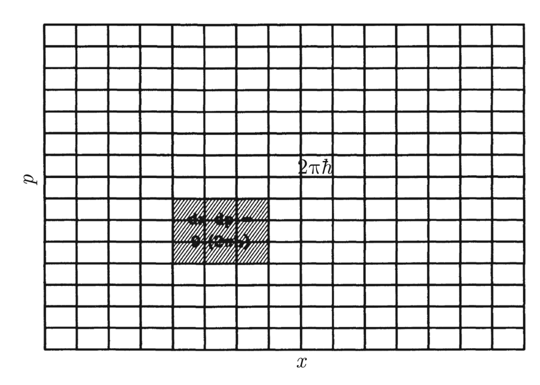


图 2.4 一维的位置和动量相空间. 每个单元格的体积是 $2\pi\hbar$, 根据海森伯原理, 这是能限制粒子位置的最小区域. 阴影部分是无穷小体积 $\mathrm{d}x\mathrm{d}p$, 包含了九个单元格. 为了计算所包含单元格的适当数目, 对相空间的积分必须是 $\int \mathrm{d}x\mathrm{d}p/(2\pi\hbar)$

同样的, 压强也可以表示成对分布函数的积分,

$$\mathcal{P}_i=g_i\int\frac{\mathrm{d}^3p}{(2\pi)^3}f_i(\vec{x},\vec{p})\frac{p^2}{3E(p)}. \tag{2.62}$$

在宇宙几乎所有时间里, 对几乎所有粒子, 化学势都远远小于温度. 那么一个有效的近似是, 分布函数只依赖于 E/T, 而且压强满足 (练习 14)

$$\frac{\partial\mathcal{P}_i}{\partial T}=\frac{\rho_i+\mathcal{P}_i}{T}. \tag{2.63}$$

这个关系式可以用来表明, 宇宙的熵密度正比于 a^{-3}. 为了得到这个结果, 重写方程 (2.56),

$$a^{-3}\frac{\partial[(\rho+\mathcal{P})a^3]}{\partial t}-\frac{\partial\mathcal{P}}{\partial t}=0. \tag{2.64}$$

压强对时间的导数可以写为 $(\mathrm{d}T/\mathrm{d}t)(\partial\mathcal{P}/\partial T)$, 所以

$$\begin{aligned}a^{-3}\frac{\partial[(\rho+\mathcal{P})a^3]}{\partial t}-\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}t}\frac{\rho+\mathcal{P}}{T}&=a^{-3}T\frac{\partial}{\partial t}\left[\frac{(\rho+\mathcal{P})a^3}{T}\right]\\&=0.\end{aligned} \tag{2.65}$$

于是熵密度[1]

$$s \equiv \frac{\rho + \mathcal{P}}{T} \tag{2.66}$$

正比于 a^{-3}. 尽管我们建立的这一论据基于单一粒子种类, 但这一标度关系对包括处在平衡状态的所有粒子种类在内的总熵都成立. 事实上, 即使两种粒子有不同的温度, 它们熵密度的和仍然正比于为 a^{-3}. 在计算宇宙中中微子和光子的相对温度时, 我们将会很快利用这一事实.

2.4 宇宙的组成

在拥有了一个给定种类粒子的能量密度的表达式 (方程 (2.59)), 并了解了它如何随时间演化 (方程 (2.56)) 之后, 现在可以定量地解决宇宙各种成分贡献多少能量这个问题.

2.4.1 光子

CMB 光子的温度已经被 COBE 卫星上的 FIRAS 探测器以非凡的精度测量出来, $T = (2.725 \pm 0.002)\,\mathrm{K}$ (Mather et al., 1999). 与这个辐射相关的能量密度是

$$\rho_\gamma = 2\int \frac{\mathrm{d}^3 p}{(2\pi)^3} \frac{1}{\mathrm{e}^{p/T} - 1} p. \tag{2.67}$$

方程 (2.67) 前面的因子 2 是考虑了光子的两个自旋态. 因为光子无质量, 所以一给定状态的光子能量仅为 p, 化学势为 0; 我们在理论上期望这个结果, 因为在宇宙早期, 光子数目不守恒 (例如, 正负电子可以湮灭产生光子). 从观测的角度我们也知道这一点, 因为 CMB 的能谱已经被非常准确地测量. 化学势的上限是 $\mu/T < 9\times10^{-5}$ (Fixsen et al., 1996), 所以忽略掉 μ 是安全的. 又因为方程 (2.67) 中的被积函数不依赖于角度, 所以对角度的积分得到一个因子 4π, 因此我们只剩下一维积分问题. 定义一个哑变量 $x \equiv p/T$, 那么

$$\rho_\gamma = \frac{8\pi T^4}{(2\pi)^3} \int_0^\infty \frac{\mathrm{d}x\ x^3}{\mathrm{e}^x - 1}. \tag{2.68}$$

这个积分可以用黎曼 ζ 函数来表示, 即 $6\zeta(4) = \pi^4/15$, 所以

$$\rho_\gamma = \frac{\pi^2}{15} T^4. \tag{2.69}$$

又因为我们已经得到辐射的能量密度正比于 a^{-4}(方程 (2.58)), 所以 CMB 的温度必正比于 a^{-1}.

[1] 技术上来说, 在熵密度中存在另一项——正比于化学势能, 但是, 如前所述, 这一项通常与宇宙学不相关. 即使非零的化学势能存在, 熵密度仍正比于为 a^{-3}.

使所有能量密度都具有相同的单位将非常有用. 最简单的方法是让所有能量密度除以今天的临界密度①. 因此,

$$\frac{\rho_\gamma}{\rho_{\text{cr}}} = \frac{\pi^2}{15}\left(\frac{2.725\text{K}}{a}\right)^4 \frac{1}{8.098\times 10^{-11}h^2\text{eV}^4}$$
$$= \frac{2.47\times 10^{-5}}{h^2 a^4} \tag{2.70}$$

这里为了得到最后一行的结果, 牢记绝对温度与eV(电子伏特) 的转换关系 (11605K= 1eV) 是十分有用的. 重申重要的一点, 方程 (2.70) 中的光子能量密度通过尺度因子依赖于时间, 但是没有空间依赖性. 这是因为我们已经用了 0 阶分布函数, 即玻色–爱因斯坦函数来描述光子. 事实上, 在 0 阶分布函数附近会存在小的扰动. 这种扰动具有空间相关性, 对应于 CMB 中的各向异性.

2.4.2　重子

与 CMB 不同, 重子②不能简单地用一个温度下零化学势的气体来描述. 因此, 需要通过直接测量来得到重子密度, 而不是通过温度. 目前存在四种已经建立起来的方法测量重子密度, 而且所有这些方法给出的结果相互符合得很合理 (Fukugita et al., 1998). 这些是在不同红移处的测量, 我们知道密度正比于 a^{-3}, 所以为了方便对比, 定义 Ω_b

$$\frac{\rho_b}{\rho_{\text{cr}}} = \Omega_b a^{-3}. \tag{2.71}$$

这里 Ω_b 是重子密度 (译者注: 这里是在宇宙某一时刻的密度) 与今天的临界密度的比值.

最简单的方法是观测星系中的今天的重子. 但是对密度贡献最大的并不是来自星系中的恒星, 而是星系群中的气体. 在星系群中, Ω_b 近似于 0.02. 第二种计数重子的方法是观测遥远类星体的光谱. 通过测量这些灯塔 (类星体) 辐射出的光被吸收的量, 可以测量居间的中性氢, 进而测量重子密度. 这些估计 (Rauch et al., 1997) 表面重子密度是 $\Omega_b h^{1.5} \simeq 0.02$, 带有相当大的不确定度. 第三种推断重子密度的方法是仔细地查验宇宙的各向异性. 正如在第 8 章将会看到, 这些各向异性与重子密度有关. 来自 CMB 的初步结果 (Pryke et al., 2001; Netterfield et al., 2001) 给出 $\Omega_b h^2 = 0.024^{+0.004}_{-0.003}$. 最后, 在第 3 章我们将会看到, 轻元素对重子密度很敏感, 因而这种利用轻元素丰度的估计方法使得 $\Omega_b h^2 = 0.0205 \pm 0.0018$.

---

①临界密度—正如同定义它的哈勃膨胀率一样—随着时间演化. 然而, 通常, 临界密度被定义为一个常数, 即现时刻的临界密度, 在以后的章节中也将遵循这一规定.

② 把宇宙中所有的核子和电子称为重子. 在技术上这是不正确的 (因为电子是轻子), 但是, 核子的质量远大于电子, 因此实际上所有的质量在重子中.

值得注意的是, 这些利用不同的技术对重子密度的估计结果都相互吻合①. 它们都把重子密度限制在大约是临近密度的 2%~5%. 而宇宙中所有物质的密度要高于此值, 因此宇宙中必存在非重子物质.

2.4.3 物质

以上提到的所有测量重子密度的方法都涉及物质和辐射的相互作用. 例如, 简单地对恒星进行计数在一定程度上有效, 是因为我们大致知道需要多少质量可以输出一个典型恒星的光度. 然而, 存在一些测量物质质量的方法不依赖于光与物质相互作用. 这些方法传统而言都涉及测量给定系统的引力场, 因而可以推断导致该引力场的质量信息. 图 2.5 展示了导出的从星系到超星系团许多系统的质光比. 历史上, 质光比首先是在小尺度被测量出来, 结果暗示宇宙的密度曾经远小于临界密度. 随着更多在大尺度上测量的数据的获得, 质光比平稳的上升的结果致使很多宇宙学家推断, 我们最终将会发现宇宙的密度等于临界密度. 然而, Bahcall 和合作者 (Bahcall, Lubin, and Dorman, 1995; Bahcall et al., 2000) 主张质光比在超过 $R \sim 1\text{Mpc}$ 以外不会增加; 平坦质光比的出现与物质密度 $\Omega_m \simeq 0.3$ 相一致, 这里 Ω_m 是今天总的物质密度与临界密度之比, 并且

$$\rho_{\rm m} = \Omega_m \rho_{\rm cr} a^{-3}. \tag{2.72}$$

最近出现了许多推断物质密度的其他手段. 在第 7 章将会看到宇宙中的星系分布, 特别是这个分布的功率谱, 对 $\Omega_m h$ 非常敏感; 事实上所有星系巡天② 都给出 $\Omega_m h \simeq 0.2$. 在第 9 章将会遇到的另外一种宇宙学探针是宇宙的速度场 (Strauss and Wilhck, 1995) 及其与观测的星系分布的关系. 这些量通过对 Ω_m 十分敏感的连续性方程联系起来. 同样的, 大多数测量结果集中在 $\Omega_m \simeq 0.3$.

另一种测量总质量密度的方法是挑选出对 Ω_b/Ω_m 敏感的观测结果, 然后用 Ω_b 的表观值来推断物质密度. 例如, 星系团中大部分重子质量是以热气体形式存在. 星系团的气体质量与总质量的比例可以通过 X 射线观测 (White et al., 1993) 或者观测星系团方向上电子加热的 CMB (Grego et al., 2001) 来测得. 如果这个比率是整个宇宙整体的特征值—它很有可能是, 因为星系团尺度很大—那么宇宙的重子与物质的比率约为 20%. 因为重子仅占了临界密度的 5%左右, 所以推出总的物质密

① 实际上, 这些结果的吻合是否成立是一种主观的争论. 一些研究声称 (例如, Persic and Salucci, 1992) 存在一个重子丢失的问题. 原因在于今天观测的重子丰度比由轻元素丰度得出的要低.

② 这里涉及 3 个例子. APM 巡天 (Efstathiou and Moody, 2001), 将在第 9 章做进一步讨论; 2DF 巡天 (Percival et al., 2001); SDSS 巡天的早期数据 (Dodelson et al., 2001). 这些研究小组分别发现 $\Omega_m h = 0.14(+0.24; -0.03), 0.20(+0.03; -0.03), 0.14(+0.11; -0.06)$.

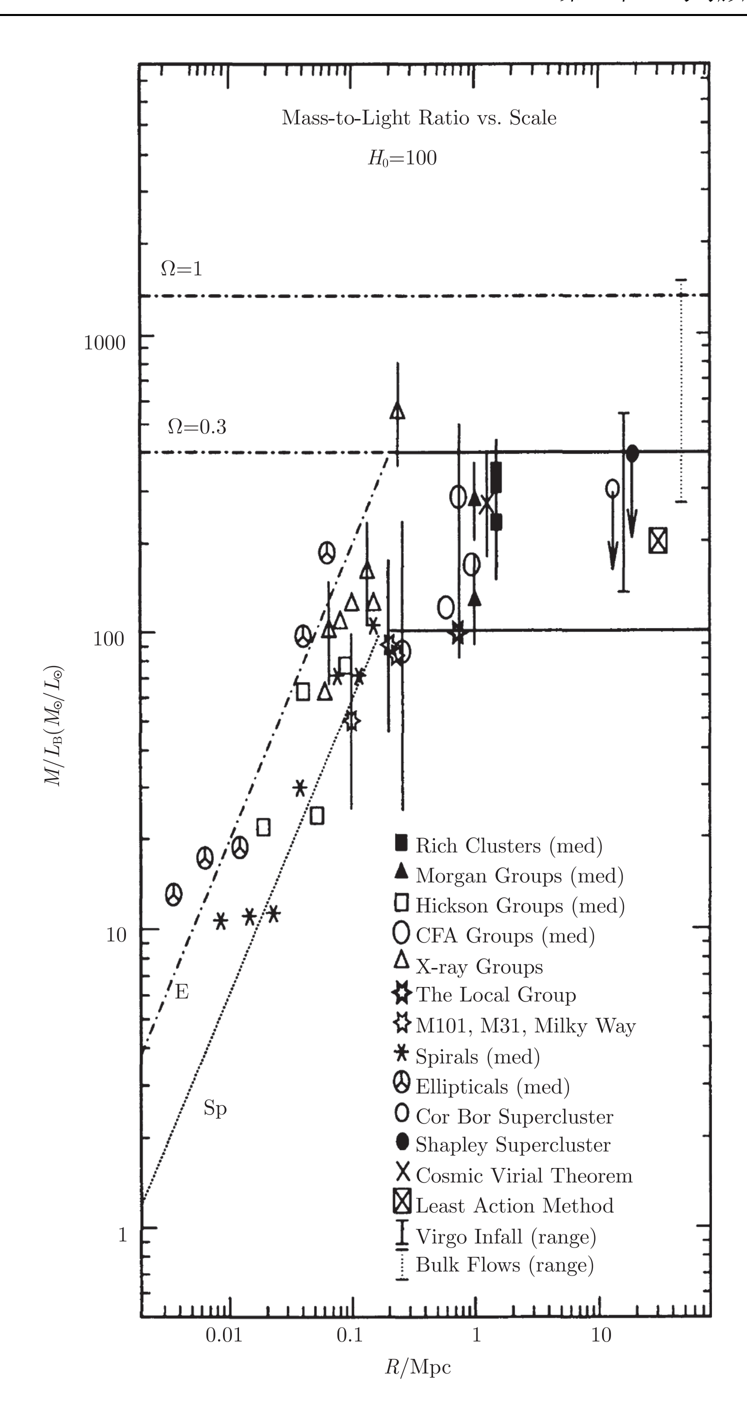


图 2.5　作为尺度的函数的质光比 (Bahcall et al., 2000). 在最大尺度, 该比率变平, 以致 $\Omega_m \simeq 0.3$

度的比率约为 0.25. 另一种推断重子/物质比率的方法是通过在星系的功率谱中寻找一些特征; 如果重子比例确为 20%的量级, 那么在功率谱中会有摆动 (又见第 7 章). 在 Two Deep Field (2DF) 巡天 (Percival et al., 2001) 的早期数据中有对这些摆动的试探性的暗示. 这些研究确定 $\Omega_b/\Omega_m = 0.15 \pm 0.07$, 与星系团的观测相符. 最后, CMB 的各向异性 (见第 8 章) 对物质密度 $\Omega_m h^2$ 非常敏感. 最近的测定表明 $\Omega_m h^2 = 0.16 \pm 0.04$(Pryke et al., 2001; Netterfield et al., 2001). 基于目前对哈勃常数的最佳估计为 $h = 0.72$ 这一事实, CMB 的观测也与一个占临界密度 30%的物质密度的结果相符合.

因此, 我们已经有了大量证据表明重子密度占临界密度的比率为 5%的量级, 而总物质密度的比率比其大 5 倍. 宇宙中大部分物质一定不是重子, 它一定是一些新形式的物质：暗物质.

2.4.4 中微子

我们需要考虑的下一种成分是中微子. 不像光子和重子, 宇宙中微子还没有被观测到, 所以关于它们对能量密度的贡献的论据必然是理论上的. 但是基于对物理原理的透彻理解, 这些理论论据是非常强的.

对于中微子相互作用率的基本了解使我们认为中微子曾经一度与宇宙等离子体的其他成分保持平衡态. 因为它们是费米子, 其分布是化学势为 0 的费米–狄拉克分布. 在晚期, 因为相互作用很弱, 它们与等离子体失去联系. 然而, 它们的分布保持为费米–狄拉克分布, 只是温度随 a^{-1} 下降. 因此, 我们的主要任务在于把今天的中微子与光子的温度联系起来. 其中比较复杂的部分是当宇宙温度是电子质量量级时, 正负电子之间发生湮灭. 中微子略早在湮灭发生之前就与宇宙等离子体失去联系, 所以它们没有继承任何相关的能量. 光子则继承这一能量, 因此温度比中微子更高.

利用总的熵密度 s 正比于 a^{-3} 的事实 (方程 (2.66)), 我们可以解释这个正负电子的湮灭过程. 无质量玻色子的每个自旋态贡献总熵密度的 $2\pi^2 T^3/45$, 而无质量费米子的贡献为此值的 7/8, 同时大质量粒子的贡献可以忽略 (练习 17). 在湮灭之前, 费米子有电子 (2 个自旋态), 正电子 (2), 中微子 (3 代, 每代 1 个自旋态) 和反中微子 (3). 玻色子有光子 (2 个自旋态). 所以湮灭之前, 在 a_1 时,

$$\begin{aligned} s(a_1) &= \frac{2\pi^2}{45} T_1^3 [2 + (7/8)(2+2+3+3)] \\ &= \frac{43\pi^2}{90} T_1^3 \end{aligned} \tag{2.73}$$

这里 T_1 是 a_1 时的共同温度. 在湮灭之后, 电子与正电子消失, 而光子与中微子的

温度不再相同：我们必须区分它们. 因此, 熵密度为

$$s(a_2) = \frac{2\pi^2}{45}\left[2T_\gamma^3 + \frac{7}{8}6T_\nu^3\right]. \tag{2.74}$$

使 $s(a_1)a_1^3$ 与 $s(a_2)a_2^3$ 相等, 得到

$$\frac{43}{2}(a_1T-1)^3 = 4\left[\left(\frac{T_\gamma}{T_\nu}\right)^3 + \frac{21}{8}\right](T_\nu(a_2)a_2)^3. \tag{2.75}$$

但中微子温度始终正比于 a^{-1}, 所以 $a_1T_1 = a_2T_\nu(a_2)$. 因此两个温度之比为

$$\frac{T_\nu}{T_\gamma} = \left(\frac{4}{11}\right)^{1/3}. \tag{2.76}$$

现在我们可以估算宇宙中中微子的能量密度. 下面总结一下我们所知的关于宇宙中微子的丰度：

- 中微子有一个自旋自由度；
- 中微子有反粒子；
- 中微子有三代；
- 中微子是费米子 $\to$ 费米–狄拉克分布；
- 中微子的温度比光子低一个因子 $(4/11)^{1/3}$, 因为后者被 e^+e^- 湮灭所加热.

上面清单中前三项暗示中微子的简并因子等于 6. 第四项意味着我们需要将方程 (2.67) 的分母变为 $e^{p/T}+1$. 于是费米–狄拉克积分变小为原来的 7/8. 最终, 因为一个无质量粒子的能量密度定标为 T^4, 最后一项暗示中微子的能量密度比光子的能量密度小 $(4/11)^{1/3}$. 把这些因子都放在一起导致

$$\rho_\nu = 3\frac{7}{8}\left(\frac{4}{11}\right)^{4/3}\rho_\gamma. \tag{2.77}$$

等价地, 如果今天有三类无质量中微子, 那么它们对能量密度的贡献将是

$$\Omega_\nu \equiv \left.\frac{\rho_\nu}{\rho_{\rm cr}}\right|_{\rm today} = \frac{1.68\times10^{-5}}{h^2}, \quad m_\nu = 0. \tag{2.78}$$

现实是, 所有中微子并不是无质量的. 来自太阳 (Bahcall, 1989) 和我们大气 (Fukuda et al., 1998) 的中微子观测强烈地暗示不同味 (代) 的中微子通过振荡作用相互转变. 这只有在中微子有质量时才会发生. 尤其是大气中微子观测暗示至少一类中微子的质量大于 0.05 eV ①. 一个有质量中微子的能量密度是

$$\rho_\nu = 2\int\frac{d^3p}{(2\pi)^3}\frac{\sqrt{p^2+m_\nu^2}}{e^{p/T_\nu}+1}. \tag{2.79}$$

① 振荡实验对质量差 $(m_2^2 - m_1^2)$ 非常敏感, 因此实际的限制结果是其质量平方差为 10^{-3} 量级. 这可以通过很小差别的几乎简并的质量得到.

在高温度条件下, 上式化为方程 (2.77)(没有因子 3), 所以当考虑早期宇宙的中微子时, 使用方程 (2.77) 常常足够了. 的确, 当我们来估计物质的能量密度与辐射的能量密度相等时期之后不久就要这么做. 在晚期, 大质量中微子的能量密度是 $m_\nu n_\nu$, 其数密度等于 $3n_\gamma/11$ (练习 18). 正如图 2.6 所见, 这个转变时期发生在 $T_\nu \sim m_\nu$ 时. 因此

$$\Omega_\nu = \frac{m_\nu}{94h^2\text{eV}}, \quad m_\nu \neq 0. \tag{2.80}$$

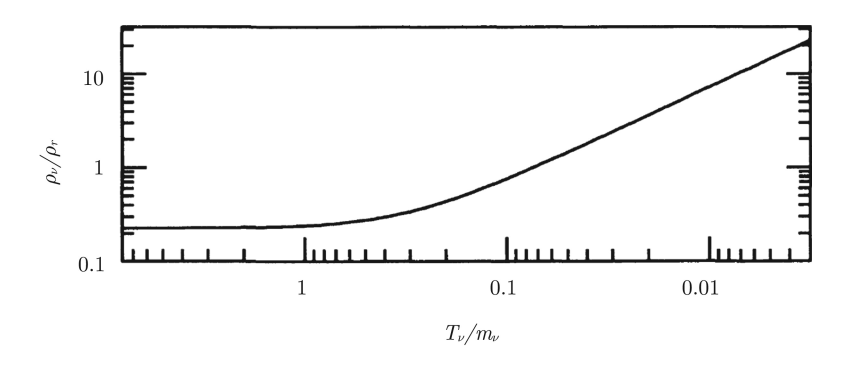


图 2.6 以 CMB 密度为单位的一代大质量中微子的能量密度. 在高温度时, 此密度的比率是一个确定的常数; 在低温度时, 中微子的表现类似于非相对论物质 (正比于 a^{-3}), 这样中微子开始比光子 (其能量密度正比于 a^{-4}) 占主导成分

那些同时耕耘于天体物理与粒子物理领域的早期学者 (Gerstein and Zel'dovich, 1966; Marx and Szalay, 1972; Cowsik and McClelland, 1972) 注意到总密度并不是远远大于临界密度这一简单观测结果导致了对中微子质量的限制, 这个限制比加速器测量到的更加紧致. 当对非重子暗物质的需要首先变得明显时, 一些宇宙学家 (如 Gunn et al., 1978) 提出中微子作为暗物质自然的候选者. 后续的对宇宙结构的研究, 由于把中微子作为暗物质主导成分, 显得与实际的宇宙有很明显的差别 (Bond, Efstathiou and Silk, 1980; White, Frenk and Davis, 1983). 然而, 中微子可能作为总密度一部分的可能性在 90 年代又再度出现. 于是, 我们希望通过观测中微子对宇宙大尺度结构的影响, 能探测到一个对应于质量小于 eV 量级的示踪量.

2.4.5 暗能量

有两套证据指出存在一些超出上面所列的辐射和物质的其他东西. 第一个证据来自于简单的宇宙成分的预算赤字. 宇宙的总能量密度非常接近临界密度. 在理论上我们期待这个结论 (见第 6 章), 而且在 CMB 各向异性的图形中我们可以观测到它 (见第 8 章). 然而从观测推断的总物质密度只是临界密度的三分之一. 宇宙总密

度剩下的三分之二一定是处于平滑的, 不成团的形式, 绰号为暗能量[①]. 第二套证据更加直接. 在给定宇宙的能量组成之后, 我们可以计算一个理论上的距离相对于红移的图. 于是, 这种关系在观测上可以被检验.

在 1998 年, 两个观测超新星的团队 (Riess et al., 1998, Perlmutter et al., 1999) 报道了暗能量的直接证据. 这个证据基于在暗物质主导的宇宙与暗能量主导的宇宙中光度距离的差别. 正如图 2.3 所示, 在高红移处, 处于暗能量主导的宇宙中的物体的光度距离更大. 因此, 具有固定内禀光度的物体在包含暗能量成分的宇宙中将看起来更暗淡.

更加具体的来讲, 方程 (2.50) 的光度距离可以用来求一个具有绝对星等 M 的源的视星等 m. 星等与辐射流量相关, 即 $m = -(5/2)\log(F) + \text{constant}$. 因为流量正比于 d_L^{-2}, 视星等 $m = M + 5\log(\mathrm{d}_L) + \text{constant}$. 约定为

$$m - M = 5\log\left(\frac{d_L}{10\text{pc}}\right) + K \tag{2.81}$$

这里 K 是对由宇宙膨胀引起的光谱进出测量到的波长范围内的位移的修正.

这两个团队测量了很多 Ia 型超新星的视星等. 这些超新星被认为是标准烛光, 因为它们拥有几乎相同的绝对星等. 虽然他们可以用所探测到的许多超新星对暗能量给出严格的限制, 但是我们可以通过简单地考虑其中两个来感受一下. 于是, 考虑超新星 1997ap, 在红移 $z = 0.83$ 处被发现, 视星等为 $m = 24.32$; 另一个是超新星 1992P, 在低红移 $z = 0.026$ 处被发现, 视星等 $m = 16.08$. 因为这两个超新星的绝对星等相同, 视星等上的差异仅仅来自于光度距离的不同:

$$24.32 - 16.08 = 5\log(d_L(z = 0.83)) - 5\log(d_L(z = 0.026)). \tag{2.82}$$

近处的光度距离与宇宙学无关, 仅等于 $z/H_0 = 0.026/H_0$. 因此方程 (2.82) 中残余的唯一未知量由下面的观测来确定

$$H_0 d_L(z = 0.83) = 1.16. \tag{2.83}$$

在一个平坦的物质主导的宇宙 ($\Omega_m = 1$) 中, 到红移 $z = 0.83$ 处的光度距离等于 $0.95H_0^{-1}$, 然而在一个 $\Omega_m = 0.3$ 及宇宙学常数 $\Omega_\Lambda = 0.7$ 的宇宙中对应的光度距离是 $1.23H_0^{-1}$. 那么, 单独这一个遥远的超新星就暗示了暗能量遍布宇宙之中.

① 在该能量形式被发现之后, 人们相当程度的关注放在了选定一个合适的名称. 每个人给出的最初名称是宇宙学常数, 然而这非常具有局限性, 因为其含义是能量密度永远是个常数, 而我们还不清楚这是否是暗能量的真实特性. 可变的宇宙学常数修正了那个问题, 但是引入了一个内在矛盾 (“可变的” 和 “常数”?). 可变化的希腊字母 Lambda 表示宇宙学常数太过晦涩. Quintessence 是一个好的选择: 它展现了一个事实, 即除了宇宙学光子、重子、中微子和暗物质之外, 宇宙中还存在第五个要素. 在我看来, 暗能量变得有点更加流行, 而 Quintessence 指暗能量模型中的一个子模型, 即能量密度与时间依赖的标量场关联.

当然, 上一段中的讨论没有考虑不确定性 (星等中典型的不确定性量级在 0.2 左右), 而且没有对已知的所有超新星进行仔细的拟合, 没有考虑尘埃消光或者与观测持续时间相关的绝对星等的变化. 那两个超新星研究组完成了所有上述工作, 得到了图 2.7 所示的限制. 两个自由的宇宙学参数是物质密度 Ω_m 和宇宙学常数 Ω_Λ, 这是现在我们认为的一种可能的暗能量的形式, 其能量密度是常数. 注意到 "理论家之梦" 宇宙, 即平坦的物质主导的宇宙 ($\Omega_m = 1$), 在很高的置信度上被排除了. 的确, 即使一个纯的开放宇宙 ($\Omega_m = 0.3, \Omega_\Lambda = 0$) 也被超新星数据强烈地排斥.

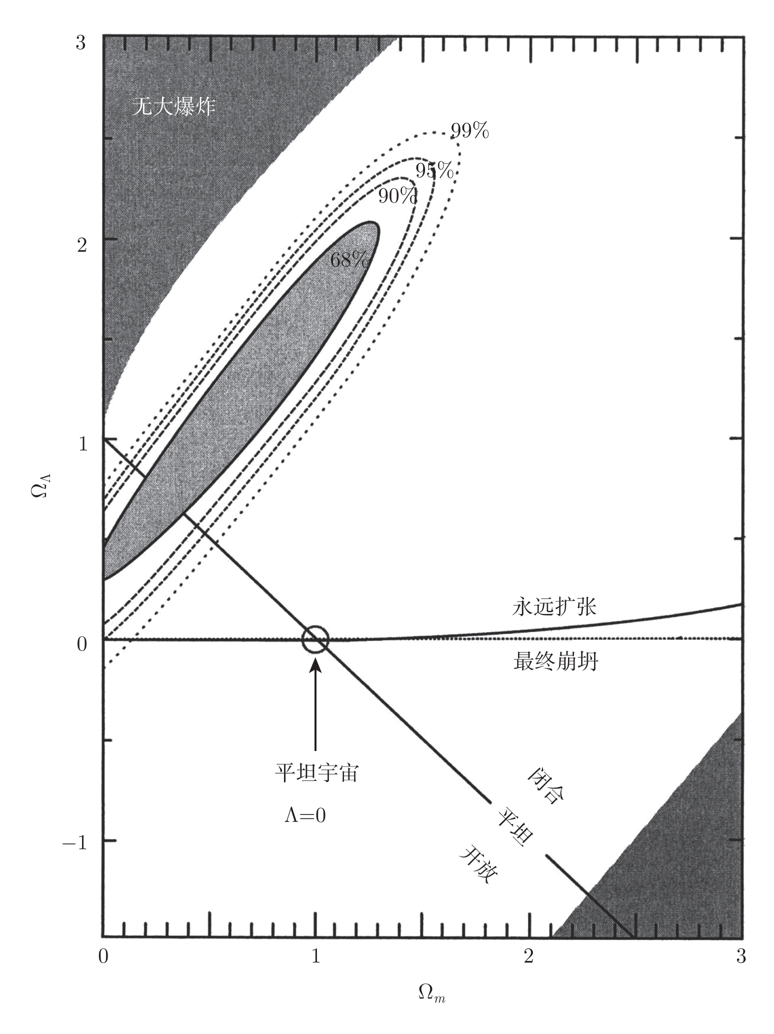


图 2.7 Ia 型超新星对参数 (Ω_m, Ω_Λ) 的限制 (Perlmutter et al., 1999). 平坦的物质主导的宇宙 ($\Omega_m = 1, \Omega_\Lambda = 0$), 即点线, 在很高的置信度上被排除. 从左上角到右下角延伸的线对应一个平坦宇宙

虽然高度受欢迎, 但图 2.7 存在两个缺陷. 在一部分扇形区域它考虑了太多自由度, 而另一区域又太少. 图中大部分区域被同时含有暗能量和非零曲率 (非平坦) 的宇宙所占据. 虽然这二者之一或者另一个都被争论过, 但是很少有宇宙学家认为宇宙同时含有二者. 因此, 除了 "平坦" 线和 $\Omega_\Lambda = 0$ 线, 图 2.7 的大部分区域至少在美学上讲无吸引力：这幅图容忍了太多自由度. 另一方面, 在预算中的暗能量的唯一形式是宇宙学常数. 为了开启其他的可能性, 考虑将方程 (2.55) 应用到宇宙学常数. 使常数能量密度满足这个方程的唯一方法是让压强等于 $-\rho$. 可以想象具有一个稍有不同压强的能量以及因此导致的暗能量演化. 定义

$$w \equiv \frac{\mathcal{P}}{\rho}. \tag{2.84}$$

一个宇宙学常数对应 $w = -1$, 物质对应 $w = 0$, 辐射对应 $w = 1/3$. 通过这一新的自由度, 如果固定宇宙是平坦的, 让我们看一下超新星数据对暗能量的状态方程会做出怎样的暗示. 图 2.8 展示了 w 大于 -0.5 的值是被排斥的; 宇宙学常数与数据相符合, 但是绝不是唯一的可能性. 对方程 (2.55) 积分求得暗能量的演化方程,

$$\rho_{\rm de} \propto \exp\left\{-3\int^a \frac{{\rm d}a'}{a'}[1 + w(a')]\right\}. \tag{2.85}$$

注意: 如果 w 是常数, 这个表达式与我们上面详细解说的情况一致, 即 $w = 1/3, 0, -1$.

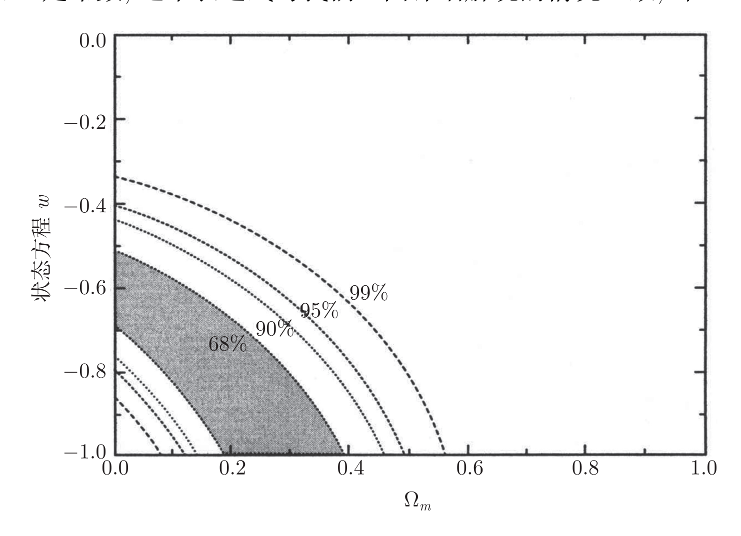


图 2.8　在平坦宇宙下 Ia 型超新星对物质密度 (Ω_m) 和暗能量状态方程 (w) 的限制 (Perlmutter et al., 1999). 宇宙学常数对应 $w = -1$, 物质对应 $w = 0$

2.4.6　物质−辐射密度相等时期

物质的能量密度与辐射的能量密度相等所对应的时期称为物质–辐射密度相等

时期. 它对大尺度结构的产生及 CMB 各向异性的发展具有特殊的意义, 因为扰动在这两个不同时期以不同速率增长. 因此计算物质–辐射密度相等时期是一个有用的练习. 为了做此练习, 我们需要计算出物质和辐射的能量密度, 然后找到它们相等时对应的尺度因子.

使用方程 (2.70) 和方程 (2.78), 可以看到辐射的总能量密度是

$$\frac{\rho_r}{\rho_{\rm cr}} = \frac{4.15 \times 10^{-5}}{h^2 a^4} \equiv \frac{\Omega_r}{a^4}. \tag{2.86}$$

为了计算物质–辐射密度相等时期, 令方程 (2.86) 和方程 (2.72) 相等, 可得

$$a_{\rm eq} = \frac{4.15 \times 10^{-5}}{\Omega_m h^2}. \tag{2.87}$$

一个不同的方法来表示这个时期是红移 z 形式; 密度相等时刻的红移是

$$1 + z_{\rm eq} = 2.4 \times 10^4 \Omega_m h^2. \tag{2.88}$$

注意：显然的, 随着今天的宇宙中物质的量 $\Omega_m h^2$ 增加, 这个相等时刻的红移也变大. 为了我们的目的, 密度相等时刻的红移至少几倍于光子与物质退耦的红移, $z_* \simeq 10^3$, 这将是非常重要的. 因此, 我们期望光子退耦的时候, 宇宙已经完全进入物质主导的阶段.

2.5 小　　结

平滑宇宙可以用方程 (2.4) 给出的 Friedmann-Robertson-Walker 度规所描述, 这意味着物理距离与坐标 (共动) 距离通过与依赖于时间的尺度因子 $a(t)$ 联系起来. 度规的时间依赖性由爱因斯坦方程决定. 在平坦宇宙中, 爱因斯坦方程的时间–时间分量化为方程 (2.39).

在膨胀的宇宙中测量距离是复杂的, 但是所有相关的距离可以通过我们与在红移为 z 的源之间的共动距离获得：

$$\chi(z) = \int_0^z \frac{{\rm d}z'}{H(z')}. \tag{2.89}$$

另外一个重要的距离是光从 $t = 0$ 开始在宇宙中行进的距离. 它通常表示为一个时间量, 即共形时间,

$$\eta = \int_0^t \frac{{\rm d}t'}{a(t')} = \int_z^\infty \frac{{\rm d}z'}{H(z')}. \tag{2.90}$$

当我们来考虑宇宙中扰动的演化时, 这个共形时间将是自然的时间变量.

宇宙中的光子遵循化学势为 0 的玻色–爱因斯坦分布, 所以其能量密度可以通过测量其温度而确定. 中微子遵循费米–狄拉克分布, 同样化学势大概为 0, 但是因为我们对其质量的忽略, 关于其能量密度存在一些模棱两可. 早期阶段, 这种模棱两可是无关紧要的, 因为中微子的温度比其质量大很多, 即中微子表现为相对论性. 因此中微子质量的不确定度不会影响温度在 1MeV 量级的大爆炸核合成, 甚至可能不会影响温度在 1eV 量级的物质–辐射密度相等时期. 中微子的温度比光子的温度小一个因子 $(4/11)^{1/3}$. 这个结果, 加上统计的差别, 意味着一种无质量中微子的能量密度等于 0.23 倍光子的能量密度. 单独一代质量为 m_ν 的中微子的贡献为 $\Omega_\nu = 0.01(m_\nu/0.94\text{eV}h^2)$. 除了光子和中微子, 宇宙还由重子 (由核合成给出最佳结果为 $\Omega_b h^2 = 0.0205 \pm 0.0018$), 暗物质 ($\Omega_m \simeq 0.3$) 和暗能量 (一种新形式的具有负压强的能量形式, $\Omega_{\text{de}} \simeq 0.7$) 所组成.

今天, 非相对论性物质具有的能量显著地多于辐射. 但是, 因为辐射的能量密度正比于 a^{-4}, 而物质则为 a^{-3}, 极早期宇宙曾是辐射主导的. 物质密度与辐射密度相等的时期刻画了这两个阶段的轮廓: $a_{\text{eq}} = 4.15 \times 10^{-5}/\Omega_m h^2$.

推 荐 读 物

我最推崇的关于广义相对论的书籍是*A First Course in General Relativity* (广义相对论第一课)(Schutz), 这本书通过浅显的例子介绍了广义相对论中看起来很深奥的思想. *Flat and Curved Spacetimes* (平坦与弯曲时空)(Ellis and Williams) 和*Essential Relativity* (相对论的本质)(Rindler) 这两部著作也非常值得一读. 稍微高级的读物推荐*Gravitation and Cosmology: Principles and Applications of the General Theory of Relativity* (引力与宇宙学: 广义相对论的原理与应用)(Weinberg), 这本书的第 15 章也详细讨论了早期宇宙. 另外两本更高级的书籍是*General Relativity* (广义相对论)(Wald) 和经典的*Gravitation* (引力)(Misner, Thorne and Wheeler). 本章介绍的一些热力学和统计力学知识在*The Early Universe* (早期宇宙)(Kolb and Turner) 有论及. 本章 2.2 节论述的距离方程在所有标准教材中都有描述. 关于中微子及其宇宙学的关系同样也包括在标准教材中, 但也有一些单独介绍中微子和天体物理的好书, 如*Neutrino Astrophysics* (中微子天体物理)(Bahcall, 该作者是这一领域的先驱) 和*Massive Neutrinos in Physics and Astrophysics* (物理与天体物理中的大质量中微子)(Mohapatra and Pal).

大量的文章在一个可以理解的水平上探讨了本章的主题. Hogg(1999) 针对所有不同距离的测量给出了特别清晰的综述. Fukugita, Hogan 和 Peebles(1999) 做了本章 2.4.2 节中所列的重子物质的条目. 自 20 世纪 80 年代末超新星被发现后 (原著时间错误), 大量文章涌现试图解释暗能量问题. 其中两篇创新性的文章,

Perlmutter(1999) 和 Riess(1998), 条理极其清晰, 非常值得一读.

练　习

1. 通过加入适当的因子 $c, \hbar, k_{\mathrm{B}}$, 转换下面的量:

- $T_0 = 2.725\mathrm{K} \to \mathrm{eV}$
- $\rho_\gamma = \pi^2 T_0^4/15 \to \mathrm{eV}^4$, $\mathrm{g\ cm^{-3}}$
- $1/H_0 \to \mathrm{cm}$
- $m_{\mathrm{P1}} \equiv 1.2 \times 10^{19}\mathrm{GeV} \to \mathrm{K}$, cm^{-1}, sec^{-1}

2. 在极坐标下证明测地线方程正确描述了粒子在二维空间中自由穿行的运动. 利用两种方法中的一种 (或两种) 得到 Christoffel 符号, 然后继续做 (b) 题.

(a) Christoffel 符号可以直接从方程 (2.17) 括号中的项或者从方程 (2.91) 两维矩阵中得到

$$g_{ij} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & r^2 \end{pmatrix} \tag{2.91}$$

利用方程 (2.91) 证明非零 Christoffel 符号有

$$\Gamma^2_{12} = \Gamma^2_{21} = \frac{1}{4}; \quad \Gamma^1_{22} = -r \tag{2.92}$$

其中 1, 2 对应于 r, θ.

(b) 利用这些 Christoffel 符号写出测地线方程的两个分量, 并证明它们给出了粒子在平面中的正确运动方程.

3. 在引力场存在的情况下粒子穿行的度规是 $g = n + h$, 其中 $h_{00} = -2\phi, \phi$ 为牛顿引力势; $h_{i0} = 0$ 和 $h_{ij} = -2\phi\delta_{ij}$. 求出大质量粒子在该场中的运动方程.

(a) 证明 $\Gamma^0{}_{00} = \partial\phi/\partial t$ 和 $\Gamma^i{}_{00} = \delta^{ij}\partial\phi/\partial x^j$.

(b) 证明测地线方程的时间分量意味着能量 $p^0 + m\phi$ 守恒.

(c) 证明可从测地线方程的空间分量导出 $\dfrac{\mathrm{d}^2 x^i}{\mathrm{d}t^2} = -m\delta^{ij}\partial\phi/\partial x^j$, 这与牛顿理论相符. 利用粒子是非相对论性的所以 $p^0 \gg p^i$ 这个事实.

4. 求一个大质量、非相对论下的粒子的能量随宇宙膨胀是如何变化的. 回顾我们曾经用到的在无质量的情况下的事实 $g_{\mu\nu}P^\mu P^\nu = 0$. 在本题情况下, 它不等于零, 而是 $-m^2$.

5. 补足在爱因斯坦方程推导过程中的一些剩余空白.

(a) 计算平坦 FRW 度规下的 Christoffel 符号 $\Gamma^i{}_{\alpha\beta}$.

(b) 计算平坦 FRW 宇宙下的 Ricci 张量的空间部分 R_{ij}. 证明时空项, R_{i0}, 为零.

6. 证明平坦宇宙中爱因斯坦方程中的空间–空间分量是

$$\frac{\mathrm{d}^2 a/\mathrm{d}t^2}{a} + \frac{1}{2}\left(\frac{\mathrm{d}a/\mathrm{d}t}{a}\right)^2 = -4\pi G\mathcal{P} \tag{2.93}$$

其中 $\mathcal{P}$ 为压力, $T^i{}_i$(不对 i 进行求和) 是能动张量的分量.

7. 求解并应用被限制在半径为 r 的球面上粒子的度规、Christoffel 符号、Ricci 标量.

(a) 利用坐标 t、θ、Φ, 矩阵

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & r^2 & 0 \\ 0 & 0 & r^2\sin^2\theta \end{pmatrix}. \tag{2.94}$$

证明非零 Christoffel 符号是 $\Gamma^{\theta}{}_{\phi\phi}, \Gamma^{\phi}{}_{\phi\theta}, \Gamma^{\phi}_{\theta\phi}$. 将它们用 θ 表达出来.

(b) 利用这些结果和测地线方程, 求解粒子的运动方程.

(c) 求 Ricci 张量, 并证明其缩写可导致

$$\mathcal{R} \equiv g^{\mu\nu}R_{\mu\nu} = \frac{2}{r^2}. \tag{2.95}$$

8. 把爱因斯坦方程应用在开放宇宙情况下, 则间隔为

$$\mathrm{d}s^2 = -\mathrm{d}t^2 + a^2(t)\left\{\frac{\mathrm{d}r^2}{1+\Omega_k H_0^2 r^2} + r^2(\mathrm{d}\theta^2 + \sin^2\theta\mathrm{d}\phi^2)\right\} \tag{2.96}$$

其中 r、θ、Φ 是标准三维球坐标, Ω_k 为曲率密度.

(a) 首先计算 Christoffel 符号, 并证明其非零项为

$$\begin{aligned} \Gamma^{i}{}_{0j} = H\delta^{i}{}_{j}, \quad & \Gamma^{0}{}_{ij} = g_{ij}H \\ & \Gamma^{i}{}_{jk} = \frac{g^{il}}{2}[g_{lj,k} + g_{lk,j} - g_{jk,l}]. \end{aligned} \tag{2.97}$$

(b) 证明 Ricci 张量分量为

$$\begin{aligned} R_{00} &= -3\frac{\ddot{a}}{a} \\ R_{ij} &= g_{ij}\left[\frac{\ddot{a}}{a} + 2H^2 - \frac{2\Omega_k H_0^2}{a^2}\right]. \end{aligned} \tag{2.98}$$

(c) 从这些结果中, 计算 Ricci 标量, 接着导出爱因斯坦的时间–时间分量.

9. 证明在平坦宇宙下我们得到的测地线方程意味着

$$\frac{\mathrm{d}^2\vec{x}}{\mathrm{d}\eta^2} = 0 \tag{2.99}$$

其中 η 为共形时间.

10. 假设宇宙中只有物质和辐射 (没有宇宙常数), 并且是平坦的 ($\rho_0 = \rho_{\mathrm{cr}}$). 积分方程 (1.2), 确定当宇宙温度为 0.1MeV 和 1/4MeV 时的宇宙时间.

11. 推导共动时间作为 a 的函数的一些简单表达式.

(a) 证明在物质主导的宇宙下以及在辐射主导下等于 a.

(b) 考虑一个宇宙只包含物质和辐射, 其密度在 a_{eq} 相等. 证明

$$\eta = \frac{2}{\sqrt{\Omega_m H_0^2}}[\sqrt{a + a_{\mathrm{eq}}} - \sqrt{a_{\mathrm{eq}}}]. \tag{2.100}$$

今天的共形时间是多少? 退耦时的共形时间是多少?

12. 考虑一个星系的物理大小 (可见) 为 5 kpc. 如果它位于红移为 0.1 处, 其展开的角大小是多少? 红移为 1 处呢? 在平坦宇宙中, 首先是物质主导, 接着是 30%物质、70%宇宙常数的情况下, 分别进行计算.

13. 具有黑体谱的光子气体的能量密度与辐射的比强度的关系是什么? 即 ρ_r 与方程 (1.8) 中定义的 I_v 的关系式?

14. (a) 计算平衡态下温度为 T 的相对论性物质的压强. 证明在费米–狄拉克统计和玻色–爱因斯坦统计下, 均为 $P = \rho/3$.

(b) 假设分布函数只与 E/T 有关, 正如处于平衡态下. 求 $\mathrm{d}P/\mathrm{d}T$. 一个简单的方法是重写积分中的 $\mathrm{d}f/\mathrm{d}T$ 为 $-(E/T)$, 并分部积分方程 (2.62).

15. 分布函数形式下能动张量的广义相对论表达式是

$$T^{\mu}{}_{\nu}(\vec{x},t)\Big|_{\text{species } i} = g_i \int \frac{\mathrm{d}P_1\mathrm{d}P_2\mathrm{d}P_3}{(2\pi)^3}(-\det[g_{\alpha\beta}])^{-1/2}\frac{P^{\mu}P_{\nu}}{P^0}f_i(\vec{x},\vec{p},t) \tag{2.101}$$

其中 P_μ 由方程 (2.24) 定义, g_i 为种类 i 的自旋态的数目, $\det[g_{\mu\nu}]$ 是四维矩阵 $g_{\mu\nu}$ 的行列式. 消去共动动量化为通过下面定义的固有动量的大小

$$p^2 \equiv g^{ij}P_iP_j \tag{2.102}$$

和方向矢量. 注意当共动动量随着宇宙膨胀保持常数时, 其大小 p 以 $1/a$ 的形式下降. 证明方程 (2.101) 的时间–时间分量与方程 (2.59) 给出的能量密度表达式一致. 利用事实: 对于一个质量为 m 的粒子, 满足 $P^2 \equiv g_{\mu\nu}P^{\mu}P^{\nu} = -m^2$.

16. 对于平坦、物质为主的宇宙 (可以有分析解) 和平坦、$\Omega_\Lambda = 0.7, \Omega_m = 0.3$ 的宇宙 (需要数值估计一维 (1D) 积分) 分别画以红移为函数的 m-M 图. 忽略 K 改正, 并与图 1.7 进行比较.

17. 考虑在方程 (2.66) 中定义的熵密度 s. 对于一个无质量粒子, 在习题 14 中已证明 $\mathcal{P} = \rho/3$, 所以 $s = 4\rho/3T$. 对于处于化学势为零的平衡态的玻色子和费米子 (假定无质量), 将 s 表达成 T 的函数. 并证明平衡态 ($T \ll m; \mu = 0$) 大质量的粒子的熵密度是指数变小的.

18. 证明今天宇宙中一代中微子及其反中微子的数密度为

$$n_\nu = \frac{3}{11}n_\gamma = 112\mathrm{cm}^{-3}.$$

为了计算上式, 将需要计算光子数密度; 二者都可以表达为黎曼-zeta 方程的形式. 利用这个结果, 证明方程 (2.80).

19. 我们曾计算出所有三个中微子均是无质量情况下的物质–辐射密度相等时刻 a_{eq}. 假设两个中微子无质量, 第三个质量为 $m = 0.1\mathrm{eV}$, 在这种情况下 a_{eq} 等于多少?

第 3 章　超越平衡态

早期宇宙是高温致密的, 结果导致粒子之间发生的相互作用比现在要频繁很多. 例如, 现在的光子可以穿越可观测宇宙而不被俘获或发生传播方向上的偏转, 那么它的平均自由程大于 10^{28}cm. 然而当宇宙的年龄等于 1s 时, 光子的平均自由程大约为一个原子的尺度. 因此, 在宇宙膨胀到其 2 倍大的这段时间里, 一个给定的光子已经经过了很多次碰撞. 这些多重相互作用使得宇宙的组成部分在大多数情况下处于平衡态. 尽管如此, 仍存在一些时期相互作用没能足够快地进行以保持平衡条件. 这些时期—或许不是巧合—是如今的宇宙学家极度感兴趣的.

实际上, 在这一章我们将要看到非平衡现象在以下几个时期所起的作用:(i) 大爆炸核合成期间轻元素的形成; (ii) 当温度达到 1/4eV 数量级时, 电子和质子复合成中性氢; 以及极有可能的是 (iii) 早期宇宙暗物质的产生. 显而易见, 这三个时期中的任一个都是被不同团队反复研究的课题. 通常这三种研究都是单独平行进行的, 它们之间没有关联. 我认为重要的是理解这三种现象都是非平衡物理的结果, 它们都可以用相同的公式——玻尔兹曼方程来研究.3.1 节介绍了玻尔兹曼方程, 以及一些在这三个过程中常见的近似. 本章的剩下三节仅是对这个普遍公式的应用.

超越这三种非平衡现象内在重要性的是, 本章也作为一个桥梁连接了第 2 章介绍的平滑均匀宇宙和本书以后章节将要探讨的非均匀扰动. 思考这个过渡的一个方法是利用方程 (2.60) 和 (2.61) 中相空间的分布函数 f. 到目前为止, 我们已经假定化学势为 0, 温度均匀. 在本章中, 为了追踪与等离子体失去联系的粒子的丰度, 我们将不得不舍去微不足道的化学势. 在后续的章节中, 我们将转向均匀性以外的可能, 探讨依赖于位置和传播方向的温度.

3.1　湮灭过程的玻尔兹曼方程

玻尔兹曼方程阐述为, 一给定粒子的丰度的变化率是该粒子产生和湮灭的速率之差. 假定我们只关心粒子 1 的数密度 n_1. 为简单起见, 假设影响该粒子丰度的唯一过程是它与粒子 2 湮灭产生两种粒子, 粒子 3 和粒子 4. 示意性地表示为 $1+2 \leftrightarrow 3+4$, 即粒子 1 和 2 湮灭可以产生粒子 3 和 4, 或者其逆过程粒子 3 和 4 产生粒子 1 和 2. 在膨胀宇宙中这样一个系统的玻尔兹曼方程是

$$a^{-3}\frac{\mathrm{d}(n_1a^3)}{\mathrm{d}t}=\int\frac{\mathrm{d}^3p_1}{(2\pi)^32E_1}\int\frac{\mathrm{d}^3p_2}{(2\pi)^32E_2}\int\frac{\mathrm{d}^3p_3}{(2\pi)^32E_3}\int\frac{\mathrm{d}^3p_4}{(2\pi)^32E_4}$$

$$\times (2\pi)^4\delta^3(p_1+p_2-p_3-p_4)\delta(E_1+E_2-E_3-E_4)|\mathcal{M}|^2$$
$$\times \{f_3f_4[1\pm f_1][1\pm f_2]-f_1f_2[1\pm f_3][1\pm f_4]\}. \tag{3.1}$$

当相互作用不存在时, 方程 (3.1) 的左手边表明数密度与尺度因子的立方的乘积守恒. 这反映了膨胀宇宙的本质特性：当共动网格膨胀时, 包含了固定数目的粒子的区域的体积随 a^3 增长. 因此, 这些粒子的物理数密度随 a^{-3} 减少. 玻尔兹曼方程的右手边描述了粒子间的相互作用. 从最后一行开始往上考虑相互作用项. 暂不考虑最后一行的 $1\pm f$ 项, 我们看到产生粒子 1 的速率正比于粒子 3 和 4 的占用数 f_3 和 f_4. 类似地, 亏损项正比于 f_1f_2. $1\pm f$ 项表征了玻色加剧和泡利阻尼现象, 加号表示玻色子, 如光子；减号表示费米子, 如电子. 如果粒子 1 已经存在, 当它是玻色子的时候, 产生更多粒子 1 的反应更加有可能发生; 当它是费米子的时候, 这种反应发生的可能性较小. 虽然我们已经抑制了动量对 f 的依赖性, 但是所有的占用数仍然依赖于相应的动量 (例如, $f_1=f_1(p_1)$). 往上看, 方程 (3.1) 第二行的狄拉克 delta 函数使得能量和动量守恒; 2π 因子是离散的 Kronecker 函数转化到连续的狄拉克形式所产生的结果. 这里能量通过 $E=\sqrt{p^2+m^2}$ 和动量相联系. 第二行中的振幅 $\mathcal{M}$ 是由问题中的基本物理决定. 例如, 如果我们关注的是电子对光子的康普顿散射, 那么 $\mathcal{M}$ 正比于精细结构常数 α. 在几乎所有我们感兴趣的情况下, 这一振幅都是*可逆的*, 即对于 $1+2\to 3+4$ 和 $3+4\to 1+2$ 是相同的. 实际上, 可逆性已经在方程 (3.1) 中假设了.

方程 (3.1) 的最后两行依赖于所涉及的粒子的动量. 为了求得相互作用的总数, 我们必须对所有的动量进行求和. 第一行的积分明确地做到了这一点. 如图 2.4 所示, 因子 $(2\pi)^3$ [实际上是 $(2\pi\hbar)^3$] 代表相空间的单位体积; 我们想对其进行求和. 最后, 分母上的因子 $2E$ 出现是因为在相对论情况下相空间积分应该在四维空间, 即三维动量分量和一维能量上进行. 然而, 它们都被 $E^2=p^2+m^2$ 约束在三维球上. 用方程表示,

$$\int \mathrm{d}^3p\int_0^\infty \mathrm{d}E\delta(E^2-p^2-m^2)=\int \mathrm{d}^3p\int_0^\infty \mathrm{d}E\frac{\delta(E-\sqrt{p^2+m^2})}{2E}. \tag{3.2}$$

利用 delta 函数对 E 求积分就产生因子 $2E$.

方程 (3.1) 是相空间分布的积分微分方程. 进一步, 至少在原理上, 这一方程必须被其他种类的粒子的相似方程来补充. 实际上, 这些难以克服的障碍能够在许多实际的宇宙学应用中得到解决. 首先, 最重要的认识是散射过程显著地使得*动态平衡*. 也就是说, 散射发生的如此快以至于不同种类的粒子的分布都服从普通的玻色–爱因斯坦或者费米–狄拉克形式 [方程 (2.61) 和 (2.60)]. 这一公式将所有的分布不确定性都凝聚到一个单一的时间函数 μ 里. 如果湮灭也处于平衡, 那么 μ 就是

化学势, 并且任何反应中化学势的总和都必须平衡. 例如, 反应 $e^+ + e^- \leftrightarrow \gamma + \gamma$ 将导致 $\mu_{e^+} + \mu_{e^-} = 2\mu_\gamma$. 在非平衡情况下, 系统不处于化学平衡, 我们将不得不解关于 μ 的微分方程. 不过运动平衡最重要的简化特征是这个微分方程变为一个单一的常微分方程, 与方程 (3.1) 复杂的形式形成了对比.

我们将特别关注温度低于 $E - \mu$ 的系统. 在这一极限下, 玻色–爱因斯坦或费米–狄拉克分布中的指数项将很大, 使得分母中的 ± 1 可以忽略. 因此, 另外一种简化为, 我们可以忽略量子统计的复杂性. 这种分布变为

$$f(E) \to e^{\mu/T} e^{-E/T} \tag{3.3}$$

玻尔兹曼方程中的泡利阻尼因子和玻色加剧因子都可以被忽略.

在这些近似下, 方程 (3.1) 的最后一行变为

$$\begin{aligned} & f_3 f_4 [1 \pm f_1][1 \pm f_2] - f_1 f_2 [1 \pm f_3][1 \pm f_4] \\ & \to e^{-(E_1+E_2)/T} \{ e^{(\mu_3+\mu_4)/T} - e^{(\mu_1+\mu_2)/T} \}. \end{aligned} \tag{3.4}$$

这里用到了能量守恒条件 $E_1 + E_2 = E_3 + E_4$. 我们将利用数密度本身是时间依赖函数代替 μ 来进行求解.

第 i 类粒子的数密度是通过下式与 μ_i 联系起来的

$$n_i = g_i e^{\mu_i/T} \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} e^{-E_i/T} \tag{3.5}$$

其中 g_i 是第 i 种粒子的简并度, 例如, 对于光子而言，它存在两个自旋态，因此 $g_i = 2$. 定义依赖于种类的平衡数密度也是很有用的

$$n_i^{(0)} \equiv g_i \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} e^{-E_i/T} = \begin{cases} g_i \left(\dfrac{m_i T}{2\pi} \right)^{3/2} e^{-m_i/T} & m_i \gg T \\ \\ g_i \dfrac{T^3}{\pi^2} & m_i \ll T \end{cases} . \tag{3.6}$$

利用这一定义, $e^{\mu_i/T}$ 可以改写为 $n_i/n_i^{(0)}$, 因此, 方程 (3.1) 的最后一行等于

$$e^{-(E_1+E_2)/T} \left\{ \frac{n_3 n_4}{n_3^{(0)} n_4^{(0)}} - \frac{n_1 n_2}{n_1^{(0)} n_2^{(0)}} \right\}. \tag{3.7}$$

利用这些近似，玻尔兹曼方程可以得到很大程度上的简化. 定义热平均截面为

$$\langle \sigma v \rangle \equiv \frac{1}{n_1^{(0)} n_2^{(0)}} \int \frac{\mathrm{d}^3 p_1}{(2\pi)^3 2E_1} \int \frac{\mathrm{d}^3 p_2}{(2\pi)^3 2E_2} \int \frac{\mathrm{d}^3 p_3}{(2\pi)^3 2E_3} \int \frac{\mathrm{d}^3 p_4}{(2\pi)^3 2E_4} \mathrm{e}^{-(E_1+E_2)/T}$$
$$\times (2\pi)^4 \delta^3(p_1 + p_2 - p_3 - p_4) \delta(E_1 + E_2 - E_3 - E_4) |\mathcal{M}|^2. \tag{3.8}$$

那么, 玻尔兹曼方程化为

$$a^{-3} \frac{\mathrm{d}(n_1 a^3)}{\mathrm{d}t} = n_1^{(0)} n_2^{(0)} \langle \sigma v \rangle \left\{ \frac{n_3 n_4}{n_3^{(0)} n_4^{(0)}} - \frac{n_1 n_2}{n_1^{(0)} n_2^{(0)}} \right\}. \tag{3.9}$$

因此我们得到了一个简单的数密度常微分方程. 虽然其细节随不同的情况而变化 (见表 3.1), 但是在本章剩余的部分我们将从这个方程开始追踪粒子的丰度.

表 3.1 本章中的粒子反应: $\mathbf{1 + 2 \leftrightarrow 3 + 4}$

	1	2	3	4
中子–质子比率	n	ν_e or e^+	p	e^- or $\bar{\nu}_e$
再复合	e	p	H	γ
暗物质产生	X	X	l	l

关于方程 (3.9) 的一个定性的说明是, 左边的量级为 n_1/t, 或者由于典型的宇宙学时间是 H^{-1}, 那么左边的量级为 $n_1 H$; 右边的量级是 $n_1 n_2 \langle \sigma v \rangle$. 因此, 如果反应速率 $n_2 \langle \sigma v \rangle$ 远大于膨胀速率, 那么右端项将远大于左端的项. 维持左右两边相等的唯一方法是右边的项相抵消. 这样, 当反应速率很大时,

$$\frac{n_3 n_4}{n_3^{(0)} n_4^{(0)}} = \frac{n_1 n_2}{n_1^{(0)} n_2^{(0)}}. \tag{3.10}$$

细看, 该方程实际上是由玻尔兹曼方程得来, 只是在不同的场合有不同的称呼. 在粒子物理界里, 首先研究早期宇宙中大量残留物的产生, 倾向于称为*化学平衡*. 在大爆炸核合成背景下, 它被称为*核统计平衡*, 而研究电子和质子再结合形成中性氢的复合时期的学者用术语*萨哈方程*.

3.2 大爆炸核合成

当宇宙的温度冷却到 1Mev 时, 宇宙等离子体由以下几种成分组成.

- *平衡态下的相对论性粒子: 光子, 电子和正电子*.它们通过电磁相互作用, 如 $e^+e^- \leftrightarrow \gamma\gamma$, 彼此紧密地联系. 除了由于费米和玻色统计导致的一点小差别之外, 它们都有着相同的丰度.
- *退耦的相对论性粒子: 中微子*.当温度略高于 1Mev 时, 保持中微子与剩余的等离子体耦合的反应速率, 如 $\nu e \leftrightarrow \nu e$, 下降到膨胀速率以下. 因此中微

子和其他相对论性粒子有着共同的温度, 并且大致上也有着相同的丰度, 但是没有和它们耦合在一起.

- **非相对论性粒子: 重子.** 如果重子和反重子最初的数量没有不对称性, 那么它们都将被 1MeV 的能量完全耗尽. 但是这种不对称性确实存在: 最初 $(n_b - n_{\bar{b}})/s \sim 10^{-10}$,① 并且这个比值在整个膨胀过程中保持为常数. 当温度的数量级达到 1MeV 的时候, 所有的反重子都湮灭掉了 (练习 12), 所以

$$\eta_b \equiv \frac{n_b}{n_\gamma} = 5.5 \times 10^{-10} \left(\frac{\Omega_b h^2}{0.020} \right). \tag{3.11}$$

因此当温度 $T \sim$ MeV 时, 重子比相对论性粒子要少很多.

本节我们的任务是确定重子如何结束其核合成过程. 系统自始至终是否保持平衡, 终态将仅由动能来确定, 并且所有的重子将弛豫至单位重子能量最小的核状态, 铁 (图 3.1). 然而, 当温度下降时, 速率正比于密度的二次方或更高次方的核反应进行得太慢, 以致不能保持系统平衡. 因此, 在原则上, 我们需要求解适合于所有原子核的方程 (3.9) 的等价式, 即耦合微分方程组. 实际上, 至少可以定性地理解这一结果, 我们可以利用两个简化排除求解全部微分方程组的必要性.

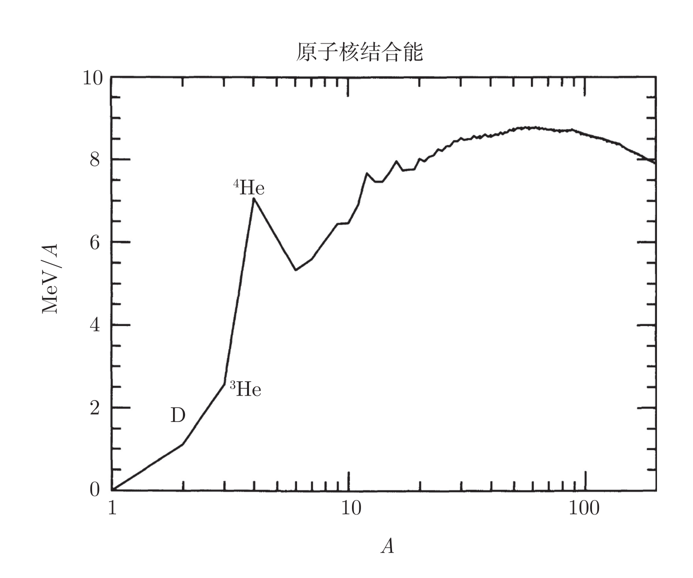


图 3.1　以质量数为函数的原子核结合能. 铁的结合能最高, 但是在轻元素中,^{4}He 有至关重要的局部最大结合能. 早期宇宙核合成基本停止在 ^{4}He 是因为在 $A = 5 \sim 8$ 缺少这种紧紧地被约束的同位素. 在恒星的高密度环境中, 三个 ^{4}He 原子核熔合形成 ^{12}C, 但是在早期宇宙低重子数妨碍了这一进程

① s 是第 2 章中我们见到的熵密度, 正比于 a^{-3}.

核物理简介

一个质子就是一个氢原子核, 称为 ^{1}H 或简称 p; 一个质子和一个中子组成氘, ^{2}H 或 D; 一个质子和两个中子组成氚, ^{3}H 或 T. 有两个质子的原子核是氦; 它们可以有一个中子 (^{3}He) 或两个中子 (^{4}He). 因此一种元素有一个固定的质子数, 它的同位素拥有不同的中子数. 原子核中的中子数和质子数的总和称为原子数, 就是元素名称前面的上标.

拥有 Z 个质子和 $A-Z$ 个中子的原子核总质量与单独的质子与中子质量之和略有不同. 这种差别称为结合能, 定义为

$$B \equiv Zm_{\rm p} + (A-Z)m_{\rm n} - m \tag{3.12}$$

其中 m 是原子核的质量. 例如, 氘核的质量是 1875.62MeV, 而中子和质子的质量总和是 1877.84MeV, 因此氘核的结合能是 2.22MeV. 典型的原子结合能在 MeV 量级, 正好解释为什么大爆炸核合成发生在温度稍微低于 1MeV, 即使原子的质量在 GeV 范围内.

中子和质子能够通过弱相互作用互相转化：

$$\rm p + \bar{\nu} \leftrightarrow n + e^+; \quad p + e^- \leftrightarrow n + \nu; \quad n \leftrightarrow p + e^- + \bar{\nu} \tag{3.13}$$

其中, 所有反应可以朝任意方向进行. 轻元素是通过电磁相互作用得到的. 例如, 氘的形成是通过 $\rm p+n \to D+\gamma$. 然后, $\rm D+D \to n+{}^3He$, 最后, $\rm {}^3He+D \to p+{}^4He$ 产生 ^{4}He.

第一个简化是基本上在可观测水平上没有元素比氦更重. ① 因此唯一需要被追踪的是氢和氦, 以及它们的同位素：氘, 氚, ^{3}He. 第二个简化是, 即使在这种减少了元素种类的背景下, 物理过程因为温度在约为 0.1MeV 之上而被清晰地分为两部分, 也不会有轻核形成：只有自由质子和中子存在才行. 因此我们首先解决中子–质子比, 然后把这一丰度作为氦和其同位素如氘的合成需要的初始值.

这两种简化—没有重元素和 n/p 仅在 0.01MeV 以上—依赖于在与原子核的结合能可比拟的高温下, 反应中任何时候产生的原子核都会被高能光子破坏的物理事实. 这一事实反映在基本平衡方程 (3.10) 中. 为了理解原因, 考虑把方程应用到氘的产生上, $\rm n+p \leftrightarrow D+\gamma$. 由于光子满足 $n_\gamma = n_\gamma^{(0)}$, 平衡条件变为

$$\frac{n_{\rm D}}{n_{\rm n} n_{\rm p}} = \frac{n_{\rm D}^{(0)}}{n_{\rm n}^{(0)} n_{\rm p}^{(0)}}. \tag{3.14}$$

① 锂元素是个例外, 它产生于 $10^9 \sim 10^{10}$, 这种微量元素丰度今天可被观测到. 参见文献 (Pinsonneault et al., 2001).

由方程 (3.6) 右端的积分形式得到,

$$\frac{n_{\rm D}}{n_{\rm n}n_{\rm p}}=\frac{3}{4}\left(\frac{2\pi m_{\rm D}}{m_{\rm n}m_{\rm p}T}\right)^{3/2}{\rm e}^{[m_{\rm n}+m_{\rm p}-m_{\rm D}]/T},\tag{3.15}$$

因子 3/4 是由自旋态数产生 (D 自旋态数是 3, p 和 n 的都是 1/2). 前面的因子 $m_{\rm D}$ 可以看成 $2m_{\rm n}$ 也等于 $2m_{\rm p}$, 但在指数中 $m_{\rm n}+m_{\rm p}$ 与 $m_{\rm D}$ 之间的小差别还是很重要的: 实际上所讨论的指数是通过它等于氘的结合能 $B_{\rm D}=2.22{\rm MeV}$ 来定义的. 因此, 只要平衡条件成立,

$$\frac{n_{\rm D}}{n_{\rm n}n_{\rm p}}=\frac{3}{4}\left(\frac{4\pi}{m_{\rm p}T}\right)^{3/2}{\rm e}^{B_{\rm D}}/T,\tag{3.16}$$

中子和质子的密度都正比于重子密度, 因此大体上来说,

$$\frac{n_{\rm D}}{n_{\rm b}}\sim\eta_b\left(\frac{T}{m_{\rm p}}\right)^{3/2}{\rm e}^{B_{\rm D}}/T.\tag{3.17}$$

只要 $B_{\rm D}/T$ 不太大, 前面的因子在式子中就占主导. 由于方程 (3.11) 中的重子–光子比很小, 该因子也非常得小.

因此小的重子–光子比抑制着原子核的产生, 一直到温度完全降到结合能以下. 然而实际上, 当温度在 0.1MeV 以上时, 所有的重子都是以中子和质子形式存在的. 大约在这个时候, 氘和氦产生了, 但是到目前为止反应速率太低还不能产生任何重元素. 通过图 3.1 也能得到这一结论. 质量数是 5 的稳定同位素的缺失暗示了更重的元素不能由 $^4{\rm He}+{\rm p}\to X$ 产生. 恒星内部通过三阿尔法过程 $^4{\rm He}+^4{\rm He}+^4{\rm He}\to^{12}{\rm C}$ 产生更重的元素, 但是在早期宇宙, 密度太低而不允许三个原子核在相关的时间尺度上互相作用.

3.2.1　中子丰度

我们以解决中子–质子比来开始本节. 通过 ${\rm p}+{\rm e}^-\to{\rm n}+\nu_{\rm e}$ 等弱相互作用, 质子可以转化为中子. 我们也将看到这类反应保持着中子和质子平衡直到温度在 MeV 量级. 此后, 为了追踪中子的丰度我们必须求解速率方程 (3.9).

从方程 (3.6) 得到, 质子–中子平衡比在非相对论极限 ($E=m+p^2/2m$) 下是

$$\frac{n_{\rm p}^{(0)}}{n_{\rm n}^{(0)}}=\frac{{\rm e}^{-m_{\rm p}/T}\displaystyle\int{\rm d}p\ p^2{\rm e}^{-p^2/2m_{\rm p}T}}{{\rm e}^{-m_{\rm n}/T}\displaystyle\int{\rm d}p\ p^2{\rm e}^{-p^2/2m_{\rm n}T}},\tag{3.18}$$

式中的积分正比于 $m^{3/2}$, 但是 $(m_{\rm p}/m_{\rm n})^{3/2}$ 的比值接近于 1, 因此我们可以忽略它们质量的差别. 然而, 指数中的质量差别是非常重要的, 最后得到

$$\frac{n_{\rm p}^{(0)}}{n_{\rm n}^{(0)}}={\rm e}^{Q/T}\tag{3.19}$$

其中, $\mathcal{Q} \equiv m_{\rm n} - m_{\rm p} = 1.293\text{MeV}$. 因此在高温时, 中子和质子一样多. 当温度降到 1MeV 以下时, 中子的丰度下降. 如果弱相互作用足够有效地无限保持平衡, 中子的丰度将降为 0.

本节的主要任务是找出在弱相互作用不那么有效的真实世界里发生了什么.

我们可以方便地定义

$$X_{\rm n} \equiv \frac{n_{\rm n}}{n_{\rm n} + n_{\rm p}}, \tag{3.20}$$

即 $X_{\rm n}$ 是中子和总原子核的数密度比. 在平衡态时,

$$X_{\rm n} \to X_{\rm n,EQ} \equiv \frac{1}{1 + (n_{\rm p}^{(0)}/n_{\rm n}^{(0)})}. \tag{3.21}$$

为了寻求 $X_{\rm n}$ 的演化, 从方程 (3.9) 着手, 其中在完全平衡态 (即 $n_l = n_l^{(0)}$), 1 代表中子, 3 代表质子, 2 和 4 代表轻子. 然后可得,

$$a^{-3} \frac{\mathrm{d}(n_{\rm n} a^3)}{\mathrm{d}t} = n_l^{(0)} \langle \sigma v \rangle \left\{ \frac{n_{\rm p} n_{\rm n}^{(0)}}{n_{\rm p}^{(0)}} - n_{\rm n} \right\}. \tag{3.22}$$

我们已经确定比值 $n_{\rm n}^{(0)}/n_{\rm p}^{(0)} = \mathrm{e}^{-\mathcal{Q}/T}$, 并且可以把 $n_l^{(0)}\langle \sigma v \rangle$ 看成中子转化为质子的速率 $\lambda_{\rm np}$, 在它乘以损失项里的 $n_{\rm n}$ 以后. 同样如果我们把左边的 $n_{\rm n}$ 重写为 $(n_{\rm n} + n_{\rm p})X_{\rm n}$, 总密度乘以 a^3 可以移到微分的外面, 使得

$$\frac{\mathrm{d}X_{\rm n}}{\mathrm{d}t} = \lambda_{\rm np} \left\{ (1 - X_{\rm n})\mathrm{e}^{-\mathcal{Q}/T} - X_{\rm n} \right\}. \tag{3.23}$$

方程 (3.23) 是时间的函数 $X_{\rm n}$ 的微分方程, 但是它含有温度 T 和反应速率 $\lambda_{\rm n} p$, 二者都对时间有复杂的依赖性. 因此最简单的是利用演化变量重写方程

$$x \equiv \frac{\mathcal{Q}}{T}. \tag{3.24}$$

继而, 方程 (3.23) 的左边变为 $\dot{x}\mathrm{d}X_n/\mathrm{d}x$, 则我们需要 $\mathrm{d}x/\mathrm{d}t = -x\dot{T}/T$. 由于 $T \propto a^{-1}$, 可得

$$\frac{1}{T}\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}t} = -H = -\sqrt{\frac{8\pi G\rho}{3}}, \tag{3.25}$$

第二个等式由方程 (2.39) 得到. 核合成发生在辐射占主导时期, 所以对能量密度 ρ 的主要贡献来自相对论性粒子. 重温第 2 章相对论性粒子对能量密度的贡献,

$$\begin{aligned} \rho &= \frac{\pi^2}{30} T^4 \left[\sum_{i=\text{玻色子}} g_i + \frac{7}{8} \sum_{i=\text{费米子}} g_i \right] \quad (i\ \text{是相对论性粒子种类}) \\ &\equiv g_* \frac{\pi^2}{30} T^4. \end{aligned} \tag{3.26}$$

相对论性粒子的有效自由度 g_* 是温度的函数. 当温度达到 1MeV 的量级时, 有贡献的粒子是：光子 ($g_\gamma = 2$), 中微子 ($g_\nu = 6$), 电子和正电子 ($g_{e^+} = g_{e^-} = 2$). 加起来是, $g_* \simeq 10.75$, 在我们感兴趣的范围内大约是个常数. 方程 (3.23) 变为

$$\frac{\mathrm{d}X_{\mathrm{n}}}{\mathrm{d}x} = \frac{x\lambda_{\mathrm{np}}}{H(x=1)}\{\mathrm{e}^{-x} - X_{\mathrm{n}}(1+\mathrm{e}^{-x})\} \tag{3.27}$$

其中,

$$H(x=1) = \sqrt{\frac{4\pi^3 G\mathcal{Q}^4}{45}} \times \sqrt{10.75} = 1.13\mathrm{sec}^{-1}. \tag{3.28}$$

最后, 我们需要知道中子–质子的转化速率 λ_{np}. 在这些近似下, 转化速率为 (Bernstein, 1998 或练习 3)

$$\lambda_{\mathrm{np}} = \frac{255}{\tau_{\mathrm{n}} x^5}(12 + 6x + x^2), \tag{3.29}$$

其中, 中子寿命 $\tau_n = 886.7$ s. 因此, 当温度 $T = \mathcal{Q}$ (即当 $x = 1$) 时, 转化速率是 5.5 s^{-1}, 比膨胀速率大一点. 然而当温度降到 1MeV 以下时, 转化速率迅速下降低于膨胀速率, 因此转化变得不那么频繁了.

如今我们可以数值积分方程 (3.27) 追踪中子的丰度 (练习 4). 图 3.2 为我们展示了积分的结果. 注意到在温度高于 0.1MeV 时, 积分结果和精确解符合得非常好. 精确解是由适当的统计, 非零电子质量和变化的自由度 g_* 得到的. 实际上一旦温度降到低于 1MeV, 中子比例 X_{n} 就退出平衡. 温度降到低于 0.5MeV, 中子比例就减少了 0.15.

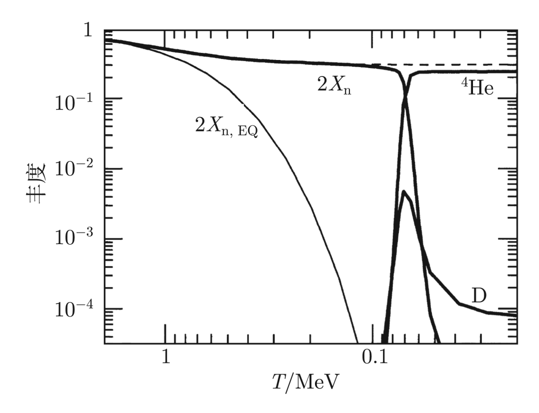


图 3.2　早期宇宙轻元素丰度的演化. 粗实线由 Wagoner (1973) 得到; 虚线由方程 (3.27) 整理得到; 细实线代表中子平衡丰度的 2 倍. 注意到方程 (3.27) 和精确解符合得很好, 直到中子衰变开始. 同样注意到中子丰度退出平衡态在 $T \sim$ MeV 时

当温度低于 0.1MeV 时, 我们还没有介绍的两个反应变得很重要：中子衰变 ($\mathrm{n} \rightarrow \mathrm{p} + \mathrm{e}^- + \bar{\nu}$) 和氘核的产生 ($\mathrm{n} + \mathrm{p} \rightarrow \mathrm{D} + \gamma$). 衰变产生的因子 e^{-t/τ_n} 将会对

图 3.2 中的结果产生微小的影响. 当衰变变得重要时, 电子和正电子也已经淹没了, 因此方程 (3.26) 中的 g_* 是 3.36, 时间–温度关系是 (练习 5)

$$t = 132\,\mathrm{sec}\left(\frac{0.1\mathrm{MeV}}{T}\right)^2. \tag{3.30}$$

我们不久就会看到氘核和其他轻元素的产生严格开始于温度 0.07MeV 时. 然后, 衰变以因子 $\exp[-(132/886.7)(0.1/0.07)^2] = 0.74$ 的比例耗尽中子. 中子丰度在核合成开始时是 0.15×0.74, 或

$$X_{\mathrm{n}}(T_{\mathrm{nuc}}) = 0.11. \tag{3.31}$$

现在我们转向轻元素的形成来理解这一数值的意义.

3.2.2 轻元素的丰度

近似轻元素的形成的一个有效方法是在温度 T_{nuc} 时它瞬间发生, 此时热力学弥补了微小的重子–光子比. 以氘核的产生为例, 按照 (3.17) 式. 当 (3.17) 式量级为 1 时, 平衡态的氘核丰度和重子丰度量级一样 (即如果宇宙保持平衡态, 所有的中子和质子将形成氘核), 也即

$$\ln(\eta_b) + \frac{3}{2}\ln(T_{\mathrm{nuc}}/m_{\mathrm{p}}) \sim -\frac{B_{\mathrm{D}}}{T_{\mathrm{nuc}}}. \tag{3.32}$$

(3.32) 式暗示了氘核的产生发生在温度 $T_{\mathrm{nuc}} \sim 0.07\mathrm{MeV}$ 时, 对 η_b 有着弱的对数依赖性.

由于氦核的结合能比氘核的大, 指数因子 $\mathrm{e}^{B/T}$ 在氦核上比氘核符合得更好. 实际上, 图 3.2 揭示了几乎在氘核产生后氦核即刻就产生了. 事实上, 在温度大约到 T_{nuc} 时, 所有余下的中子都转化为 $^4\mathrm{He}$. 由于两个中子进到 $^4\mathrm{He}$ 中, 最终在温度 T_{nuc} 时 $^4\mathrm{He}$ 丰度等于中子丰度的一半. 通常, 根据质量比例引入一些结果,

$$X_4 \equiv \frac{4n_{^4\mathrm{He}}}{n_b} = 2X_{\mathrm{n}}(T_{\mathrm{nuc}}). \tag{3.33}$$

图 3.2 表明这一关系成立. 实际上, 为了寻求到氦的质量比例, 我们仅需要采用 (3.31) 式中中子在温度 T_{nuc} 时的质量比例, 乘以 2, 最终氦的质量分数是 0.22. 通过求解单一的微分方程得到的这种粗糙的估计和精确解吻合得非常好. 精确解可以通过

$$Y_{\mathrm{p}} = 0.2262 + 0.0135\ln(\eta_b/10^{-10}). \tag{3.34}$$

拟合得到 (Olive,2000; Kolb and Turner,1990).

这个结果一个很重要的特征是它仅对重子比例有对数依赖性. 我们看 (3.32) 式中 T_{nuc} 也有这种依赖性. 你可能认为在衰变部分这种对 T_{nuc} 的指数敏感性将转

变为线性依赖. 但是,$T_{\rm nuc}$ 达到得足够早, 以至于只有一小部分中子衰变: 指数此时在这个范围内是线性的. 所以, 最终的氦丰度仅对数地依赖于重子密度.

这一预言和观测符合得很好, 正如图 3.3 所示. 关于原初氦丰度最好的迹象来自最原始的系统, 典型地被低金属性验证. 如图 3.3 所示, 原初丰度几乎确定在 0.22 和 0.25 之间. 虽然在过去也有不符合的声音, 但是这种吻合仍然是观测宇宙学中的一大支柱.

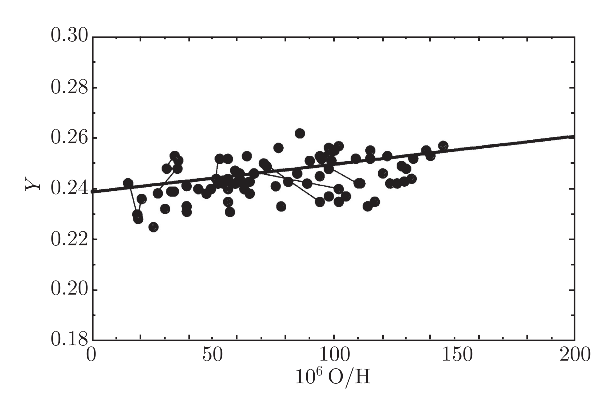


图 3.3 氦丰度 ($Y \equiv Y_{\rm p}$) 作为 O/H 比的函数. 越低的氧系统经历的反应越少, 则氦丰度在这些系统中趋近于原初丰度. 曲线 $Y_{\rm p} = 0.238$ 及其推导来自文献 (Olive, 2000). 数据点分别来自文献 (Pagel et al., 1992; Skillman and Kennicutt, 1933; Skillman et al., 1994; Izotov and Thuan, 1998). 连接相同区域的短线由不同的团队观测

图 3.2 表明不是所有的氘转化为氦. 追踪的数量中仍有一部分未燃烧, 只是因为转化反应 $\rm D{+}p \to {}^3\,He + \gamma$ 不那么完全有效. 图 3.2 揭示在温度 $T_{\rm nuc}$ 后, 通过这些反应氘核被耗尽, 最终在量级为 $10^{-5} \sim 10^{-4}$ 的水平时退出反应. 如果重子密度低, 反应就进行得比较慢, 消耗就不那么有效. 所以, 低的重子密度不可避免地导致更多的氘核; 正如图 1.8 所示, 其灵敏度是非常高的. 结果, 氘核是探测重子密度的一个有力工具. 补充一点, 这个灵敏度使得通过寻求遥远类星体的光谱吸收线来探测红移为 3 的气体云里的氘核成为可能. 例如, O′Meara 等 2001 年组合了 4 个系统中的原初氘核探测, 得到 $D/H = 3.0 \pm 0.4 \times 10^{-5}$, 对应的是 $\Omega_b h^2 = 0.0205 \pm 0.0018$.

3.3 再 复 合

当温度降到 1eV 时, 光子仍然和电子通过康普顿散射紧密地耦合, 电子和质子通过库仑散射耦合. 将会很自然地看到在这些温度下, 有非常少的中性氢. 热力学支持中性氢以结合能 $\epsilon_0 = 13.6$eV 产生, 但是高的光子–重子比确保任何氢原子产生的同时也被电离了. 这种现象和我们以上所看到的轻原子核的延迟产生是相同

的, 是在原子尺度上的重演.

只要反应[①] $e^-+p \leftrightarrow H+\gamma$ 保持平衡, 方程 (3.10) 中的条件 $(1=e, 2=p, 3=H)$, 确保

$$\frac{n_e n_p}{n_H} = \frac{n_e^{(0)} n_p^{(0)}}{n_H^{(0)}}. \tag{3.35}$$

由宇宙的电中性可以进一步得到 $n_e = n_p$. 定义自由电子比例

$$X_e \equiv \frac{n_e}{n_e + n_H} = \frac{n_p}{n_p + n_H}, \tag{3.36}$$

其中, 分母等于氢原子核的总数. 对方程 (3.35) 右端积分, 得到

$$\frac{X_e^2}{1-X_e} = \frac{1}{n_e + n_H}\left[\left(\frac{m_e T}{2\pi}\right)^{3/2} e^{-[m_e+m_p-m_H]/T}\right] \tag{3.37}$$

其中, 忽略了 H 和前置因子中 p 之间的微小质量差别, 作了熟悉的近似. 所讨论的指数是 $-\epsilon_0/T$. 忽略相对小数目的氦原子, 分母 n_e+n_H(或 n_p+n_H) 等于重子数密度 $\eta_b n_\gamma \sim 10^{-9}T^3$. 因此当温度的量级是 ϵ_0 时, 右边的量级是 $10^9(m_e/T)^{3/2} \simeq 10^{15}$. 在那种情况下, 只有左端的分母非常小, 方程 (3.37) 才满足, 也就是说如果 X_e 非常接近于 1, 所有的氢原子都被电离. 也只有当温度降到远远低于 ϵ_0 时, 明显的再复合才发生. 随着 X_e 的降低, 再复合的速率也降低, 以至于很难保持平衡态. 因此, 为了准确地理解自由电子比例, 我们需要求解玻尔兹曼方程, 正如在理解中子–质子比时所作的.

这样, 适用于电子密度的方程 (3.9) 变为

$$\begin{aligned} a^{-3}\frac{\mathrm{d}(n_e)a^3}{\mathrm{d}t} &= n_e^{(0)} n_p^{(0)} \langle\sigma v\rangle \left\{\frac{n_H}{n_H^{(0)}} - \frac{n_e^2}{n_e^{(0)} n_p^{(0)}}\right\} \\ &= n_b\langle\sigma v\rangle\left\{(1-X_e)\left(\frac{m_e T}{2\pi}\right)^{3/2} e^{-\varepsilon_0/T} - X_0^2 n_b\right\} \end{aligned} \tag{3.38}$$

其中, 最后一行成立是因为比值 $n_e^{(0)} n_p^{(0)}/n_H^{(0)}$ 等于方程 (3.37) 中方括号里面的项. 同时, 由于 $n_b a^3$ 是常数, 在把 n_e 表示为 $n_b X_e$ 之后, 它可以移到微分的左边, 则

$$\frac{\mathrm{d}X_e}{\mathrm{d}t} = \{(1-X_e)\beta - X_e^2 n_b \alpha^{(0)}\} \tag{3.39}$$

其中, 电离率可以定义为

$$\beta \equiv \langle\sigma v\rangle\left(\frac{m_e T}{2\pi}\right)^{3/2} e^{-\varepsilon_0/T} \tag{3.40}$$

①在此 p 代表自由质子, H 代表中性氢, 即由一个质子和一个电子组成的.

再复合率定义为

$$\alpha^{(2)} \equiv \langle \sigma v \rangle. \tag{3.41}$$

再复合率的上标 "(2)" 是由于基态 $(n = 1)$ 与再复合无关. 基态再复合导致电离光子的产生, 这种光子立即使中性原子电离. 这种再复合的净效应为零: 没有新的中性原子按这种方式产生. 再复合进行下去的唯一途径是俘获激发态的中性氢; 作个较好的近似, 再复合速率为

$$\alpha^{(2)} = 9.78 \frac{\alpha^2}{m_e^3} \left(\frac{\varepsilon_0}{T} \right)^{1/2} \ln \left(\frac{\varepsilon_0}{T} \right). \tag{3.42}$$

方程 (3.37) 的萨哈近似, 确实很好地预测了再复合的红移, 但是当电子比例下降, 系统退出平衡态, 它就不那么有效了. 因此, X_e 的细节演化必须通过对方程 (3.39) 数值积分 (练习 8) 得到. 积分结果显示在图 3.4 中.

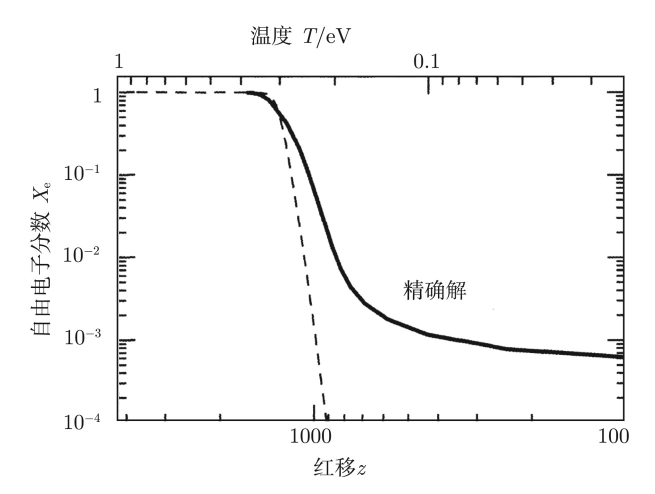


图 3.4 自由电子分数和红移的函数关系. 再复合突然发生在 $z \sim 1000$ 处, 对应 $T \sim 1/4\text{eV}$. 方程 (3.37), 即萨哈近似在平衡态成立, 并正确识别了再复合的红移, 但是没有告诉我们X_e 的细节演化. 在此取 $\Omega_b = 0.06$, $\Omega_m = 1$, $h = 0.5$

中子–质子比的计算如今影响着轻元素的丰度. 类似地, 自由电子丰度的演化对观测宇宙也有额外的影响. 在红移 1000 的再复合直接依赖于光子从物质中退耦.① 反过来, 退耦直接影响着我们今天所观测到的微波背景辐射 (CMB) 的各向异性特征.

① 注意到图 1.4, 尽管在 $z \sim 1000$ 处, 光子停止散射电子, 但是电子确实散射光子很多次, 直到很久以后. 这并不矛盾: 光子比重子更多. 不管怎样, 许多宇宙学家避开用退耦这个词,来描述 $z \sim 1000$ 时所发生的, 正是出于这个原因.

退耦大致发生在光子和电子康普顿散射的速率小于膨胀速率时.① 散射速率是

$$n_e\sigma_T = X_e n_b \sigma_T \tag{3.43}$$

其中, $\sigma_T = 0.665 \times 10^{-24}\text{cm}^2$ 是汤姆孙 (Thomson) 散射截面. 在此继续忽略氦. 因此可以假设氢原子核的总数目 (自由质子 + 氢原子) 等于总的重子数. 因为重子密度–临界密度比是 $m_p n_b/\rho_c r = \Omega_b a^{-3}$, 方程 (3.43) 中的 n_b 可以忽略, 对 Ω_b 也是有利的:

$$b_e\sigma_T = 7.477 \times 10^{-30}\text{cm}^{-1} X_e \Omega_b h^2 a^{-3}. \tag{3.44}$$

同除以膨胀速率得到

$$\frac{n_e\sigma_T}{H} = 0.0692a^{-3}X_e\Omega_b h\frac{H_0}{H}. \tag{3.45}$$

右边的比值取决于方程 (1.2) 给出的哈勃速率. 从那个方程或图 1.3, 我们看到在早些时候, 主要的贡献来自物质或辐射, 因此 $H/H_0 = \Omega_m^1/2a^{-3/2}[1 + a_{eq}/a]^{1/2}$.

然后

$$\frac{n_e\sigma_T}{H} = 113X_e\left(\frac{\Omega_b h^2}{0.02}\right)\left(\frac{0.15}{\Omega_m h^2}\right)^{1/2}\left(\frac{1+z}{1000}\right)^{3/2}\left[1 + \frac{1+z}{3600}\frac{0.15}{\Omega_m h^2}\right]^{-1/2}. \tag{3.46}$$

在此归一化重子和物质密度的最佳拟合值. 当自由电子比例 X_e 降到 10^{-2} 以下, 光子退耦. 从图 3.4 可以看到 X_e 从单位 1 到 10^{-3} 下降得非常快. 所以退耦发生在再复合时期.

让我们忘记我们刚才所有了解的, 然后询问如果宇宙在它整个历史时期都保持电离会发生怎样的情况. 在那样的假设下,$X_e = 1$, 方程 (3.46) 可以简单地求解, 并得到退耦发生时的红移. 设方程右端为 1, 得到

$$1 + z_{\text{decouple}} = 43\left(\frac{0.02}{\Omega_b h^2}\right)^{2/3}\left(\frac{\Omega_m h^2}{0.15}\right)^{1/3} \quad \text{(no recombination)}. \tag{3.47}$$

方程 (3.47) 告诉我们即使电子在宇宙的整个历史中保持电离, 最终光子退耦, 主要是因为膨胀使得光子比较难找到渐渐稀疏的电子. 理论上, 我们不希望电子一直保持电离态, 因此这种计算将出现不切实际的情况. 但是, 方程 (3.47) 是相关的比较广泛的原因. 我们确实希望在晚点的时候, 电子是电离的. 我们希望这样是因为我们观测到的宇宙退到红移 6 出现了电离. 如果宇宙再电离出现在非常晚些的时候, 比方程 (3.47) 中的 z_{decouple} 晚许多, 那么 CMB 各向异性特征将不会出现巨大的变化. 然而, 如果宇宙再电离比这个红移早些, 光子的多重散射将戏剧性地改变红移

① 在第 8 章将对退耦定义一个更精确的测量, 利用能见度函数, 即光子在给定红移最后散射的可能性. 利用能见度函数我们将显示一个 CMB 光子今天最后一次散射最可能在比 $n_e\sigma_T = H$ 标准简单推导的红移高一点的地方.

1000 时建立的原初各向异性特征. 最遥远的类星体的观测 (Becker et al., 2001; Fan et al.,2002) 表明再电离发生在红移大约 6 处, 因此期待这种改变是微小的.

3.4 暗 物 质

强有力的证据表明宇宙中有比重 $\Omega_{\rm dm} \simeq 0.3$ 的非重子暗物质. 也许最似乎合理的暗物质候选者是弱相互作用重粒子 (WIMP), 它和高温的宇宙粒子有紧密的联系, 但而后当温度降到质量以下时经历了*冻结*. 冻结是粒子间不能再相互湮灭以保持平衡. 实际上, 是否无限地保持平衡, 它的丰度将受 $\mathrm{e}^{-m/T}$ 的压制：在观测宇宙学中将不会有这样的粒子. 本节的目的是求解这种粒子的玻尔兹曼方程确定冻结发生的时期和它的残余丰度. 希望是通过固定残余丰度得到 $\Omega_{\rm dm} \simeq 0.3$, 我们将了解到这种粒子的一些基本特征, 如它的质量和截面. 然后我们可能利用这些知识在实验室去探测这种粒子.

在一般的 WIMP 图像中, 两个重粒子 X 可以湮灭产生两个轻粒子 (基本上是无质量的)l. 假定轻粒子和宇宙等粒子体紧密耦合, 以至于它们以 $n_l = n_l^{(0)}$ 完全保持平衡 (在化学上和动力学上). 然后只有一点不了解, 就是这种重粒子的丰度 n_X. 可以利用方程 (3.9) 来求解这个丰度:

$$a^{-3}\frac{\mathrm{d}(n_X a^3)}{\mathrm{d}t} = \langle\sigma v\rangle \left\{(n_X^{(0)})^2 - n_X^2\right\}. \tag{3.48}$$

进一步, 回忆起温度典型地比例于 a^{-1}, 因此如果对左端圆括弧里的因子 $n_X a^3$ 乘以或除以 T^3, 就可以把 $(aT)^3$ 移到微分的外面, 留下 $T^3\mathrm{d}(n_X/T^3)/\mathrm{d}t$.

然后定义

$$Y \equiv \frac{n_X}{T^3}. \tag{3.49}$$

Y 的微分方程变成

$$\frac{\mathrm{d}Y}{\mathrm{d}t} = T^3\langle\sigma v\rangle\{Y_{\rm EQ}^2 - Y^2\}, \tag{3.50}$$

其中, $Y_{\rm EQ} \equiv n_X^{(0)}/T^3$.

进一步, 就像在中子–质子情况下, 引进一个新的时间变量更方便

$$x \equiv m/T \tag{3.51}$$

其中, m 是重粒子的质量, 在我们感兴趣的范围内对温度设定了一个大致的尺度. 非常高的温度对应 $x \ll 1$, 在这种情况下反应进行得非常快, 以至于 $Y \simeq Y_{\rm EQ}$. 由于在这些时期 X 粒子是相对论性的, 方程 (3.6) 的极限 $m \ll T$ 暗示 $Y \simeq 1$. 对于大的 x, 平衡丰度 $Y_{\rm EQ}$ 受指数 e^{-x} 的压制. 最终, X 粒子由于这种压制将变得如此

稀少, 以至于它们都不能足够快地互相找到, 来保持平衡丰度. 这是冻结的开始. 为了将 t 变为 x, 我们需要雅可比 (Jacobian) 等式 $\mathrm{d}x/\mathrm{d}t = Hx$. 暗物质的产生重点发生在深度辐射期, 此时能量密度正比于 T^4, 则 $H = H(m)/x^2$. 演化方程变为

$$\frac{\mathrm{d}Y}{\mathrm{d}x} = -\frac{\lambda}{x^2}\{Y^2 - Y_{\mathrm{EQ}}^2\}, \tag{3.52}$$

其中湮灭速率和膨胀速率比参数化为

$$\lambda \equiv \frac{m^3\langle\sigma v\rangle}{H(m)}. \tag{3.53}$$

在许多理论中 λ 是个常数, 但是在一些理论中, 热力学平均截面是温度依赖性的; 接下来这会导致微小的数值变化, 但是不会改变定性解.

方程 (3.52) 是 Riccati 方程的一种形式, 一般而言没有解析解. 然而在这种情况下, 我们可以利用对冻结过程的理解来得到最终的冻结丰度 $Y_\infty \equiv Y(x=\infty)$ 的解析表达式. 让我们重温一下对方程 (3.52) 的上下文的理解. 左端的量级是 Y(对应 $x \sim 1$), 而右端的量级是 $Y^2\lambda$. 我们将会看到 λ 非常大,

因此只要 Y 不是太小, 右端必须为零, 以设定 $Y = Y_{\mathrm{EQ}}$. 晚些时候, 当 Y_{EQ} 急促地下降, 右端这一项将不再比左端大很多. 事实上在冻结后很久, Y 将会比 Y_{EQ} 大很多：X 粒子将不能足够快地彻底湮灭以保持平衡. 因此而后

$$\frac{\mathrm{d}Y}{\mathrm{d}x} \simeq -\frac{\lambda Y^2}{x^2} \quad (x \gg 1). \tag{3.54}$$

以分析的方法从冻结的时期 x_f 到非常晚些的时候 $x = \infty$ 积分该式, 得到

$$\frac{1}{Y_\infty} - \frac{1}{Y_f} = \frac{\lambda}{x_f}. \tag{3.55}$$

特别是, Y 在冻结的时候 Y_f 显著地比 Y_∞ 大, 则可做一个简单的分析近似

$$Y_\infty \simeq \frac{x_f}{\lambda}. \tag{3.56}$$

这一近似是不完全的, 原因在于它取决于我们还没有确定的冻结温度. 尽管更准确的确定可能有 (练习 10), 对暗物质问题一个简单的数量级估计是 $x_f \sim 10$.

图 3.5 展示了方程 (3.52) 在一些不同 λ 值的数值解. 这些丰度一路追踪平衡丰度直到 $m/T \sim 10$, 以后它们平稳地趋于常数. 大致估计 $Y_\infty \sim 10/\lambda$, 被认为是残余丰度的一个合理近似. 注意到大截面的粒子 (例如, 图中 $\lambda = 10^{10}$) 冻结的晚些, 晚冻结的粒子有较低的残余丰度. 从图 3.5 中的插图我们也注意到玻色–爱因斯坦、费米–狄拉克、玻尔兹曼统计之间的差别只有在温度高于粒子质量的时候才是重要的. 对于和冻结过程有关的温度, 我们采用玻尔兹曼统计被证明是完全合理的.

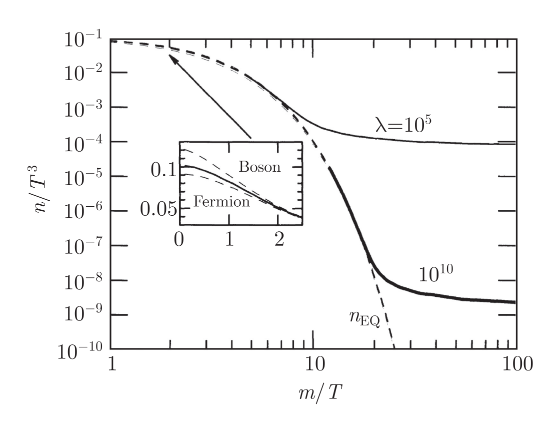


图 3.5 重稳态粒子的丰度随温度下降到质量以下. 虚线代表平衡丰度, 两种不同的实曲线分别表示在不同 λ 下的重粒子丰度.λ 是湮灭速率 -Hubble 速率比. 插图表明了只有在温度高于粒子质量的时候量子统计和玻尔兹曼统计之间的差别才是重要的

为了确定现在的这些残余重粒子的丰度需要再多一点物理知识. 在冻结后, 重粒子密度简单地随着 a^{-3} 下降. 因此今天它的能量密度是 $m(a_1/a_0)^3$ 乘以它的数密度, 其中 a_1 对应足够晚的一个时间, 以至 Y 已经达到了它的渐近值 Y_∞. 那时的数密度是 $Y_\infty T_1^3$, 则

$$\rho_X = mY_\infty T_0^3 \left(\frac{a_1 T_1}{a_0 T_0}\right)^3 \simeq \frac{mY_\infty T_0^3}{30}. \tag{3.57}$$

第二个等式是重要的. 你可能希望在宇宙的演化过程中 aT 保持常数, 那样比值 a_1T_1/a_0T_0 将是单位一. 这和 CMB 与中微子有不同的温度并不是同一个原因. 我们在第 2 章看到光子被正负电子对湮灭加热, 而已经退耦的中微子并没有. 类似地, 随着宇宙膨胀, 光子被质量在 1MeV 到 100GeV 之间的粒子团湮灭所加热, 所以 T 并不是简单地随着 a^{-1} 下降. 你可以由练习 11 得到 $(a_1T_1/a_0T_0)^3 \simeq 1/30$. 最终, 为了找到今天的由粒子 X 所贡献的临界密度比例, 代入 Y_∞ 的表达式, 除以 $\rho_{\rm cr}$, 得到

$$\begin{aligned}\Omega_X &= \frac{x_f}{\lambda}\frac{mT_0^3}{30\rho_{\rm cr}} \\ &= \frac{H(m)x_f T_0^3}{30m^2\langle\sigma v\rangle\rho_{\rm cr}}.\end{aligned} \tag{3.58}$$

为了找到现今的重粒子密度, 需要计算温度等于 X 质量时的哈勃速率 $H(m)$, 为此需要温度等于 m 时的能量密度. 辐射时期的能量密度由方程 (3.26) 给出, 其

中 g_* 是温度的函数. 则

$$\Omega_X = \left[\frac{4\pi^3 G g_*(m)}{45}\right]^{1/2} \frac{x_f T_0^3}{30\langle\sigma v\rangle\rho_{\mathrm{cr}}}. \tag{3.59}$$

我们看到 Ω_X 并不明确地取决于 X 粒子的质量.① 这主要是截面决定着残余丰度.

现在让我们看看今天获得暗物质需要多大的数量级, 即得到 $\Omega_X = \Omega_{\mathrm{dm}} \simeq 0.3$. 在暗物质产生的温度内, 即 $T \sim 100\mathrm{GeV}$, $g_*(m)$ 包括标准模型中的所有粒子的贡献 (三种夸克, 轻子, 光子, 胶子, 弱玻色子, 甚至可能有 Higgs 玻色子), 因此量级是 100. 利用它们的额定值归一化 $g_*(m)$ 和 x_f, 可得

$$\Omega_X = 0.3h^{-2}\left(\frac{x_f}{10}\right)\left(\frac{g_*(m)}{100}\right)^{1/2}\frac{10^{-39}\mathrm{cm}^2}{\langle\sigma v\rangle}. \tag{3.60}$$

事实上, 采取这种估计, 把量级是 $10^{-39}\mathrm{cm}^2$ 的截面看成单位一, 是一个好的记号: 有许多理论预言存在的粒子的横截面是这么小的.

或许这些理论最显著的是超对称性, 即一种预言所有粒子都有一个对立统计的同伴的理论. 例如, 零自旋的 Higgs 玻色子的超对称性同伴是自旋为 1/2 的 Higgsino(费米子).

最初人们希望探测到的费米子是探测到的玻色子的同伴, 但是这种希望在自然中是不现实的. 相反, 超对称性必须破缺, 所有已知粒子的超对称性同伴必须是大质量的, 以至于它们甚至在加速器中还没有被发现: 它们的质量必须大于 10~100GeV. 今天哪个粒子是暗物质的超对称性同伴的最佳候选者呢? 这种粒子必须是中性的, 因为证据表明暗物质确实是暗的, 即没有和已知粒子过多地相互作用, 尤其是不辐射出光子. 这种粒子也必须是稳定的: 如果它可以衰变成其他的轻粒子, 那么衰变将使它在早期宇宙始终保持平衡, 到今天将什么都没有遗留. 这些标准中的第一要求是暗物质是其中一个中性粒子的同伴, 如 Higgs 或光子.② 第二要求粒子是其中最轻的 (最轻的超对称性同伴的 LSP), 任何比较重的粒子可以衰变为这种最轻的粒子加上一些普通的粒子.

在早期宇宙不仅这些弱相互作用粒子, 如 LSP 将淹没, 而且如果它们今天遍及宇宙, 它们将散射掉普通物质. 虽然探测这些反应很难, 因为速率是如此地低, 但是许多试验已经规划来寻找暗物质粒子. 根据这些试验, 图 3.6 展示了暗物质的质量和截面的极限 (注意到散射截面和湮灭截面相关, 但是却不相等). 除了由 DAMA 试验带来的诱人的探测外, 到目前为止我们仅仅有上限. 然而如图所暗示, 在接下来几年, 试验被期望能够突破超对称性理论预言的范围.

① 当 $T = m$, 在冻结温度 x_f 和 g_* 下, 它隐约地取决于质量.

② 在标准模型中另外一种中性玻色子是 Z 矢量玻色子. 最轻的超对称性同伴可能是所有这些同伴的线性组合.

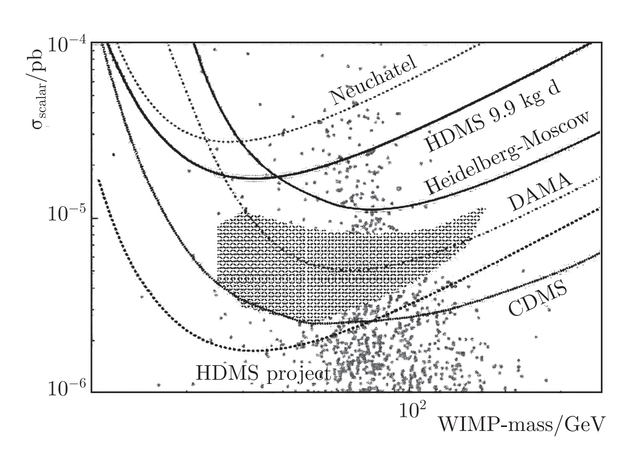


图 3.6　对超对称性暗物质的约束 (Baudis et al., 2000). 实曲线以上的区域是排除掉的, 阴影部分由 DAMA 探测报告给出 (Bernabei et al., 1999). 最下面的曲线 (标记 HDMS project) 只是一个基于将来试验的规划中的极限.CDMS 试验 (Abusaidi et al., 2000) 好像把 DAMA 试验排除在外了. 整个离散点对应着在一类超对称性模型中不同的参数选择. 注意到对界面的限制是以 picobarns 为单位的 (1 picobarn = 10^{-36}cm^2)

3.5　小　　结

当宇宙等粒子体温度的量级在 0.1MeV 时, 宇宙中轻元素形成了. 大约重子质量的四分之一参与形成 ^{4}He, 其余的参与自由质子的形成, 也有微量的氘核、^{3}He 和锂.

这些元素仍然保持电离态, 直到宇宙温度降到大大低于氢的电离能. 再复合时期——在这段时期电子和质子组合形成中性氢, 发生在红移大约为 1000 处, 对应温度 $T\sim 0.25$eV. 再复合之前, 光子和电子, 以及质子由于康普顿散射和库仑散射彼此紧密耦合. 这段时期之后, 光子在宇宙中自由旅行而没有相互作用, 因此我们今天所观测到的 CMB 中的光子给我们提供了宇宙在红移 1000 处的极好的快照. 这种快照的重要性如何强调都不为过.

核合成和再复合的细节被一事实严重地影响. 这一事实是最终所涉及的反应变得太慢而不能赶得上膨胀速率. 这一特征也可能是宇宙中暗物质产生的原因. 在一个方面我们探索了普通的图像, 即一个大质量中性稳定粒子的温度显著降到它的质量以下时停止湮灭. 这种粒子现今的丰度根据方程 (3.60) 中它的湮灭截面是可以确定的. 大的截面对于更有效的湮灭, 然而到今天的丰度越低. 为了吻合今天所观测到的暗物质的丰度, 我们需要截面的大致量级在 10^{-40}. 这样的截面和必要的稳定性, 中性粒子相当自然地出现延伸了粒子物理的标准模型, 如超对称性, 也可能在不久的将来被加速器试验很好地检验.

推荐读物

The Early Universe (Kolb 和 Turner) 这本书尤其包含了重粒子冻结问题和大爆炸核合成的清晰处理, 同样是基于玻尔兹曼方程, *Kinetit Theory in an Expanding Universe* (Bernstein) 对这些问题提供了一些半解析解, 同样也是基于必要的玻尔兹曼理论.

关于早期宇宙核合成的工作可以追溯到 Gomow 和他的合作者, 做出总结性工作的有 Alpher, Follin 和 Herman(1953). 最先作出 CMB 工作的有 Peebles(1966) 和 Wagoner, Fowler, Hoyle(1967); 这些工作得到了基本的正确方向：25% 的氦, 和大概正确的氘核量. Yang 等 1984 年帮助我这一代的许多人理解了种子密度能够用轻元素的观测来约束. 关于核合成的一篇很好的综述性文章是 Olive, Steigman 和 Walker 于 2000 年做出的.

正如我在本章中所努力展示的, 再复合的过程是非常丰富多彩的; 它涉及一些微妙的物理. 在所有细节方面的独创性的文章是 Peebles 于 1968 年做出的. 然而 Ma 和 Bertschinger 在 1996 年设法在他们只有一页的文章的 5.8 节简洁地描述其物理过程. Seager, Sasselov 和 Scott 于 1999 年呈现了一个比较精确的工作 (尽管他们一再强调 Peebles 的直觉性的文章很好地支持了他们), 其中包括以前的工作所忽略的许多细微的效应.

Jungman, Kamionkowski 和 Griest 在 1996 年做了一个全面性的关于超对称性暗物质方面的综述. 许多文章已经从宇宙学和加速器试验上探索了超对称性暗物质候选者的极限. 在此提出一些：Roszkowski 在 1991 年展示了 Higgsino 可能不是最轻的超对称性同伴; Nath 和 Arnowitt 在 1992 年以及 Kane 等在 1994 年既从物理的观点, 又从宇宙学的观点展示了初始规范本征态 B 的同伴*bino*是最可能的 LSP. Ellis 等 1997 年结合了加速器试验和从宇宙学方面得到的限制给出了 LSP 质量一个比较低的限制; Edsjo 和 Gondolo 在 1997 年的工作在残余丰度计算上包含了细微的效应. 如果 LSP 主要地由 Higgs 玻色子的同伴组成, 那么这些效应将影响极限. Bottino 等 2001 年研究了一个重要结果, 即如果在 DAMA 试验信号中发现了信息, 应归于暗物质粒子.

练　习

1. 计算质量为 m, 简并度 $g=2$ 的种类在 m/T 很大和很小的极限下的平衡数密度 (即零化学势). 在以下三种类型统计中采用这些极限：玻尔兹曼统计、玻色–爱因斯坦统计和费米–狄拉克统计. 你将会发现 (C.26) 式和 (C.27) 式对高温玻色–爱因斯坦统计和费米–狄拉克

极限计算是有帮助的.

2. 在本章中, 当温度高于 m_{e} 时我们把 $\mathrm{e}^{\pm}$ 看成是和能量密度相关的, 但是在以后就不相关了 ((3.30) 式和讨论正好表达了). 假设 $n_{\mathrm{e}^{\pm}}=n_{\mathrm{e}^{\pm}}^{(0)}$, 通过湮灭过程追踪 $\mathrm{e}^{\pm}$ 的密度. 这个等式在 BBN 时期成立是因为电磁相互作用很强 (如 $\mathrm{e}^{+}+\mathrm{e}^{-}\leftrightarrow\gamma+\gamma$). 计算何时密度降到光子能量密度的 1%? 如果 $\eta_b\simeq 6\times10^{-10}$, 你认为温度多高时 $n_{\mathrm{e}^{-}}$ 和 $n_{\mathrm{e}^{-}}^{(0)}$ 分离?

3. 计算中子–质子的转化速率 λ_{np}. 证明它等于 (3.29) 式. 有两个过程对 λ_{np} 有贡献: $\mathrm{n}+\nu_{\mathrm{e}}\rightarrow\mathrm{p}+\mathrm{e}^{-}$ 和 $\mathrm{n}+\mathrm{e}^{+}\rightarrow\mathrm{p}+\bar{\nu}_{\mathrm{e}}$. 假设所有粒子都可以被玻尔兹曼统计描述, 并且忽略电子的质量. 在这些近似下, 这两个速率是相等的.

(a) 利用 (3.8) 式推导 $\mathrm{n}+\nu_{\mathrm{e}}\rightarrow\mathrm{p}+\mathrm{e}^{-}$ 的速率. 对重粒子动量积分, 得到

$$\begin{aligned}\lambda_{\mathrm{np}}=n_{\nu_{\mathrm{e}}}^{(0)}\langle\sigma v\rangle=&\frac{\pi}{4m^2}\int\frac{\mathrm{d}^3p_\nu}{(2\pi)^3 2p_\nu}\mathrm{e}^{-p_\nu/T}\\&\times\int\frac{\mathrm{d}^3p_{\mathrm{e}}}{(2\pi)^3 2p_{\mathrm{e}}}\delta(\mathcal{Q}+p_\nu-p_{\mathrm{e}})|\mathcal{M}|^2.\end{aligned}\tag{3.61}$$

(b) 振幅的平方等于 $|\mathcal{M}|^2=32G_F^2(1+3g_A^2)m_{\mathrm{p}}^2p_\nu p_{\mathrm{e}}$, 其中 g_A 是核子的轴矢量耦合. 现今对 g_A 最佳的测量是通过中子寿命 $\tau_{\mathrm{n}}=\lambda_0G_F^2(1+3g_A^2)m_{\mathrm{e}}^5/(2\pi^3)$ 得到，其中相空间积分

$$\lambda_0\equiv\int_1^{\mathcal{Q}/m_{\mathrm{e}}}\mathrm{d}x\,x(x-\mathcal{Q}/m_{\mathrm{e}})^2(x^2-1)^{1/2}=1.636.\tag{3.62}$$

代入积分到 (3.61) 式, 根据 τ_{n}, 计算速率 λ_{np}. 不要忘记对两个不同的反应要乘以 2.

4. 数值求解速率方程 (3.27) 式, 以确定以温度为函数的中子比例. 忽略衰变, 至少有两个方法来计算. 第一种是把它当成一个简单的普通微分方程来处理, 数值求解. 第二种是进行解析, 推导这一问题成一个单一的数值积分的演化. 在此我将要提示的第二种方法是基于 Bernstein, Brown 和 Feinberg 1988 年阐述的数值一致性.

(a) 利用标准微分方程方法, (3.27) 式的一个形式解是

$$X_{\mathrm{n}}(x)=\int_{x_i}^{x}\mathrm{d}x'\frac{\lambda_{\mathrm{np}}(x')\mathrm{e}^{-x'}}{x'H(x')}\mathrm{e}^{\mu(x')-\mu(x)}\tag{3.63}$$

其中, x_i 是一些非常高温的初始值, 并且

$$\mu(x)\equiv\int_{x_i}^{x}\frac{\mathrm{d}x'}{x'H(x')}\lambda_{\mathrm{np}}(x')[1+\mathrm{e}^{-x'}].\tag{3.64}$$

(b) 利用 (3.29) 式和 (3.26) 式解析地计算积分因子 μ. 证明它等于

$$\begin{aligned}\mu=&-\frac{255}{\tau_{\mathrm{n}}\mathcal{Q}}\left[\frac{4\pi^3G\mathcal{Q}^2g_*}{45}\right]^{-1/2}\\&\times\left[\left(\frac{4}{x^3}+\frac{3}{x^2}+\frac{1}{x}\right)+\left(\frac{4}{x^3}+\frac{1}{x^2}\right)\mathrm{e}^{-x}\right]\Big|_{x_i}^{x}.\end{aligned}\tag{3.65}$$

μ 最简单的形式只是由于数值一致性.

(c) 由 (b) 问的结论, 对 (a) 进行单一的数值积分. 将 $x=\infty$ 时的渐近结果和本章正文中的结果 $X_n(x=\infty)=0.15$ 进行比较.

5. 积分 Friedmann 方程 (1.2), 以证明方程 (3.30) 式在 $e^{\pm}$ 湮灭后, 物质占主导前的时期时间-温度的关系.

6. 根据 $\Omega_b h^2$ 确定 η_b. 证明它就是 (3.11) 式给出的形式.

7. CMB 各向异性中一个重要的参数是退耦时的声速. 它由重子–光子比确定.

(a) 求出

$$R \equiv \frac{3\rho_b}{4\rho_\gamma}$$

作为 a 的函数. 求出它在退耦时的值. 提示: 你的答案应该取决于 $\Omega_b h^2$.

(b) 在第 8 章将会看到组合的光子/重子流体的声速是

$$c_s = \sqrt{\frac{1}{3(1+R)}}. \tag{3.66}$$

利用你在 (a) 问中得到的结果画出在退耦时声速作为 $\Omega_b h^2$ 的函数的图像.

8. 求解自由电子比例的演化. 当你完成 (d) 问题的时候, 将你的结果和图 3.4 比较. 整个过程取参数 $\Omega_m = 1$,$\Omega_b = 0.06$,$h = 0.5$.

(a) 用一个演化变量 $x \equiv \epsilon_0/T$ 代替方程 (3.39) 中的时间. 根据 x 和 $T = \epsilon_0$ 时的 Hubble 速率重写方程.

(b) 利用 3.4 节的方法, 找出最终的自由电子比例冻结丰度, $X_{\rm e}(x=\infty)$.

(c) 数值积分 (a) 问得到的方程, x 从 1 到 1000. 求得最终的冻结比例 $X_{\rm e}$.

(d) Peebles(1968) 讨论了除 $n = 2$ 态衰变为两个光子的次数比例, 或膨胀红移了 Lyman α 光子以至于它不能吸收一个基态原子这两者之外, 甚至激发态的俘获也将不会重要了. 定量上, 他对方程 (3.39) 的右端乘以了修正因子

$$C = \frac{\Lambda_\alpha + \Lambda_{2\lambda}}{\Lambda_\alpha + \Lambda_{2\lambda} + \beta^{(2)}} \tag{3.67}$$

其中, 二光子衰变速率是 $\Lambda_{2\gamma} = 8.227\text{sec}^{-1}$; Lyman α 的产生速率是 $\beta^{(2)} = \beta e^{3\epsilon_0}/4T$; 以及

$$\Lambda_\alpha = \frac{H(3\epsilon_0)^3}{(8\pi)^2}. \tag{3.68}$$

按此计算展示一下它是如何改变你的最终结果的. 现在将冻结丰度分别与 (c) 问题的结果和图 3.4 的演化比较一下.

9. 找出退耦的红移作为 Ω_b 的函数关系. 如果你没有练习 8 中的演化函数, 利用 Saha 方程来确定 $X_{\rm e}$.

10. 通过设定 x_f, 比如设 $n^{(0)}(x_f)\langle\sigma v\rangle = H(x_f)$, 对重粒子湮灭的冻结温度寻求一种近似.

11. 一般地, 宇宙等离子体温度在膨胀中随着 a^{-1} 冷却. 然而, 当粒子湮灭时, 它们往等粒子体中储蓄能量, 所以就减慢了冷却 (Scherrer 和 Turner 于 1986 年指出湮灭实际上不加热宇宙：T 从不增加, 它就简单地减小, 只是比 a^{-1} 慢些). 利用熵密度 [方程 (2.66)] 比例于 a^{-3} 这一事实, 计算 $(aT)^3$ 在温度 $T = 10\text{GeV}$ (大约是 WIMPs 退耦的时期) 时的数值和今天的数值的比.

12. 假定没有重子非对称性, 以至于重子的数密度恰好等于反重子的. 确定最终的残余密度 (重子 + 反重子) 在多少温度下达到渐近值?

13. 质量为 m 的粒子的湮灭截面有一个基本的极限. 由于统一性, $\langle\sigma v\rangle$ 必须小于或等于 $1/m^2$, 采取数量级因子是单位一. 确定达到边界条件的粒子的 Ω_X, 即粒子的 $\langle\sigma v\rangle = 1/m^2$. m 为何值时 $\Omega_X = 1$? (保持 x_f 和 g_* 等于 (3.60) 式给出的象征值) 注意到如果 m 比这个临界值大, 则 $\Omega_X > 1$, 即将被排除. 这是一个很强的对质量大于临界值的稳定粒子 (因此也是暗物质候选者) 不利的论据.

第 4 章　玻尔兹曼方程

我们对宇宙中各向异性分布的光子和非均匀分布的物质感兴趣. 图 4.1 展示了为什么它们的计算是如此之复杂. 光子被引力场和自由电子的康普顿散射过程所影响. 电子被紧紧地束缚在质子上. 当然, 电子和质子也同样被引力场所影响, 确定了引力的度规张量被光子、质子和电子以及中微子和暗物质共同影响着. 由此看来, 若要求解光子和暗物质的分布函数, 必须同时求解所有其他成分的分布函数.

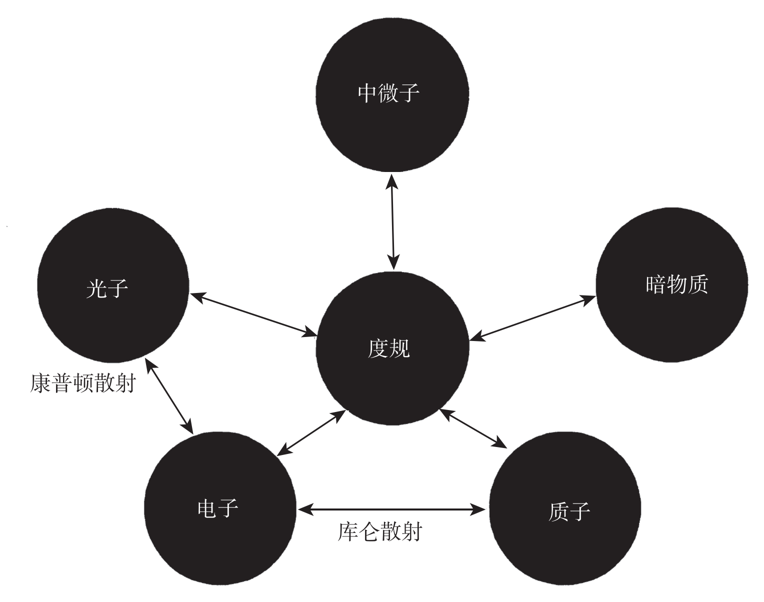


图 4.1　宇宙中的各种成分的相互作用. 图中的箭头表示了耦合的玻尔兹曼–爱因斯坦方程

有一种系统的方法能解释所有这些耦合. 首先, 写出宇宙中每一种成分的玻尔兹曼方程. 我们已经在第 3 章中遇到了玻尔兹曼方程的积分形式, 那时只对暗物质、中微子和自由电子的数密度感兴趣. 其中, 数密度是由分布函数对所有的动量分量积分所得到的. 在这里, 将做更详细的讨论：不仅仅是积分得到的数密度, 而是在相空间完整的分布函数, 也就是动量的分布函数. 所以需要一个比 (3.1) 式更原始的形式. 微分形式的玻尔兹曼方程可以示意性地写成：

$$\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t} = C[f]. \tag{4.1}$$

玻尔兹曼方程右侧包含了任何可能的碰撞项. 一般地, 这些项是宇宙中各种成分的

分布函数的复杂函数. 在没有碰撞项的情形下, 分布函数满足 $\mathrm{d}f/\mathrm{d}t = 0$. 这个简洁的方程的意思是：在给定的相空间的元素 (体元) 中, 粒子的数量不随时间变化. 关键是, 由于度规张量的影响, 相空间的元素本身随时间做复杂的运动. 这使得问题比 (3.1) 式看起来更加复杂. 然而, 我们仍然可以把 (3.1) 式左侧时间的全微分展开成偏微分项, 从而继续系统地解决问题.

在本章中, 我们将导出光子、电子、质子、暗物质和静止质量为零的中微子的玻尔兹曼方程. 这一系列方程支配着宇宙中扰动的演化.

4.1 谐振子的玻尔兹曼方程

在处理最感兴趣的问题—膨胀的宇宙中各类成分的玻尔兹曼方程—之前, 先考虑一个更简单的玻尔兹曼方程的例子：非相对论性简谐振子. 这个简单的例子与下一节遇到的广义相对论形式的玻尔兹曼方程非常类似, 然而它的数学推导却不那么繁杂. 所以, 这里的物理意义会很清晰. 在下一节, 当复杂的数学掩盖了物理意义时, 记住本节的内容将会是很有用处的.

考虑一个一维的简谐振子, 它具有的能量是

$$E = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2}kx^2. \tag{4.2}$$

谐振子的分布函数是时间 t、位置 x 和动量 p 的函数. 故 (4.1) 式左侧时间的全微分可以展开成

$$\frac{\mathrm{d}f(t,x,p)}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} + \frac{\partial f}{\partial p}\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}t}. \tag{4.3}$$

图 4.2 展示了无碰撞 ($C = 0$) 的谐振子的分布在相空间的移动. 由于在 t_1 时刻和 t_2 时刻, 粒子的数密度是相等的, 所以分布函数对时间的全微分 $\mathrm{d}f/\mathrm{d}t$ 等于零. 所改变的只是相空间的分量 $x(t)$ 和 $p(t)$ 的位置. 我们还可以认为 x 和 p 是不依赖于 t 的独立变量, 取 f 对 t、x 和 p 的偏微分. 这些偏微分项都是非零的, 但它们的加权和为零.

为了确定 $\mathrm{d}x/\mathrm{d}t = 0$ 和 $\mathrm{d}p/\mathrm{d}t = 0$ 的系数, 我们必须利用粒子的运动方程. 由动量的定义,

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} \equiv \frac{p}{m}. \tag{4.4}$$

在下一节, 这个方程将会写成相对论的三维形式. 实际上已经在第 2 章中遇到过这样的形式, 定义了 $P^\mu \equiv \mathrm{d}x^\mu/\mathrm{d}\lambda$. 谐振子的动力学方程由牛顿第二定律表述：

$$\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}t} = -kx. \tag{4.5}$$

这个熟悉的方程与下一节广义相对论中的测地线方程相对应.

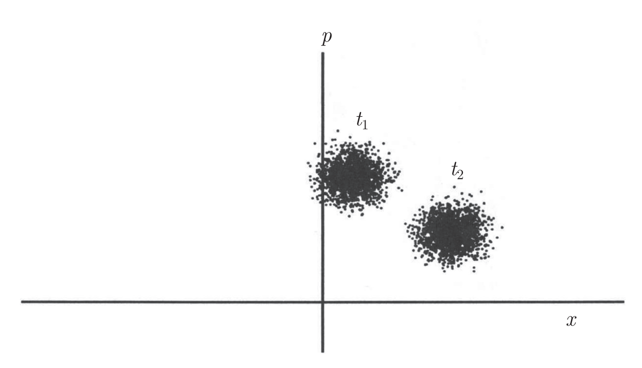


图 4.2 一组无碰撞谐振子的分布函数. 在 t_1 时刻的初始分布在相空间中移动到了 t_2 时刻分布的位置. 考虑 $x(t)$ 和 $p(t)$ 的演化, 分布函数 $f(t,x,p)$ 仍保持为常数

这样, 谐振子的无碰撞玻尔兹曼方程便写为

$$\frac{\partial f}{\partial t}+\frac{p}{m}\frac{\partial f}{\partial x}-kx\frac{\partial f}{\partial p}=0. \tag{4.6}$$

这里的第二项表示了谐振子在实空间运动的速度 $(v=p/m)$, 最后一项表示粒子损失动量的快慢.

为了求解玻尔兹曼方程, 必须知道分布函数的初始条件. 即使没有这些初始条件, 玻尔兹曼方程仍然能提供很多有用的物理信息. 例如, 考虑到处于平衡态的分布,$\partial f/\partial t=0$, 平衡态分布的一般解是

$$f(p,x)=f_{\mathrm{EQ}}(E), \tag{4.7}$$

即 f 只是能量 E 的函数. 为了证明这确实是玻尔兹曼方程的一个解, 考虑

$$\begin{aligned}\frac{p}{m}\frac{\partial f(E)}{\partial x}-kx\frac{\partial f(E)}{\partial p}&=\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}E}\left[\frac{p}{m}\frac{\partial E}{\partial x}-kx\frac{\partial E}{\partial p}\right]\\&=0.\end{aligned} \tag{4.8}$$

所以, 任何以能量为唯一自变量的分布函数必定是平衡态分布. 当然, 更一般地, 我们必须考虑相互作用, 即碰撞. 只有在碰撞项同样为零的条件下才能让完整的玻尔兹曼方程成立 (译者注：碰撞项为零会使玻尔兹曼方程不随时间变化, 这样相空间的分布函数不随时间变化, 只有平衡态才能满足. 而碰撞项不为零的玻尔兹曼方程只能在某一限定时刻成立). 这个条件将会使 f 趋于一个我们熟悉的平衡态分布, 即经典的麦克斯韦–玻尔兹曼分布 $\mathrm{e}^{-E/T}$.

4.2 光子的无碰撞玻尔兹曼方程

让我们先考虑 (4.1) 式左侧为零质量光子的形式. 首先, 必须指定一个在均匀

宇宙背景 (其度规由 (2.4) 式描述) 下有扰动情况下的度规. 相比于只用单一函数 $a(t)$ 确定的均匀宇宙 (只依赖于时间, 不依赖于空间), 受过扰动的宇宙需要另外两个函数 Ψ 和 Φ 来确定. 这两个函数都是时间和空间的函数. 这样, 度规可以用它们写为

$$\begin{aligned} g_{00}(\vec{x},t) &= -1-2\Psi(\vec{x},t) \\ g_{0i}(\vec{x},t) &= 0 \\ g_{ij}(\vec{x},t) &= a^2\delta_{ij}(1+2\Phi(\vec{x},t)). \end{aligned} \tag{4.9}$$

在 Ψ 和 Φ 为零时,(4.9) 式还原为描述零阶、均匀、平坦宇宙的 FRW 度规. 类似地, 在没有膨胀的情况下 ($a=1$) 这种度规描述了一个弱引力场 (练习 2.3). 扰动的度规中的 Ψ 对应于牛顿引力势, 而 Φ 对应于空间曲率的扰动. 由于在我们感兴趣的时间和空间尺度范围, Ψ 和 Φ 都很小, 所以把它们当成小量, 忽略它们所有的二阶及更高阶的项.

(4.9) 式中有两个要点, 在本书绝大部分篇幅中可不予考虑. 但为了更好地理解相关的文献 (读物), 这些要点需要引起足够的重视. 第一, 在三维坐标变换下, 我们可以把 (度规张量) 的扰动分解成表现为标量、矢量和张量性质的扰动. (4.9) 式只包含标量扰动. 原则上, 描述宇宙的度规同样可以包含矢量和张量的扰动. 这样, 度规 $g_{\mu\nu}$ 需要除了 Ψ 和 Φ 之外的其他函数来描述所有的扰动. 如存在矢量扰动的情形下度规的非对角元素不再为零. 实际上, 在很多宇宙学理论中矢量扰动和张量扰动都是存在的. 例如, 暴胀理论倾向于预言张量扰动的存在, 而基于拓扑缺陷的模型倾向于产生很大的矢量扰动. 现在我们只讨论标量扰动; 标量扰动是唯一与物质 (分布) 扰动耦合的扰动, 也是与光子 (分布) 扰动耦合的最重要的一种扰动.

(4.9) 式中另外一个特点是, 它的形式与*规范*的选择有关. 理解这种规范自由度最简单的方法就是类比电磁学. 电磁学中, 矢势 A_μ 和它的导数包含了电磁场一切可能的信息. 由于对 A_μ 加一个常数后电场 $\vec{E}$ 和磁场 $\vec{B}$ 保持不变, 所以存在选择矢势的自由度 (例如, 常选择 $A_0=0$ 或 $\partial_\mu A^\mu=0$). 度规扰动中, 也存在着类似的自由度. 即使在只考虑标量扰动的情况下, 在选择变量去描述扰动时, 仍然存在相当的自由度. 尽管我们要求任何物理结果必须对规范的选择不敏感, 但还是有可能使用与 (4.9) 式截然不同的规范来描述同样的物理现象. 特别地,(4.9) 式被称为*共形牛顿规范* (Conformal Newtonian gauge)①.

① 历史上, 关于扰动演化具有开创性的工作都是在同步规范下处理的 (Peebles and Yu, 1970; Wilson and Silk, 1981; Peebles, 1982; Bond and Szalay, 1983; Bond and Efstathiou, 1984). 最近, 各向异性的物理意义在共形牛顿规范下被最明晰地表现了出来 (如 Hu and Sugiyama, 1995). 练习 2 讨论了在同步规范下一些相关的方程.

我们希望将 (4.1) 式中的时间全微分表达成偏微分的和的形式. 分布函数依赖于时空点 $x^\mu = (t, \vec{x})$ 和能动四矢：

$$P^\mu \equiv \frac{\mathrm{d}x^\mu}{\mathrm{d}\lambda} \tag{4.10}$$

正如 (2.18) 式, 这里的 λ 依然描述粒子的运动路径（再次, 我们不必详细说明 λ 的物理意义). 所以从原理上讲, f 是一个在 8 维空间上定义的函数. 然而, 并非能动四矢的所有分量都是相互独立的, 因为光子无静止质量, 故

$$P^2 \equiv g_{\mu\nu} P^\mu P^\nu = 0. \tag{4.11}$$

所以能动四矢只有三个独立的分量. 在我们选择使用哪三个分量之前, 先利用度规 (4.9) 式去限制 (4.11) 式

$$P^2 = 0 = -(1 + 2\Psi)(P^0)^2 + p^2 = 0 \tag{4.12}$$

其中定义

$$p^2 \equiv g_{ij} P^i P^j. \tag{4.13}$$

利用这个限制公式消去 P^μ 中的时间分量：

$$P^0 = \frac{p}{\sqrt{1 + 2\Psi}} = p(1 + \Psi). \tag{4.14}$$

这里最后一个等式成立是因为我们做的是一阶微扰理论, 故 Ψ 是小量. 由我们的符号的习惯, 密度大于平均值的区域有 $\Psi < 0$. 所以, 在密度大于平均值的区域,(4.14) 式右侧括号中的项大于 1, 因此 (4.11) 式告诉我们, 向势阱外运动时, 光子丢失能量——红移.

(4.14) 式将相对论情形下的表达式 $E = pc$ 一般化为扰动后的 FRW 度规. 这让我们可以随时利用广义的动量大小 p 消去 P^0. 回顾谐振子的情况, 在 (4.3) 式中没有出现 $\partial f / \partial E$. 这里也一样, 在展开时间全微分时, 我们没有必要让 $\partial f / \partial P^0$ 出现在 (4.14) 式中, 而只需要 f 对动量 p(包括动量的大小和方向) 的依赖关系. 对于方向矢量, 我们将使用单位矢量 $\hat{p}^i = \hat{p}_i$, 其中定义 $\delta_{ij} \hat{p}^i \hat{p}^j = 1$.

现在可以把 (4.1) 式写成如下形式

$$\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial x^i} \cdot \frac{\mathrm{d}x^i}{\mathrm{d}t} + \frac{\partial f}{\partial p} \frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}t} + \frac{\partial f}{\partial \hat{p}^i} \cdot \frac{\mathrm{d}\hat{p}^i}{\mathrm{d}t}. \tag{4.15}$$

(4.15) 式中最简单的一项是最后一项, 因为它对于一阶微扰理论没有作用. 为了证明这个事实, 首先回顾零阶分布函数——玻色–爱因斯坦函数, 只依赖于动量的大小 p, 不依赖于动量的方向 $\hat{p}^i$. 所以, 仅当我们考虑对于零阶 f 的扰动时 $\partial f / \partial \hat{p}^i$ 不为

零, 所以 $\partial f/\partial \hat{p}^i$ 是一个一阶项. 但乘以它的系数 $\mathrm{d}\hat{p}^i/\mathrm{d}t$ 也是一个一阶项, 因为只有当存在势 Ψ 和 Φ 时光子的运动方向才会发生变化.Ψ 和 Φ 为零时, 光子沿直线运动. 所以, (4.15) 式的最后一项是两个一阶项的乘积, 成为一个二阶项, 可以被忽略.

下一步, 我们将 (4.15) 式右侧第二项改写, 利用 ((4.10) 式)$P^i \equiv \mathrm{d}x^i/\mathrm{d}\lambda$ 和 $P^0 \equiv \mathrm{d}t/\mathrm{d}\lambda$. 故

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}x^i}{\mathrm{d}t} &= \frac{\mathrm{d}x^i}{\mathrm{d}\lambda}\frac{\mathrm{d}\lambda}{\mathrm{d}t}\\ &= \frac{P^i}{P^0}.\end{aligned} \tag{4.16}$$

我们希望将 P^i/P^0 用变量 p 和 $\hat{p}^i$ 表达. 对于 P^0 将 (4.14) 式代入即可; 现在我们对分子 P^i 也做同样的处理. 共动动量 P^i 正比于 $\hat{p}^i$, 将它们的比例系数用 C 表示:

$$P^i \equiv C\hat{p}^i. \tag{4.17}$$

为了确定系数 C, 可以利用 (4.13) 式:

$$\begin{aligned}p^2 &= g_{ij}\hat{p}^i\hat{p}^j C^2\\ &= a^2(1+2\Phi)\delta_{ij}\hat{p}^i\hat{p}^j C^2\\ &= a^2(1+2\Phi)C^2\end{aligned} \tag{4.18}$$

这里最后一步等式成立是因为方向向量是单位向量. 由 (4.18) 式可以得到 $C = p(1-\Psi)/a$, 所以每当遇到 P^i 时, 我们就可以用 p 和 $\hat{p}^i$ 消去它:

$$P^i = p\hat{p}^i\frac{1-\Phi}{a}. \tag{4.19}$$

通过 (4.16) 式和 (4.19) 式, 可以得到

$$\frac{\mathrm{d}x^i}{\mathrm{d}t} = \frac{\hat{p}^i}{a}(1+\Psi-\Phi). \tag{4.20}$$

高密度区域有 $\Psi < 0$ 和 $\Phi > 0$, 故上式括号中的项小于一. 所以 (4.20) 式表示, 当穿越密度大于平均值的区域时, 光子减速 ($\mathrm{d}x/\mathrm{d}t$ 减小). 这非常合理：我们预期大密度区域的引力能让包括光子在内的物质减速. 现在, 我们可以同样忽略 (4.20) 式中的势 Ψ 和 Φ. 因为, 在玻尔兹曼方程中它们乘以一阶项 $\partial f/\partial x^i$(同样地, 零阶分布函数不依赖于位置). 到目前为止, 我们可以把玻尔兹曼方程写成

$$\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\hat{p}^i}{a}\frac{\partial f}{\partial x^i} + \frac{\partial f}{\partial p}\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}t}. \tag{4.21}$$

接下来要计算的是 $\mathrm{d}p/\mathrm{d}t$. 遗憾的是, 不同于谐振子的情况, 这里 $\mathrm{d}p/\mathrm{d}t \neq -kx$. 我们不如利用广义相对论的测地线方程, 更严格地推导扰动后的 FRW 度规中光子的 $\mathrm{d}p/\mathrm{d}t$.

首先, 测地线方程 (2.18) 式的时间分量可以写成

$$\frac{\mathrm{d}P^0}{\mathrm{d}\lambda} = -\Gamma^0_{\alpha\beta}P^\alpha P^\beta. \tag{4.22}$$

可以把对 λ 的导数写成对时间的导数再乘以 $\mathrm{d}t/\mathrm{d}\lambda = P^0$. 同样, 可以利用 (4.14) 式用 p 消去 P^0. 然后测地线方程化为

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}[p(1-\Psi)] = -\Gamma^0_{\alpha\beta}\frac{P^\alpha P^\beta}{p}(1+\Psi). \tag{4.23}$$

展开对时间的导数, 得到

$$\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}t}(1-\Psi) = p\frac{\mathrm{d}\Psi}{\mathrm{d}t} - \Gamma^0_{\alpha\beta}\frac{P^\alpha P^\beta}{p}(1+\Psi). \tag{4.24}$$

两边同时乘以 $(1+\Psi)$, 忽略所有 Ψ 的平方及以上的项, 再将 Ψ 对时间的微分表示成偏微分, 得到

$$\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}t} = p\left\{\frac{\partial\Psi}{\partial t} + \frac{\hat{p}^i}{a}\frac{\partial\Psi}{\partial x^i}\right\} - \Gamma^0_{\alpha\beta}\frac{P^\alpha P^\beta}{p}(1+2\Psi). \tag{4.25}$$

为了求 $\mathrm{d}p/\mathrm{d}t$, 接下来要得到 $\Gamma^0_{\alpha\beta}P^\alpha P^\beta/p$. 在 (2.19) 式中, 克氏符可以表示成度规分量导数的和的形式. 这里只用到了 $\Gamma^0_{\alpha\beta}$ 分量. 把它与对 α、β 对称的 $P^\alpha P^\beta$ 相乘. 所以, 度规的导数的前两项的贡献相同, 我们得到

$$\Gamma^0_{\alpha\beta}\frac{P^\alpha P^\beta}{p} = \frac{g^{0\nu}}{2}\left[2\frac{\partial g_{\nu\alpha}}{\partial x^\beta} - \frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial x^\nu}\right]\frac{P^\alpha P^\beta}{p}. \tag{4.26}$$

现在 $g^{0\nu}$ 仅在 $\nu = 0$ 时非零, 这时 g^{00} 就是 g_{00} 的倒数, 所以

$$\Gamma^0_{\alpha\beta}\frac{P^\alpha P^\beta}{p} = \frac{-1+2\Psi}{2}\left[2\frac{\partial g_{0\alpha}}{\partial x^\beta} - \frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial t}\right]\frac{P^\alpha P^\beta}{p}. \tag{4.27}$$

同样, 方括号中第一项 $g_{0\alpha}$ 仅在 $\alpha = 0$ 时非零, 此时它的导数就是 $-2\partial\Psi/\partial x^\beta$. 方括号中第二项与动量的乘积相乘, 化为

$$\begin{aligned}-\frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial t}\frac{P^\alpha P^\beta}{p} &= -\frac{\partial g_{00}}{\partial t}\frac{P^0 P^0}{p} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial t}\frac{P^i P^j}{p} \\ &= 2\frac{\partial\Psi}{\partial t}p - a^2\delta_{ij}\left[2\frac{\partial\Phi}{\partial t} + 2H(1+2\Phi)\right]\frac{P^i P^j}{p}.\end{aligned} \tag{4.28}$$

但是, 通过 (4.19) 式, $\delta_{ij}P^iP^j = p^2(1-2\Phi)/a^2$, 得到

$$\Gamma^0_{\alpha\beta}\frac{P^\alpha P^\beta}{p} = \frac{-1+2\Psi}{2}\left[-4\frac{\partial\Psi}{\partial x^\beta}P^\beta + 2p\frac{\partial\Psi}{\partial t} - \left\{2\frac{\partial\Phi}{\partial t} + 2H(1+2\Phi)\right\}(1-2\Phi)\right]. \tag{4.29}$$

这里最后一行的化简是因为在一阶近似下 $(1+2\Phi)(1-2\Phi) \to 1$, 而且 $1-2\Phi$ 与 $\partial\Phi/\partial t$ 相乘得到 1. 对第一项的指标 β 求和, 得到

$$\begin{aligned}\Gamma^0_{\alpha\beta}\frac{P^\alpha P^\beta}{p} &= \frac{-1+2\Psi}{2}\left[-4\left(\frac{\partial\Psi}{\partial t}p + \frac{\partial\Psi}{\partial x^i}\frac{p\hat{p}^i}{a}\right) + 2p\frac{\partial\Psi}{\partial t} - p\left\{2\frac{\partial\Psi}{\partial t} + 2H\right\}\right] \\ &= \{-1+2\Psi\}\left[-\frac{\partial\Psi}{\partial t}p - 2\frac{\partial\Psi}{\partial x^i}\frac{p\hat{p}^i}{a} - p\left\{\frac{\partial\Psi}{\partial t} + H\right\}\right].\end{aligned} \tag{4.30}$$

代入 (4.25) 式, 得

$$\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}t} = p\left\{\frac{\partial\Psi}{\partial t} + \frac{\hat{p}^i}{a}\frac{\partial\Psi}{\partial x^i}\right\} - \frac{\partial\Psi}{\partial t}p - 2\frac{\partial\Psi}{\partial x^i}\frac{p\hat{p}^i}{a} - p\left\{\frac{\partial\Phi}{\partial t} + H\right\}. \tag{4.31}$$

再化简, 得到

$$\frac{1}{p}\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}t} = -H - \frac{\partial\Phi}{\partial t} - \frac{\hat{p}^i}{a}\frac{\partial\Psi}{\partial x^i}. \tag{4.32}$$

(4.32) 式是我们最终要得到的. 它描述了光子穿越被扰动的 FRW 度规时其动量的变化. 第一项是因为宇宙的哈勃膨胀引起的动量损失. 为了理解 (4.32) 式接下来两项的意义, 首先要记住, 根据我们正负号的习惯, 在密度较大的区域, 有 $\Phi > 0$ 和 $\Psi < 0$. 所以, 式中第二项表示光子在一个变深的引力势阱中 $(\partial\Phi/\partial t > 0)$ 损失能量. 这是很好理解的, 逐渐变深的引力势阱让光子难以逃脱, 增加了光子的引力红移. 最后一项表示, 光子向一个势阱中运动 $(\hat{p}^i\partial\Psi/\partial x^i < 0)$ 会获得能量, 因为光子被引力拉向势阱中心. 相反, 光子离开势阱时会红移.

现在, 可以写出光子的玻尔兹曼方程了. 利用 (4.32) 式和 (4.21) 式得到

$$\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\hat{p}^i}{a}\frac{\partial f}{\partial x^i} - p\frac{\partial f}{\partial p}\left[H + \frac{\partial\Phi}{\partial t} + \frac{\hat{p}^i}{a}\frac{\partial\Psi}{\partial x^i}\right]. \tag{4.33}$$

这个方程中包含了我们熟知的物理, 例如宇宙膨胀导致光子的红移. 这个方程还能直接导出关于光子各向异性分布的方程. 分析方程右侧, 前两项在经典流体动力学中很常见, 对它们积分, 可以得到连续性方程和欧拉 (Euler) 方程 (见练习 1). 第三项指出光子在膨胀的宇宙中损失能量. 在第 2 章中考虑测地线方程的时候得到过这些结论, 很快我们就会见识到玻尔兹曼方程的推导是怎样加强这些结论的. 最后, 最后两项表示低密度或高密度区域对光子分布函数的影响.

为了进一步的推导, 现在必须将光子的分布函数对于其零阶量 (玻尔兹曼–爱因斯坦方程) 作展开. 一开始的时候, 推导方式可能有些奇怪. 我们写出

$$f(\vec{x}, p, \hat{p}, t) = \left[\exp\left\{\frac{p}{T(t)(1+\Theta(\vec{x}, \hat{p}, t))}\right\} - 1\right]^{-1}. \tag{4.34}$$

这里零阶的温度 T 只是时间的函数 (正比于 a^{-1}), 与空间位置无关. 关于分布函数的扰动由 Θ 来描述, Θ 同样可以称为 $\delta T/T$. 在平滑的零阶宇宙中, 光子均匀分布, 所以 T 与 $\vec{x}$ 相互独立, 是各向同性的, 所以 T 也与光子的传播方向 $\hat{p}$ 相互独立. 现在我们希望描述在这个平滑宇宙上的扰动, 所以需要引入光子的非均匀分布 (Θ 依赖 $\vec{x}$) 和各向异性分布 (Θ 依赖 $\hat{p}$). 如 (4.34) 式所示，已经明确写出了 Θ 依赖 $\vec{x}$、$\hat{p}$ 和 t. 这假设了它并不依赖动量的大小 p. 我们马上就会看到这是一个合理的假设, 这是因为在康普顿散射过程中光子的动量大小保持不变. 由 Θ 是小量, 我们将 (4.34) 式展开成 (同样只保留到一阶项)

$$\begin{aligned} f &\simeq \frac{1}{\mathrm{e}^{p/T}-1} + \left(\frac{\partial}{\partial T}\left[\exp\left\{\frac{p}{T}\right\} - 1\right]^{-1}\right) T\Theta \\ &= f^{(0)} - p\frac{\partial f^{(0)}}{\partial p}\Theta. \end{aligned} \tag{4.35}$$

最后一行中, 将零阶的分布函数等价为零化学势的玻色–爱因斯坦分布,

$$f^{(0)} \equiv \left[\exp\left\{\frac{p}{T}\right\} - 1\right]^{-1}, \tag{4.36}$$

对于这个函数有 $T\partial f^{(0)}/\partial T = -p\partial f^{(0)}/\partial p$.

4.2.1 零阶玻尔兹曼方程

现在可以开始系统地从 (4.33) 式中提取出相同阶的项. 首先是零阶项, 不包含 Φ、Ψ 和 Θ. 这样得到

$$\left.\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t}\right|_{\text{zero order}} = \frac{\partial f^{(0)}}{\partial t} - Hp\frac{\partial f^{(0)}}{\partial p} = 0. \tag{4.37}$$

已经将 $\mathrm{d}f/\mathrm{d}t$ 设为零, 即将 (4.1) 式中右侧的碰撞项设为零. 原因是我们目前只是在讨论无碰撞的玻尔兹曼方程. 然而存在一个更加深刻的证明. 事实上, 即便顺便引入碰撞项, 我们也会发现不存在零阶的碰撞项. 也就是说, 这些碰撞项正比于 Θ 以及其他扰动小量. 这是由于一个深层的原因：零阶分布函数要满足碰撞项为零的要求. 换一种更熟悉的说法, 任何碰撞项都包含了正反应和逆反应的速率. 如果某种分布函数被设为其平衡态, 任何反应的速率与其逆反应的速率严格抵消. 如果某种成分不处于平衡态, 碰撞会使之趋于平衡态分布. 这也就是为什么我们一开始就

期待它是玻色–爱因斯坦分布. 对于它的观测, 证实了在早期宇宙的某一刻, 光子与电子曾紧密地耦合在一起.

回到 (4.37) 式, 重新把对时间的导数写成

$$\frac{\partial f^{(0)}}{\partial t}=\frac{\partial f^{(0)}}{\partial T}\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}t}=-\frac{\mathrm{d}T/\mathrm{d}t}{T}p\frac{\partial f^{(0)}}{\partial p}$$

这样零阶的方程变为

$$\left[-\frac{\mathrm{d}T/\mathrm{d}t}{T}-\frac{\mathrm{d}a/\mathrm{d}t}{a}\right]\frac{\partial f^{(0)}}{\partial p}=0. \tag{4.38}$$

故 $\mathrm{d}T/T=-\mathrm{d}a/a$, 即

$$T\propto\frac{1}{a}. \tag{4.39}$$

在 1.1 节中曾得到光子的波长随着宇宙的膨胀而被等比例地拉长这一结论. 在 2.1 节中我们进行了更严格地推导. 这一次也如期地得到了相同的结论. 这也让玻尔兹曼方程推导中得到的结果更令人信服.

4.2.2 一阶玻尔兹曼方程

现在我们回到 (4.33) 式，提取出温度分布偏离零阶项的方程, 即 Θ 的方程. 在 (4.33) 式中的每个 f 处插入 (4.35) 式的展开式：

$$\begin{aligned}\left.\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t}\right|_{\text{first order}}=&-p\frac{\partial}{\partial t}\left[\frac{\partial f^{(0)}}{\partial p}\Theta\right]-p\frac{\hat{p}^i}{a}\frac{\partial\Theta}{\partial x^i}\frac{\partial f^{(0)}}{\partial p}+Hp\Theta\frac{\partial}{\partial p}\left[p\frac{\partial f^{(0)}}{\partial p}\right]\\&-p\frac{\partial f^{(0)}}{\partial p}\left[\frac{\partial\Psi}{\partial t}+\frac{\hat{p}^i}{a}\frac{\partial\Psi}{\partial x^i}\right].\end{aligned} \tag{4.40}$$

考虑右边第一项, 时间的导数可以写为温度的导数, 故

$$\begin{aligned}-p\frac{\partial}{\partial t}\left[\frac{\partial f^{(0)}}{\partial p}\Theta\right]&=-p\frac{\partial f^{(0)}}{\partial p}\frac{\partial\Theta}{\partial t}-p\Theta\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}t}\frac{\partial^2 f^{(0)}}{\partial T\partial p}\\&=-p\frac{\partial f^{(0)}}{\partial p}\frac{\partial\Theta}{\partial t}+p\Theta\frac{\mathrm{d}T/\mathrm{d}t}{T}\frac{\partial}{\partial p}\left[p\frac{\partial f^{(0)}}{\partial p}\right].\end{aligned} \tag{4.41}$$

第二行的推导是因为 $\partial f^{(0)}/\partial T=-(p/T)\partial f^{(0)}/\partial p$. 第二行的第二项与 (4.40) 式右边第三项抵消, 所以最终可以写出扰动 Θ 的玻尔兹曼方程：

$$\left.\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t}\right|_{\text{first order}}=-p\frac{\partial f^{(0)}}{\partial p}\left[\frac{\partial\Theta}{\partial t}+\frac{\hat{p}^i}{a}\frac{\partial\Theta}{\partial x^i}+\frac{\partial\Psi}{\partial t}+\frac{\hat{p}^i}{a}\frac{\partial\Psi}{\partial x^i}\right]. \tag{4.42}$$

这里前两项计算了光子的 “自由流动”, 随宇宙演化, 它转化成小尺度上的各向异性. 后两项计算了引力的影响. 注意这里每次出现 x 的时候都乘以了因子 a, 这显然是因为 x 是共动距离, 而 ax 才是物理距离.

4.3 碰撞项: 康普顿散射

在这一节, 我们的任务是确定康普顿散射对光子分布函数的影响. 相关的散射过程是

$$\mathrm{e}^-(\vec{q}) + \gamma(\vec{p}) \leftrightarrow \mathrm{e}^-(\vec{q}\,') + \gamma(\vec{p}\,'), \tag{4.43}$$

这里我已经把每一个粒子的动量明确写出.

我们感兴趣的是动量为 $\vec{p}$(动量大小 p、方向 $\hat{p}$) 的光子的分布函数的变化. 所以必须对所有其他影响 $f(\vec{p})$ 的动量求和 ($\vec{q}$、$\vec{q}\,'$、$\vec{p}\,'$). 这样, 碰撞项可以示意性地写成

$$C|f(\vec{p})| = \sum_{\vec{q},\vec{q}\,',\vec{p}\,'} |\text{Amplitude}|^2 \{f_\mathrm{e}(\vec{q}\,')f(\vec{p}\,') - f_\mathrm{e}(\vec{q})f(\vec{p})\}. \tag{4.44}$$

这里的强度是可逆的, 所以它乘以了正反应和逆反应两项. 电子分布函数 f_e 和光子分布函数的乘积计算了在给定动量区间中粒子的数量. 这里忽略了受激辐射和泡利不相容原理, 否则分别应在对应的动量处引入因子 $1+f$ 和 $1-f_\mathrm{e}$. 在一阶近似下这样的假设是成立的. 在二阶近似下, 受激辐射不能忽略. 而泡利不相容原理在正负电子对湮灭后就已不再重要, 因为电子的填充数 f_e 非常小 (见练习 4).

不幸的是, 在对相空间积分的过程中需要引入因子 2π, 这时碰撞项变得比示意性的形式更复杂. 碰撞项可以明确写为①

$$\begin{aligned} C[f(\vec{p})] = \frac{1}{p}\int \frac{\mathrm{d}^3 q}{(2\pi)^3 2E_\mathrm{e}(q)} \int \frac{\mathrm{d}^3 q'}{(2\pi)^3 2E_\mathrm{e}(q')} \int \frac{\mathrm{d}^3 q'}{(2\pi)^3 2E_\mathrm{e}(p')} |\mathcal{M}|^2 (2\pi)^4 \\ \times \delta^3[\vec{p} + \vec{q} - \vec{p}\,' - \vec{q}\,'] \delta[E(p) + E_\mathrm{e}(q) - E(p') - E_\mathrm{e}(q')] \\ \times \{f_\mathrm{e}(\vec{q}\,')f(\vec{p}\,') - f_\mathrm{e}(\vec{q})f(\vec{p})\}. \end{aligned} \tag{4.45}$$

这里 δ 函数确保动量守恒. 这里的能量对于光子是相对论性的 $E(p) = p$, 而对于电子是非相对论性的 $E(p) = m_\mathrm{e} + q^2/(2m_\mathrm{e})$. 注意这里的碰撞项和第 3 章 (3.1) 式中碰撞项的相似之处. 唯一的区别是, 这里并未对光子动量 $\vec{p}$ 积分, 故只有三个动量积分. 这再一次反映了理解来自不同方向的光子如何相互作用的必要: 我们将会看到碰撞项依赖于 $\hat{p}$.

由于在我们感兴趣的时期 (任何时期), 电子的动能相比于它的静止能量已经很小, (4.45) 式的分母中的 E_e 项可以被 m_e 取代. 然后引入三维动量空间的 δ 函

① 除了一项 $1/p$, 绝大多数相空间的项与 3.1 节中的讨论类似. 你或许会注意到本章给出的玻尔兹曼方程的另外一个特征: 我开始时写到 $\mathrm{d}f/\mathrm{d}t$, 可是在广义相对论中, 为何不对仿射参量 λ 求导呢? 练习 5 解释了这一点.

数, 对 $\vec{q}'$ 积分, 得到

$$C[f(\vec{p})] = \frac{\pi}{4m_e^2 p}\int \frac{d^3q}{(2\pi)^3}\int \frac{d^3p'}{(2\pi)^3 p'}\delta\left[p + \frac{q^2}{2m_e} - p' - \frac{(\vec{q}+\vec{p}-\vec{p}\,')^2}{2m_e}\right] \\ \times |\mathcal{M}|^2\{f_e(\vec{q}+\vec{p}-\vec{p}\,')f(\vec{p}\,') - f_e(\vec{q})f(\vec{p})\}. \tag{4.46}$$

再下一步, 我们需要理解非相对论性的康普顿散射的运动学. 这个过程中最重要的特征就是, 只有非常少的能量被转移了, 即

$$E_e(q) - E_e(\vec{q}+\vec{p}-\vec{p}\,') = \frac{q^2}{2m_e} - \frac{(\vec{q}+\vec{p}-\vec{p}\,')^2}{2m_e} \\ \simeq \frac{(\vec{p}\,'-\vec{p})\cdot\vec{q}}{m_e}, \tag{4.47}$$

这里最后一步等式近似成立是因为 q 远大于 $\vec{p}$ 和 $\vec{p}\,'$. 在非相对论性的康普顿散射过程中, $p' \simeq p$, 即几乎是弹性碰撞. 这样, $p' - p$ 是 p 的量级, 也是周围温度 T 的量级. 故 (4.47) 式右边的量级是 $Tq/m_e \sim Tv_b$, 这里的重子物质速度 v_b 很小. 由于康普顿散射电子的能量变化的量级是 Tv_b, 而典型的电子动能也是 T 的量级, 所以电子在康普顿散射中相对能量变化非常小, 是 v_b 的量级. 这使得有必要去将电子的末动能 $(\vec{q}+\vec{p}-\vec{p}\,')^2/(2m_e)$ 相对于其零阶量 $q^2/(2m_e)$ 作展开.(4.46) 式中 δ 函数可以展开成

$$\delta\left[p + \frac{q^2}{2m_e} - p' - \frac{(\vec{q}+\vec{p}-\vec{p}\,')^2}{2m_e}\right] \\ \simeq \delta(p-p') + (E_e(q') - E_e(q))\frac{\partial\delta(p + E_e(q) - p' - E_e(q'))}{\partial E_e(q')}\Big|_{E_e(q)=E_e(q')} \\ = \delta(p-p') + \frac{(\vec{p}-\vec{p}\,')\cdot\vec{q}}{m_e}\frac{\partial\delta(p-p')}{\partial p'} \tag{4.48}$$

这里第二个等式成立利用了 $\partial f(x-y)/\partial x = -\partial f(x-y)/\partial y$. 一开始这一步展开看起来很不明确, 但是在对动量积分后,δ 函数的导数可以用分部积分计算. 这个展开式中, 利用 $f_e(\vec{q}+\vec{p}-\vec{p}\,') \simeq f_e(\vec{q})$, 碰撞项变为

$$C[f(\vec{p}\,')] = \frac{\pi}{4m_e^2 p}\int d^3q \frac{f_e(\vec{q})}{(2\pi)^3}\int \frac{d^3p'}{(2\pi)^3 p'}|\mathcal{M}|^2 \\ \times \left\{\delta(p-p') + \frac{(\vec{p}-\vec{p}\,')\cdot\vec{q}}{m_e}\frac{\partial\delta(p-p')}{\partial p'}\right\}\{f(\vec{p}\,') - f(\vec{p})\}. \tag{4.49}$$

进一步的推导需要康普顿散射的强度, 可以通过费曼定则计算得到, 文献 (Bjorken and Drell, 1965) 中有详细说明. 这里将其取为常数:

$$|\mathcal{M}|^2 = 8\pi\sigma_T m_e^2 \tag{4.50}$$

其中 σ_T 是汤姆孙散射截面. 在上式中存在两点错误. 其一, 平方强度是角度相关的, 正比于 $(1+\cos^2[\hat{p}\cdot\hat{p}'])$. 忽略这种角度相关性给最终的碰撞项带来了一些小小的偏差. 在 1% 的精度我们需要考虑这种角度相关性, 但是这样做反而转移了我们的注意力, 所以暂时忽略. 错误之二比较隐晦, 然而它却开启了 CMB 领域的一个崭新的分支. 详细的说, 平方强度有偏振相关性 ($\propto |\hat{\epsilon}\cdot\hat{\epsilon}'|^2$, 这里 $\hat{\epsilon}$ 和 $\hat{\epsilon}'$ 是入射和出射光子的偏振方向), 在这里我已经暗中将这种相关性积分掉了. 这种偏振相关性意味着：在小尺度上,CMB 会由于康普顿散射的效应而发生极化 (Bond and Efstathiou, 1984; Polnarev, 1985). 事实证明,CMB 偏振功率谱所携带的信息与温度功率谱所携带的信息同样有价值 (Seljak, 1997; Seljak and Zaldarriaga, 1997; Kamionkowski, Kosowsky and Stebbins, 1997a,b). 第 10 章将会详细地讨论这种偏振. 即使我们不关心偏振, 温度的各向异性也与偏振场耦合在一起, 所以, 对于前者的精确计算还是需要妥善处理后者的效应. 但是, 上式在推导碰撞项的时候还是暂时忽略这个微小的效应. 在康普顿散射中引入偏振相关性和角度相关性的过程很直接, 也很相似, 只是数学推导过程比较乏味.

一旦将 $|\mathcal{M}|^2$ 设为常数, (4.49) 式括号中的项就可以乘到外面, 同时只保留能量转移的一阶项. 同样地, 对 $\vec{q}$ 的积分得到一项 n_e ($\vec{q}/m_\mathrm{e}$ 的项得到 $n_\mathrm{e}\vec{v}_\mathrm{b}$). 故

$$
\begin{aligned}
C[f(\vec{p})] =& \frac{2\pi^2 n_\mathrm{e}\sigma_T}{p}\int\frac{\mathrm{d}^3p'}{(2\pi)^3p'}\left\{\delta(p-p')+(\vec{p}-\vec{p}\,')\cdot\vec{v}_\mathrm{b}\frac{\partial\delta(p-p')}{\partial p'}\right\}\\
&\times\left\{f(\vec{p}\,')-f(\vec{p})-p'\frac{\partial f^{(0)}}{\partial p'}\Theta(\hat{p}')+p\frac{\partial f^{(0)}}{\partial p}\Theta(\hat{p})\right\}\\
=& \frac{n_\mathrm{e}\sigma_T}{4\pi p}\int_0^\infty \mathrm{d}p'p'\int\mathrm{d}\Omega'\left[\delta(p-p')\left(-p'\frac{\partial f^{(0)}}{\partial p'}\Theta(\hat{p}')+p\frac{\partial f^{(0)}}{\partial p}\Theta(\hat{p})\right)\right.\\
&\left.+(\vec{p}-\vec{p}\,')\cdot\vec{v}_\mathrm{b}\frac{\partial\delta(p-p')}{\partial p'}(f^{(0)}(p')-f^{(0)}(p))\right]
\end{aligned}
\tag{4.51}
$$

其中, Ω' 是 $\hat{p}'$ 所呈的立体角, 在上式第一行, 将 $f(\vec{p}\,')-f(\vec{p})$ 写成零阶项[①], 它与 $\delta(p-p')$ 相乘时无贡献, 而一阶项与速度项相乘可以被忽略.

(4.51) 式中只有两项依赖于 $\hat{p}\,'$, 它们对立体角 Ω' 积分时不能看成常数. 其一是分布函数的扰动 $\Theta(\hat{p}\,')$. 这时, 可以很方便地定义

$$
\Theta_0(\vec{x},t)\equiv\frac{1}{4\pi}\int\mathrm{d}\Omega'\Theta(\hat{p}\,',\vec{x},t). \tag{4.52}
$$

Θ_0 不依赖于方向矢量, 它是对所有方向进行积分的结果. 换言之, 它是扰动的单极子. 注意：扰动的单极子并非温度分布的零阶量——后者在全空间是一个常数！而

① 注意到我们正同时展开为两个小量：微扰及微小的能量转移. 这里, 在微扰时, 将 $f(\vec{p}') - f(\vec{p})$ 拆分成零阶项和一阶项.

扰动 Θ_0 表示了给定的空间某点的单极子对其在全空间作平均的偏离. 我们之后会将 (4.52) 式一般化为其他多极子的形式.

其二是 $\hat{p}' \cdot \vec{v}_\mathrm{b}$ 项, 它对立体角 Ω' 积分时也不能看成常数. 在 $\vec{v}_\mathrm{b}$ 是一个固定量的时候, $\hat{p}' \cdot \vec{v}_\mathrm{b}$ 的积分为零. 故这一项对立体角的积分剩下

$$C[f(\vec{p})] = \frac{n_\mathrm{e}\sigma_T}{p}\int_0^\infty \mathrm{d}p'p'\left[\delta(p-p')\left(-p'\frac{\partial f^{(0)}}{\partial p'}\Theta_0 + p\frac{\partial f^{(0)}}{\partial p}\Theta(\hat{p})\right)\right.$$
$$\left. + \vec{p}\cdot\vec{v}_\mathrm{b}\frac{\partial\delta(p-p')}{\partial p'}(f^{(0)}(p') - f^{(0)}(p))\right]. \tag{4.53}$$

现在可以对 p' 积分了：上式第一行按部就班地对 δ 函数积分, 第二行选择分部积分, 得到

$$C[f(\vec{p})] = -p\frac{\partial f^{(0)}}{\partial p}n_\mathrm{e}\sigma_T[\Theta_0 - \Theta(\hat{p}) + \hat{p}\cdot\vec{v}_\mathrm{b}]. \tag{4.54}$$

现在已经可以预期康普顿散射对光子分布函数的影响了. 在电子的整体速度为零时 ($v_\mathrm{b} = 0$), 碰撞项使 Θ 趋于 Θ_0, 即当康普顿散射的效应非常强时, 只有单极子的扰动能够维持, 更高阶矩的扰动都被消除了 (图 4.3). 直观上理解, 强散射意味着光子平均自由程非常小. 所以, 如果康普顿散射很有效, 到达给定空间点的光子都是

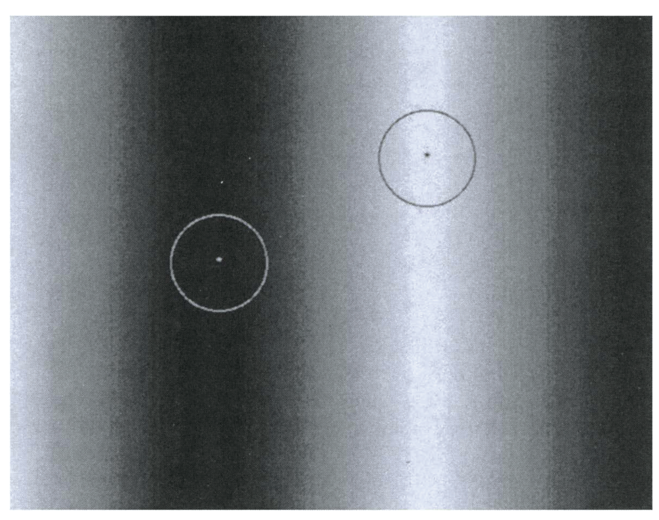


图 4.3　耦合的物质与光子的一个平面波扰动. 深 (浅) 色区域表示热 (冷) 的电子温度. 如果康普顿散射非常有效, 光子在离观测点很近的空间位置发生最后散射. 圆形表示在图中用 $*$ 标记的观测点的最后散射面. 在这个最后散射面上的温度几乎趋于均匀, 所以各点的分布函数几乎都是单极子. 注意：不同的圆 (对应不同观察者) 由于扰动拥有不同的温度, 所以说单极子在空间各点是变化的

被距离很近的电子所散射的. 这些很近的电子的温度极有可能与这个给定点所观测到的温度相近. 因此, 各方向到达的光子都拥有这个相同的温度. 这是单极子分布的特征：天空各方向的温度是均匀的.

如果电子拥有一个整体运动速度, 情况就不尽相同了. 这时, 光子会有一个固定在电子速度矢量 (大小和方向) 上的偶极子分布. 但是, 就算在这种情况下, 更高阶的矩也全部为零. 所以, 由于康普顿散射的影响产生了一个非常易于分类的光子分布：一个单极子和一个偶极子. 这也可以说, 光子表现为一种流体. 实际上, 强散射 (或强耦合) 使光子和电子表现为一种单一的流体.

4.4 光子的玻尔兹曼方程

现在我们可以将前两节讨论过的玻尔兹曼方程的左右两侧整合起来. 再加上几个定义, 就会完成本章的第一个目标 —— 描述光子扰动分布函数的线性方程. 由 (4.42) 式和 (4.54) 式可得

$$\frac{\partial\Theta}{\partial t}+\frac{\hat{p}^i}{a}\frac{\partial\Theta}{\partial x^i}+\frac{\partial\Phi}{\partial t}+\frac{\hat{p}^i}{a}\frac{\partial\Psi}{\partial x^i}=n_{\mathrm{e}}\sigma_T[\Theta_0-\Theta+\hat{p}\cdot\vec{v}_{\mathrm{b}}]. \tag{4.55}$$

这时可以很方便地重新引入在 (2.41) 式中定义的共形时间 η 作为时间变量. 玻尔兹曼方程用共形时间可以写成

$$\dot{\Theta}+\hat{p}^i\frac{\partial\Theta}{\partial x^i}+\dot{\Phi}+\hat{p}^i\frac{\partial\Psi}{\partial x^i}=n_{\mathrm{e}}\sigma_T a[\Theta_0-\Theta+\hat{p}\cdot\vec{v}_{\mathrm{b}}]. \tag{4.56}$$

从这以后, 在变量上方加一 “点” 表示对共形时间求导.

(4.56) 式是一个线性偏微分方程, 它将 Θ 与同样线性演化的量 Ψ、Φ 和 $\vec{v}_{\mathrm{b}}$ 联系起来. 如果我们对所有这些变量进行傅里叶变换, 则 $\partial/\partial x^i\to ik_i(\equiv k^i)$, 得到的傅里叶幅值遵循常微分方程更好求解. 在讨论均匀宇宙背景上的微扰情形时, 傅里叶变换还有一个附加的好处：由于背景是平滑的, (4.56) 式中唯一的 $\vec{x}$ 依赖性被隐藏在扰动变量本身中. 一般地, 有

$$aA(\vec{x})=bB(\vec{x}) \tag{4.57}$$

形式的方程, 经过傅里叶变换为

$$a\tilde{A}(\vec{k})=b\tilde{B}(\vec{k}). \tag{4.58}$$

即每一个傅里叶模都独立地进行演化：可以解出 $A(\vec{k}_1)$, 即使我们不知道 $A(\vec{k}_2)$ 的任何信息. 故将 (4.56) 式傅里叶变换, 得到了一系列关于傅里叶模的常微分方程, 而且这一系列方程是解耦合的. 我们可以分别求解关于每个 k-模式的方程.

请注意这样的简化是由于有微扰的假定 (等价于方程是线性的). 只有在这种情况下, 不同的傅里叶模才独立演化. 在宇宙演化的各个时期, 关于 CMB 的扰动始终很小, 所以傅里叶变换是十分有用的. 与之相比, 关于物质的扰动就非常复杂. 起初这些扰动很小, 甚至直到比较接近现在的时刻它们仍然很小. 当今宇宙最大的尺度仍然处于线性范围之内, 所以傅里叶变换在物质扰动的研究中还相当有用处. 然而, 试图描述当今完整的物质场还需要计算其非线性, 正因如此, 傅里叶变换失去了它的很多吸引力. 当非线性的现象开始变得更重要, 不同的傅里叶模开始相互耦合, 所以计算物质扰动演化至现在的程序都是在实空间运行的. 但这些程序的初始条件在 $z\sim 20$ 处也是由线性演化的结果设定.

定义傅里叶变换为

$$\Theta(\vec{x}) = \int \frac{\mathrm{d}^3 k}{(2\pi)^3} \mathrm{e}^{\mathrm{i}\vec{k}\cdot\vec{x}} \tilde{\Theta}(\vec{k}). \tag{4.59}$$

通常用波矢的模① $k=\sqrt{k^i k^i}$ 来描述一个傅里叶模.

在将 (4.56) 式写成傅里叶模之前, 最后定义两个量. 其一, 定义波矢 $\vec{k}$ 和光子传播方向 $\vec{p}$ 的余弦值为

$$\mu \equiv \frac{\vec{p}\cdot\hat{p}}{k}. \tag{4.60}$$

从现在起, 我们用 μ 描述光子的传播方向. 回顾图 4.3 可以很好地理解 μ 的意义. 波矢 $\vec{k}$ 指向温度变化的方向, 所以平行于温度梯度 ($\vec{k}$ 在图中是水平方向的). 当 $\mu=1$ 时, 光子的传播方向与 $\vec{k}$ 一致, 即光子沿温度变化的方向传播. 如果光子沿温度维持不变的方向传播 (图中竖直方向), 则 $\mu=0$. 通常假设重子在一点的速度与 $\vec{k}$ 方向一致 (等价于速度是无旋场), 所以 $\tilde{\vec{v}}_\mathrm{b}\cdot\tilde{p}=\tilde{v}_\mathrm{b}\mu$. 其二, 定义光深

$$\tau(\eta) \equiv \int_\eta^{\eta_0} \mathrm{d}\eta' n_\mathrm{e}\sigma_T a. \tag{4.61}$$

在宇宙演化晚期, 自由电子数密度很小, 故 $\tau\ll 1$; 而在早期,τ 很大. 注意到上式积分的定义使得

$$\dot{\tau} \equiv \frac{\mathrm{d}\tau}{\mathrm{d}\eta} = -n_\mathrm{e}\sigma_T a. \tag{4.62}$$

根据这些定义, 最终得到

$$\dot{\tilde{\Theta}} + \mathrm{i}k\mu\tilde{\Theta} + \dot{\tilde{\Phi}} + \mathrm{i}k\mu\tilde{\Psi} = -\dot{\tau}[\tilde{\Theta}_0 - \tilde{\Theta} + \mu\tilde{v}_\mathrm{b}]. \tag{4.63}$$

① 注意 k^i 是欧氏空间中的一个三维矢量, 故 $k^i=k_i$, 并不需要度规来进行指标升降. 速度 v_b^i 亦如此.

4.5 冷暗物质的玻尔兹曼方程

我们可以将前几节的推导应用到推导宇宙中其他任何物质的玻尔兹曼方程当中. 暗物质在宇宙中的演化非常重要. 在当今几乎所有流行的结构形成的模型中, 暗物质在结构形成和确定引力场方面起到了重要的作用.

也许引入能动张量的守恒性质会对推导暗物质的演化方程很有帮助, 就像在第 2 章均匀宇宙的讨论中所做的一样. 与光子不同, 暗物质永远表现得像流体, 所以可以完全用 $T_{\mu\nu}$ 描述. 然而, 在这里依然不惜麻烦地用玻尔兹曼方程的推导来得到暗物质的方程. 这样既可以强化前几节的计算, 同时给下一节电子和质子的方程推导奠定基础.

暗物质与光子的分布函数有相当多的不同之处. 首先, 从定义上说,“暗” 物质几乎不与宇宙中任何其他成分相互作用, 所以我们可以不用处理任何碰撞项. 其次, 不同于光子, 冷暗物质是非相对论性的. 所以我们要重新推导其运动学公式, 以决定玻尔兹曼方程左边的形式. 特别地,(4.11) 式的限制变成了

$$g_{\mu\nu}P^\mu P^\nu = -m^2 \tag{4.64}$$

其中 m 是暗物质粒子的质量. 同样有必要定义其能量为

$$E \equiv \sqrt{p^2 + m^2}, \tag{4.65}$$

其中 p 在 (4.13) 式中严格定义为 $p^2 = g_{ij}P^iP^j$. 当然, 在质量为零的情况下,(4.65) 式变为 $E = p$, 这时不再需要 E. 这里, 让 E 代替 p 成为分布函数依赖的一个变量是很方便的 (分布函数还依赖于位置 $\vec{x}$、时间 t 和方向矢量 $\hat{p}$). 现在可以推导有质量粒子的四动量在 (4.14) 式和 (4.19) 式的对应形式:

$$P^\mu = \left[E(1-\Psi), p\hat{p}^i\frac{1-\Phi}{a}\right]. \tag{4.66}$$

仅有时间分量与零质量粒子的方程不同, 即 E 替代了 p.

E 作为自变量之一使得暗物质分布函数的时间全导数 $f_{\rm dm}$ 变成

$$\frac{{\rm d}f_{\rm dm}}{{\rm d}t} = \frac{\partial f_{\rm dm}}{\partial t} + \frac{\partial f_{\rm dm}}{\partial x^i}\frac{{\rm d}x^i}{{\rm d}t} + \frac{\partial f_{\rm dm}}{\partial E}\frac{{\rm d}E}{{\rm d}t} + \frac{\partial f_{\rm dm}}{\partial \hat{p}^i}\frac{{\rm d}\hat{p}^i}{{\rm d}t}. \tag{4.67}$$

同样的, 上式最后一项是两个一阶项的乘积, 可以忽略掉. 由于限制 (4.64) 式, 分布函数对 x^i 和 E 的偏导数的系数与零质量的情况略有不同. 通过与 4.2 节类似的推导, 得到了非相对论性物质无碰撞的玻尔兹曼方程:

$$\frac{\partial f_{\rm dm}}{\partial t} + \frac{\hat{p}^i}{a}\frac{p}{E}\frac{\partial f_{\rm dm}}{\partial x^i} - \frac{\partial f_{\rm dm}}{\partial E}\left[\frac{{\rm d}a/{\rm d}t}{a}\frac{p^2}{E} + \frac{p^2}{E}\frac{\partial\Phi}{\partial t} + \frac{\hat{p}^ip}{a}\frac{\partial\Psi}{\partial x^i}\right] = 0. \tag{4.68}$$

必然地, (4.33) 式是 (4.68) 式在质量为零的情况下的特例. 两式主要的差别在于速度因子 p/E. 我们在之后会看到, 对于暗物质粒子, p/E 的存在压制了任何自由流动现象.

对于零质量的情况, 接下来的推导利用了分布函数的知识 (已知形式), 即我们已知其零阶分布是玻色–爱因斯坦分布, 然后在其上增加扰动. 对于冷暗物质粒子, 不需要其零阶分布函数这样详细的信息, 只需知道这些粒子是非相对论性的. 所以暗物质的热运动可以被忽略 (见练习 9). 然而我们不能完全忽略 p/m, 因为密度扰动本身通过连续性方程引起暗物质中的速度流. 这样的速度流产生了 $p/m \sim v$ 项, 必须保留. 我们只能在线性推导中忽略 p/E 的二阶项.

我们并不直接假定 $f_{\rm dm}$ 形式, 而是提取 (4.68) 式的各阶矩. 首先, 两边同乘以相空间体元 $\mathrm{d}^3p/(2\pi)^3$, 然后积分. 得到

$$\frac{\partial}{\partial t}\int\frac{\mathrm{d}^3p}{(2\pi)^3}f_{\rm dm}+\frac{1}{a}\frac{\partial}{\partial x^i}\int\frac{\mathrm{d}^3p}{(2\pi)^3}f_{\rm dm}\frac{p\hat{p}^i}{E}-\left[\frac{\mathrm{d}a/\mathrm{d}t}{a}+\frac{\partial\Phi}{\partial t}\right]\int\frac{\mathrm{d}^3p}{(2\pi)^3}\frac{\partial f_{\rm dm}}{\partial E}\frac{p^2}{E}$$
$$-\frac{1}{a}\frac{\partial\Psi}{\partial x^i}\int\frac{\mathrm{d}^3p}{(2\pi)^3}\frac{\partial f_{\rm dm}}{\partial E}\hat{p}^ip=0. \tag{4.69}$$

注意到由于它们是独立变量, 因此对 p 的积分可以贯穿对 x^i 和 t 的偏导. 这里最后一项可以忽略. 因为只有 $f_{\rm dm}$ 的扰动部分对方向矢量的积分不为零, 故这个积分得到一个一阶量, 乘以同为一阶量的 $\partial\Psi/\partial x^i$. 剩下的项都要保留. 简单起见, 重新引入暗物质密度①

$$n_{\rm dm}=\int\frac{\mathrm{d}^3p}{(2\pi)^3}f_{\rm dm} \tag{4.70}$$

暗物质的速度定义为

$$v^i\equiv\frac{1}{n_{\rm dm}}\int\frac{\mathrm{d}^3p}{(2\pi)^3}f_{\rm dm}\frac{p\hat{p}^i}{E}. \tag{4.71}$$

这样 (4.69) 式前两项就可以用速度和密度表达. 第三项比较隐晦, 要将其与密度相关联, 需要分部积分. 由于 $\mathrm{d}E/\mathrm{d}p=p/E$, 被积函数可写为 $p\partial f_{\rm dm}/\partial p$. 这样, 积分变为

$$\begin{aligned}\int\frac{\mathrm{d}^3p}{(2\pi)^3}p\frac{\partial f_{\rm dm}}{\partial p}&=\frac{4\pi}{(2\pi)^3}\int_0^\infty\mathrm{d}p p^3\frac{\partial f_{\rm dm}}{\partial p}\\&=-3\frac{4\pi}{(2\pi)^3}\int_0^\infty\mathrm{d}p p^2f_{\rm dm}\\&=-3n_{\rm dm}.\end{aligned} \tag{4.72}$$

故玻尔兹曼方程的单极矩导致了连续性方程在宇宙学意义上的推广:

$$\frac{\partial n_{\rm dm}}{\partial t}+\frac{1}{a}\frac{\partial(n_{\rm dm}v^i)}{\partial x^i}+3\left[\frac{\mathrm{d}a/\mathrm{d}t}{a}+\frac{\partial\Phi}{\partial t}\right]n_{\rm dm}=0. \tag{4.73}$$

① 这里将自旋简并 $g_{\rm dm}$ 归入到相空间分布函数 $f_{\rm dm}$ 当中. 在本章最后一节对电子也做同样的处理.

前两项是流体力学连续性方程中标准的两项. 最后一项是由于 FRW 度规和其扰动导致的.

为了更进一步, 将 (4.73) 式中的零阶项和一阶项提取出来. 速度和 Φ 都是一阶量, 零阶项只剩下

$$\frac{\partial n_{\rm dm}^{(0)}}{\partial t}+3\frac{{\rm d}a/{\rm d}t}{a}n_{\rm dm}^{(0)}=0 \tag{4.74}$$

这里 $n_{\rm dm}^{(0)}$ 是零阶、均匀的暗物质密度. 上式等价于

$$\frac{{\rm d}(n_{\rm dm}^{(0)}a^3)}{{\rm d}t}=0\Longrightarrow n_{\rm dm}^{(0)}\propto a^{-3}, \tag{4.75}$$

一个在第 1 章中就期待得到的宇宙膨胀的推论. 在第 2 章中通过能动张量的守恒也得到了这样的关系式.

现在让我们提取 (4.73) 式中的一阶项. 所有的 $n_{\rm dm}$ 乘以一阶量 v 或 Φ 都应设为 $n_{\rm dm}^{(0)}$. 其余处将 $n_{\rm dm}$ 展开成包含一阶扰动的形式. 设

$$n_{\rm dm}=n_{\rm dm}^{(0)}[1+\delta(\vec{x},t)], \tag{4.76}$$

这里定义一阶项为 $n_{\rm dm}^{(0)}\delta$. 由于物质的能量密度等于质量乘以 n, 所以 δ 同样是暗物质的密度起伏 $\delta\rho/\rho$. 除以 $n_{\rm dm}^{(0)}$ 之后, 一阶项的方程写为

$$\frac{\partial\delta}{\partial t}+\frac{1}{a}\frac{\partial v^i}{\partial x^i}+3\frac{\partial\Phi}{\partial t}=0. \tag{4.77}$$

现在来看, 我们已经引入了两个新的暗物质扰动变量: 密度扰动 δ 和速度 $\vec{v}$. (4.77) 式只是描述这两个扰动变量的方程之一. 我们需要另外一个方程来求解这两个变量. 为了得到另外一个方程, 回到未积分的玻尔兹曼方程 (4.68) 式. 我们刚提取了它的单极矩, 为了得到第二个方程, 需要提取它的一阶矩. 将 (4.68) 式乘以 ${\rm d}^3p(p/E)\hat{p}^j/(2\pi)^3$, 然后积分, 得到一阶矩的方程

$$\begin{aligned}0=&\frac{\partial}{\partial t}\int\frac{{\rm d}^3p}{(2\pi)^3}f_{\rm dm}\frac{p\hat{p}^j}{E}+\frac{1}{a}\frac{\partial}{\partial x^i}\int\frac{{\rm d}^3p}{(2\pi)^3}f_{\rm dm}\frac{p^2\hat{p}^i\hat{p}^j}{E^2}\\&-\left[\frac{{\rm d}a/{\rm d}t}{a}+\frac{\partial\Phi}{\partial t}\right]\int\frac{{\rm d}^3p}{(2\pi)^3}\frac{\partial f_{\rm dm}}{\partial E}\frac{p^3\hat{p}^j}{E^2}-\frac{1}{a}\frac{\partial\Psi}{\partial x^i}\int\frac{{\rm d}^3p}{(2\pi)^3}\frac{\partial f_{\rm dm}}{\partial E}\frac{\hat{p}^i\hat{p}^jp^2}{E}.\end{aligned} \tag{4.78}$$

前两项很简单: 第一项是$n_{\rm dm}v^i$的时间导数, 第二项可以被忽略掉, 因为它是$\langle(p/E)^2\rangle$的量级. 后面的几项由于偏导数的存在需要小心处理. 由 $(p/E)\partial/\partial E=\partial/\partial p$, 第三

项实际上是 p/E 的量级, 而最后一项与速度相互独立. 将第三项分部积分:

$$\int \frac{\mathrm{d}^3p}{(2\pi)^3}\frac{\partial f_{\mathrm{dm}}}{\partial p}\frac{p^2\hat{p}^j}{E} = \int \frac{\mathrm{d}\Omega\hat{p}^j}{(2\pi)^3}\int_0^\infty \mathrm{d}p\frac{p^4}{E}\frac{\partial f_{\mathrm{dm}}}{\partial p}$$
$$= -\int \frac{\mathrm{d}\Omega\hat{p}^j}{(2\pi)^3}\int_0^\infty \mathrm{d}p f_{\mathrm{dm}}\left(\frac{4p^3}{E}-\frac{p^5}{E^3}\right). \tag{4.79}$$

p^5/E^3 可以完全被忽略, 所以唯一对积分有贡献的一项来自 $-4p^3/E$: 其积分是 $-4n_{\mathrm{dm}}v^j$. 对 (4.78) 式最后一项做同样的处理, 并利用

$$\int \mathrm{d}\Omega\hat{p}^i\hat{p}^j = \delta^{ij}\frac{4\pi}{3}. \tag{4.80}$$

得到玻尔兹曼方程的一阶矩

$$\frac{\partial(n_{\mathrm{dm}}v^j)}{\partial t} + 4\frac{\mathrm{d}a/\mathrm{d}t}{a}n_{\mathrm{dm}}v^j + \frac{n_{\mathrm{dm}}}{a}\frac{\partial\Psi}{\partial x^j} = 0. \tag{4.81}$$

在这个方程中不含零阶项, 因为速度是一个一阶量. 所以我们只需要提取一阶的项, 这样可以设 $n_{\mathrm{dm}} \to n_{\mathrm{dm}}^{(0)}$. 利用 (4.75) 式中的关系, 得到

$$\frac{\partial v^j}{\partial t} + \frac{\mathrm{d}a/\mathrm{d}t}{a}v^j + \frac{1}{a}\frac{\partial\Psi}{\partial x^j} = 0. \tag{4.82}$$

(4.77) 式和 (4.82) 式是描述冷暗物质密度和速度演化的两个方程. 动量守恒方程 (4.82) 式并没有标准的 $(\vec{v}\cdot\nabla)\vec{v}$ 一项, 因为拥有两个因子 v 的项显然是二阶项. 这两个方程有一个有趣的特点: 将玻尔兹曼方程积分可以得到流体方程. 注意, 描述密度的方程取决于更高阶的矩——速度. 更普遍地, 积分得到玻尔兹曼方程的 l 阶矩, 需要玻尔兹曼方程的 $l+1$ 阶矩. 原理上, 这样的积分过程需要无限序列的分布函数的矩. 实际上, 在后面将会看到这是解光子玻尔兹曼方程 (4.63) 式的一种方法, 到目前我们还未对其积分. 你也许会预期, 描述速度的方程应依赖于暗物质分布更高阶的矩——四极子. 但事实并非如此, 因为我们考虑的是 "冷" 暗物质, 已经将 $(p/E)^2$ 和更高阶的量忽略掉了. 这些项对应于分布函数更高阶的矩, 与冷暗物质不相关. 因此,(4.77) 式和 (4.82) 式已经能够完备地描述冷暗物质的分布①. 若考虑到小质量的暗物质粒子, 如有质量的中微子, 这些高阶矩还是应该保留的.

最后将 (4.77) 式和 (4.82) 式写成共形时间 η 和傅里叶变换的形式, 密度方程化为

$$\dot{\tilde{\delta}} + \mathrm{i}k\tilde{v} + 3\dot{\tilde{\Phi}} = 0 \tag{4.83}$$

这里假设速度是无旋场, 即 $\tilde{v}^i = (k^i/k)\tilde{v}$. 速度方程化为

$$\dot{\tilde{v}} + \frac{\dot{a}}{a}\tilde{v} + \mathrm{i}k\tilde{\Psi} = 0. \tag{4.84}$$

① 当然, 还需要引力势 Φ 和 Ψ 的方程, 它们来自于爱因斯坦场方程, 正如对于 a 的零阶方程.

4.6 重子物质的玻尔兹曼方程

玻尔兹曼方程中还需要宇宙中的其他成分：电子和质子. 这两者通常合称**重子**, 这样的命名显然有些可笑 (电子是轻子而非重子), 但这种命名已经成为习惯.

电子和质子通过库仑散射 ($\mathrm{e}+\mathrm{p}\rightarrow\mathrm{e}+\mathrm{p}$) 耦合在一起. 在所涉及的宇宙演化的各个时期, 库仑散射率都远大于宇宙的膨胀率 (见练习 12). 这样强的耦合使电子和质子的密度反差为同一个值：

$$\frac{\rho_{\mathrm{e}}-\rho_{\mathrm{e}}^{(0)}}{\rho_{\mathrm{e}}^{(0)}}=\frac{\rho_{\mathrm{p}}-\rho_{\mathrm{p}}^{(0)}}{\rho_{\mathrm{p}}^{(0)}}\equiv\delta_{\mathrm{b}} \tag{4.85}$$

这里应用角标 “b” 表示重子物质. 类似地它们的速度也同为一个值,

$$\vec{v}_{\mathrm{e}}=\vec{v}_{\mathrm{p}}\equiv\vec{v}_{\mathrm{b}}. \tag{4.86}$$

我们需要推导出关于 δ_{b} 和 $\vec{v}_{\mathrm{b}}$ 的方程组. 从电子和质子的未积分的玻尔兹曼方程开始：

$$\frac{\mathrm{d}f_{\mathrm{e}}(\vec{x},\vec{q},t)}{\mathrm{d}t}=\langle c_{\mathrm{ep}}\rangle_{QQ'q'}+\langle c_{\mathrm{e}\gamma}\rangle_{pp'q'} \tag{4.87}$$

$$\frac{\mathrm{d}f_{\mathrm{p}}(\vec{x},\vec{Q},t)}{\mathrm{d}t}=\langle c_{\mathrm{ep}}\rangle_{qq'Q'}. \tag{4.88}$$

这里的记号与前几节相比, 显得异常简洁, 也许会很有欺骗性. 之后的叙述还要沿用这种简洁性, 所以在这里需要仔细解释. 首先, 注意光子的初、末动量分别是 $\vec{p}$ 和 $\vec{p}\,'$, 电子的初、末动量分别是 $\vec{q}$ 和 $\vec{q}\,'$, 质子的初、末动量分别是 $\vec{Q}$ 和 $\vec{Q}\,'$. 在电子分布函数的方程中的康普顿散射项中, 定义了未积分的碰撞项为

$$C_{\mathrm{e}\gamma}\equiv(2\pi)^4\delta^4(p+q-p'-q')\frac{|\mathcal{M}|^2}{8E(p)E(p')E_{\mathrm{e}}(q)E_{\mathrm{e}}(q')}\{f_{\mathrm{e}}(q')f_{\gamma}(p')-f_{\mathrm{e}}(q)f_{\gamma}(p)\} \tag{4.89}$$

这里的尖括号表示对在其角标上的所有动量积分：

$$\langle(\ldots)\rangle_{pp'q'}\equiv\int\frac{\mathrm{d}^3p}{(2\pi)^3}\int\frac{\mathrm{d}^3p'}{(2\pi)^3}\int\frac{\mathrm{d}^3q'}{(2\pi)^3}(\ldots). \tag{4.90}$$

而库仑散射项也是类似的, 唯一的区别在于这两个过程的强度.

理论上 (4.88) 式应包含质子对光子的散射项. 但这种散射的散射截面远小于康普顿散射 (电子对光子的散射) 的散射截面 (在这两种散射中, 散射截面都反比于质量的平方). 因此, 电子–质子流体与光子的相互作用主要取决于康普顿散射, 而质子–光子的散射可以忽略掉. 同样, 从理论上在 (4.87) 式和 (4.88) 式中应该加

入电离和再复合的项. 然而这只不过是分散我们的注意力, 故我们把电子都当成电离的.

根据这些记号的定义, 我们可以继续推导关于 δ_{b} 和 v_{b} 的方程组. 首先, 将 (4.87) 式两边同乘相空间体积微元 $\mathrm{d}^3q/(2\pi)^3$ 然后积分. 等号左边变成与推导过的暗物质方程 (4.73) 相同的形式. 所以可以立即写出

$$\frac{\partial n_{\mathrm{e}}}{\partial t}+\frac{1}{a}\frac{\partial(n_{\mathrm{e}}v_{\mathrm{b}}^i)}{\partial x^i}+3\left[\frac{\mathrm{d}a/\mathrm{d}t}{a}+\frac{\partial\Phi}{\partial t}\right]n_{\mathrm{e}}=\langle c_{\mathrm{ep}}\rangle_{QQ'q'q}+\langle c_{\mathrm{e}\gamma}\rangle_{pp'q'q}. \tag{4.91}$$

可以从数学上证明等号右边两项均为零. 例如, 等号右边第一项, 在交换 $Q\leftrightarrow Q'$ 和 $q\leftrightarrow q'$ 下是对称的. 又因为被积函数 c_{ep} 在这样的交换下是反对称的, 故积分只能为零. 更直观地, 我们所考虑的散射过程确保电子数守恒, 所以碰撞项不会对 $\mathrm{d}n/\mathrm{d}t$ 有贡献, 即对 $f_{\mathrm{e}}(q')f_{\mathrm{p}}(Q')$ 的积分计算了在库仑散射中产生的电子数, 而它显然等于对 $f_{\mathrm{e}}(q)f_{\mathrm{p}}(Q)$ 的积分——在库仑散射过程中丢失的电子数. 更一般地, 每当用一个守恒量乘以未积分的碰撞项, 然后积分, 结果一定为零.

所以,(4.91) 式的扰动形式与 (4.77) 式相同. 变换到傅里叶空间并用共形时间, 得到

$$\dot{\tilde{\delta}}_{\mathrm{b}}+\mathrm{i}k\tilde{v}_{\mathrm{b}}+3\dot{\tilde{\Phi}}=0. \tag{4.92}$$

重子物质的第二个方程由提取 (4.87) 式和 (4.88) 式的一阶矩并相加得到. 同暗物质的推导类似, 在那里我们先乘以 $\vec{p}/E$ 然后对所有动量积分; 而在这里, 我们先用 $\vec{q}$ 乘以未积分的方程 (4.91)(对于质子的方程乘以 $\vec{Q}$). 这样, 暗物质方程直到乘以 m 才能得到其结果. 积分后的电子的方程左边, 除了未乘一项 m_{e}, 与 (4.81) 式的左边完全相同. 而同样的, 质子的方程需要乘以 m_{p}. 由于质子的质量远大于电子的质量, 两式左边相加的结果主要是质子的方程的贡献. 所以, 依据 (4.81) 式, 得到

$$\begin{aligned}&m_{\mathrm{p}}\frac{\partial(n_{\mathrm{b}}v_{\mathrm{b}}^j)}{\partial t}+4\frac{\mathrm{d}a/\mathrm{d}t}{a}m_{\mathrm{p}}n_{\mathrm{b}}v_{\mathrm{b}}^j+\frac{m_{\mathrm{p}}n_{\mathrm{b}}}{a}\frac{\partial\Psi}{\partial x^i}\\&=\langle c_{\mathrm{eq}}(q^j+Q^j)\rangle_{QQ'q'q}+\langle c_{\mathrm{e}\gamma}q^j\rangle_{pp'q'q}.\end{aligned} \tag{4.93}$$

这里等号右边是质子方程和电子方程相加的结果. 每个方程都有库仑散射项, 给予它们不同的权重: $\vec{q}\times$ 电子方程 $+\vec{Q}\times$ 质子方程. 而仅电子方程有康普顿散射项, 故这里只有一项 $\vec{q}$. 我们可以再一次利用守恒原理 (这一次是动量守恒) 证明 $c_{\mathrm{ep}}(\vec{q}+\vec{Q})$ 对所有动量的积分为零. 等号两边同除以①$\rho_{\mathrm{b}}=m_pn_{\mathrm{b}}^{(0)}$, 得到

$$\frac{\partial v_{\mathrm{b}}^j}{\partial t}+\frac{\mathrm{d}a/\mathrm{d}t}{a}v_{\mathrm{b}}^j+\frac{1}{a}\frac{\partial\Psi}{\partial x^j}=\frac{1}{\rho_{\mathrm{b}}}\langle c_{\mathrm{e}\gamma}q^j\rangle_{pp'q'q}. \tag{4.94}$$

① 注意这里的习惯,ρ_{b} 是零阶重子物质的密度, 而重子物质的总密度应是 $\rho_{\mathrm{b}}(1+\delta_{\mathrm{b}})$, 在后面将沿用这样的习惯.

在这里利用了熟悉的关系式 $n_{\rm b}^{(0)} \propto a^{-3}$ 消去 $n_{\rm b}^{(0)}$ 的时间导数和左边四个 $\mathrm{d}a/\mathrm{d}t$ 项中的三个.

最后一步是计算康普顿散射过程中动量 $\vec{q}$ 的平均值. 与前面一样, 利用系统的总动量 $\vec{q}+\vec{p}$ 守恒, 得到

$$\langle c_{\rm e\gamma}\vec{q}\rangle_{pp'q'q} = -\langle c_{\rm e\gamma}\vec{p}\rangle_{pp'q'q}. \tag{4.95}$$

现在变换 (4.94) 式到傅里叶空间并两边同乘以 $\hat{k}^j$. 由 $\hat{k}\cdot\vec{p}=p\mu$,(4.94) 式右边变成 $-\langle c_{\rm e\gamma}p\mu\rangle_{pp'q'q}/\rho_{\rm b}$. 我们已经在 (4.54) 式中计算过 $\langle c_{\rm e\gamma}\rangle_{p'q'q}$. 现在只需要乘以 $p\mu$, 然后对 $\vec{p}$ 积分, (4.94) 式的右边得到

$$\begin{aligned} -\frac{\langle c_{\rm e\gamma}p\mu\rangle_{pp'q'q}}{\rho_{\rm b}} &= \frac{n_{\rm e}\sigma_T}{\rho_{\rm b}}\int\frac{\mathrm{d}^3p}{(2\pi)^3}p^2\frac{\partial f^{(0)}}{\partial p}\mu[\tilde{\Theta}_0-\tilde{\Theta}(\mu)+\tilde{v}_{\rm b}\mu] \\ &= \frac{n_{\rm e}\sigma_T}{\rho_{\rm b}}\int_0^\infty\frac{\mathrm{d}p}{2\pi^2}p^4\frac{\partial f^{(0)}}{\partial p}\int_{-1}^1\frac{\mathrm{d}\mu}{2}\mu[\tilde{\Theta}_0-\tilde{\Theta}(\mu)+\tilde{v}_{\rm b}\mu]. \end{aligned} \tag{4.96}$$

对 p 的积分由分部积分得到, 为 $-4\rho_\gamma$, 第一项、第三项对 μ 的积分很简单 (第一项积分为零, 第三项积分得到 $v_{\rm b}/3$). 第二项是扰动 Θ 的一阶矩. 之前定义其单极矩为 Θ_0. 这样很自然地在这里定义其一阶矩为

$$\Theta_1 \equiv \mathrm{i}\int_{-1}^1\frac{\mathrm{d}\mu}{2}\mu\Theta(\mu) \tag{4.97}$$

这里习惯性地加入因子 i. 上式的定义在实空间和傅里叶空间都成立.

现在我们得到了碰撞项的表达式, 将其代入 (4.94) 式中, 并变换到傅里叶空间, 采用共形时间, 得到

$$\dot{\tilde{v}}_{\rm b}+\frac{\dot{a}}{a}\tilde{v}_{\rm b}+\mathrm{i}k\tilde{\Psi}=\dot{\tau}\frac{4\rho_\gamma}{3\rho_b}[3\mathrm{i}\tilde{\Theta}_1+\tilde{v}_{\rm b}]. \tag{4.98}$$

为何有一项 $\rho_{\rm b}$ 在分母中呢? 换句话说, 既然光子主要被电子散射, 为何重子物质密度 (主要由质子占据质量) 会出现在速度方程中? 从物理上解释, 这是因为移动电子非常困难, 电子经由康普顿散射牢牢地与质子耦合. 若质子质量无限大,$\rho_{\rm b}\to\infty$, 康普顿散射根本就不会改变电子的速度, 不会对质子–电子流体产生任何影响. 推导 (4.98) 式过程中设 $n_{\rm e}=n_{\rm p}=n_{\rm b}$, 但是在有中性氢存在, 即 $n_{\rm e}\neq n_{\rm b}$ 的情况下, (4.98) 式仍然成立. 实际上在再复合过程之后, 大多数质子束缚在中性氢原子核中. 甚至在再复合过程之前, 也有一小部分质子在氦原子或离子中. 你也许会考虑将 (4.98) 式分母中的 $\rho_{\rm b}$ 替换为自由质子的密度, 然而实际上, 即使中性氢、氦与电子、质子仅仅耦合 (见练习 12), 所有的重子也应被包括进来.(4.98) 式非常普遍地控制了重子速度的演化.

4.7 小　　结

宇宙中的各种成分并非在空间完全地均匀分布. 对于诸如暗物质、重子物质这样非相对论性的成分, 这意味着某些区域比其他区域密度更大, 以及在空间存在小的连贯的速度. 对于暗物质, 我们将这种密度起伏记为 $\delta(\vec{x},t)$, 其速度记为 $\vec{v}(\vec{x},t)$. 对于重子物质这些扰动记为 $\delta_{\rm b}(\vec{x},t)$ 和 $\vec{v}_{\rm b}(\vec{x},t)$. 在求解这些线性演化的方程时, 最简单的方法是处理它们的傅里叶变换. 波矢 $\vec{k}$ 代表的傅里叶模的演化只取决于 $\vec{k}$ 的大小, 所以我们求解方程 $\tilde{\delta}(k,t)$. 我们发现用共形时间 η 当作演化变量很方便. 还有, 在文献中通常[1]对变量的傅里叶变换不标记 "∼" 符号. 因此以后在方程中将写为 $\delta(k,\eta)$、$\delta_{\rm b}(k,\eta)$、$v(k,\eta)$ 和 $v_{\rm b}(k,\eta)$. 这里的标量速度是速度平行于 $\vec{k}$ 的分量, 它们是宇宙学相关的量.

对于光子、中微子这样相对论性的粒子需要更多的信息来描述. 它们不仅仅有单极子扰动 (等价于密度扰动) 和偶极子扰动 (等价于速度), 而且还有四极子、八极子和更高阶矩的扰动. 换言之, 光子的分布不仅取决于 $\vec{x}$ 和时间, 还取决于光子的传播方向 $\hat{p}$. 故在傅里叶空间, 光子分布不仅取决于 k 和 η, 还取决于 $\mu\equiv\hat{p}\cdot\hat{k}$. 所以光子扰动的变量是 $\Theta(k,\mu,\eta)$, 即温度反差比例 $\delta T/T$ 的傅里叶变换. 中微子的扰动取决于同样的变量, 我们将之记为 $\mathcal{N}(k,\mu,\eta)$.

定义光子的单极子 ((4.52) 式) 和偶极子 ((4.97) 式) 非常有用, 而一阶矩 $\Theta_0(k,\mu)$ 和二阶矩 $\Theta_1(k,\mu)$ 并不能完全描述光子的分布. 更一般地, 有必要定义温度场更高阶矩的多极子为

$$\Theta_l\equiv\frac{1}{-{\rm i}^l}\int_{-1}^{1}\frac{{\rm d}\mu}{2}\mathcal{P}_l(\mu)\Theta(\mu),\tag{4.99}$$

其中 $\mathcal{P}_l$ 是 l 阶勒让德多项式. 四极子对应 $l=2$, 八极子对应 $l=3$, 以此类推. 更高阶的勒让德多项式拥有更小尺度的结构 (见图 4.4), 故更高阶的矩提取了温度场更小尺度结构的信息. 所以, 光子的扰动既可以用 $\Theta(k,\mu,\eta)$, 也可以用所有的矩 $\Theta_l(k,\eta)$ 来描述, 而且这对中微子的分布也适用.

我已经将偏振部分的讨论推迟到第 10 章, 但在 4.3 节中也提到, 对温度各向异性完整、正确的处理需要加入偏振效应. 在第 10 章给出更加正规的定义之前, 先将偏振的强度记为 Θ_P. 它描述了偏振场在空间的变化. 在傅里叶变换后, 它同样依赖于 k、μ 和 η.

现在总结推导出光子、暗物质、重子物质的玻尔兹曼方程, 并补充上中微子的玻尔兹曼方程如下：

$$\dot{\Theta}+{\rm i}k\mu\Theta=-\dot{\Phi}-{\rm i}k\mu\Psi-\dot{\tau}\left[\Theta_0-\Theta+\mu v_{\rm b}-\frac{1}{2}\mathcal{P}_2(\mu)\Pi\right]\tag{4.100}$$

[1] 一位早期的审稿人很讨厌这样的书写习惯.

$$\Pi = \Theta_2 + \Theta_{P2} + \Theta_{P0} \tag{4.101}$$

$$\dot{\Theta}_P + \mathrm{i}k\mu\Theta_P = -\dot{\tau}\left[-\Theta_P + \frac{1}{2}(1-\mathcal{P}_{\in}(\mu))\Pi\right] \tag{4.102}$$

$$\dot{\delta} + \mathrm{i}kv = -3\dot{\Phi} \tag{4.103}$$

$$\dot{v} + \frac{\dot{a}}{a}v = -\mathrm{i}k\Psi \tag{4.104}$$

$$\dot{\delta}_{\mathrm{b}} + \mathrm{i}kv_{\mathrm{b}} = -3\dot{\Phi} \tag{4.105}$$

$$\dot{v}_b + \frac{\dot{a}}{a}v_{\mathrm{b}} = -\mathrm{i}k\Psi + \frac{\dot{\tau}}{R}[v_{\mathrm{b}} + 3\mathrm{i}\Theta_1] \tag{4.106}$$

$$\dot{\mathcal{N}} + \mathrm{i}k\mu\mathcal{N} = -\dot{\Phi} - \mathrm{i}k\mu\Psi. \tag{4.107}$$

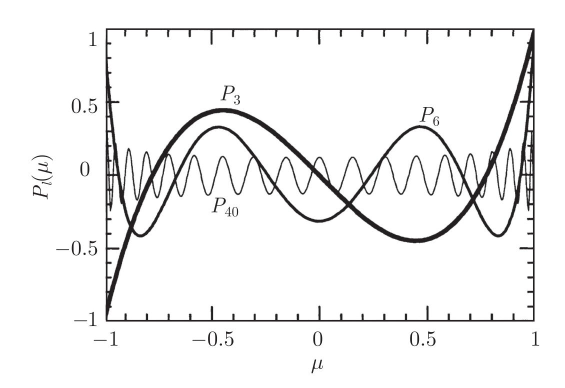


图 4.4　勒让德多项式. 相比于低阶勒让德多项式, 高阶勒让德多项式只在小尺度变化. 一般地, 在 −1 到 1 之间, $\mathcal{P}_l$ 与 x 轴有 l 个交点

(4.100) 式是我们推导出的光子的玻尔兹曼方程. 唯一的区别在于最后一项 $\mathcal{P}_2\Pi/2$ 需要一些解释. 首先, 注意到它正比于二阶勒让德多项式 $\mathcal{P}_2(\mu)=(3\mu^2-1)/2$. (4.101) 式出现了新的一项 $\mathcal{P}_2\Theta_2/2$, 这一项计算了康普顿散射的角度相关性, 在 4.3 节被忽略掉了. 另外, (4.102) 式含 Π 的项表示温度场同样与偏振场的强度 Θ_P 耦合. 注意到 Θ_P 完全由四极子 Θ_2 产生, 而非温度场的其他阶矩.

重子物质速度方程 (4.106) 中, 光子对重子的密度比被定义为

$$\frac{1}{R} \equiv \frac{4\rho_\gamma^{(0)}}{3\rho_{\mathrm{b}}^{(0)}} \tag{4.108}$$

(4.107) 式描述了扰动的中微子分布函数 $\mathcal{N}$. 它与光子的方程仅有的区别在于它没有碰撞项, 因为中微子与宇宙中其他成分作用极其微弱. 这里假定了中微子的静止质量为零. 如果任何一种中微子存在静止质量, (4.107) 式便需要对之进行修改. 练习 11 讨论了这一点.

推荐读物

20 世纪 60 年代, 在一本美国国家杂志上刊登了一幅卡通漫画：许多商人在曼哈顿的街道上行走着, 看起来非常严肃体面. 但每个人头上的 "思想泡泡" 揭露了他们真实的思维关注点——他们每个人都在幻想着不能言表的场景. 至少在某些方面, 玻尔兹曼方程在物理学家和天文学家头脑中扮演着同样的角色——从未有人讨论过, 却一直被每个人思考着.

两本出色的天文学教材——*Radiative Processes in Astrophysics* (Rybicki and Lightman) 和*Galactic Dynamics* (Binney and Tremaine) 或隐或现地大量应用了玻尔兹曼方程. 在宇宙学书籍中, 除了在第 1 章中提到过的之外, 此领域之先驱所著*The Large Scale Structure of the Universe* (Peebles) 在同步规范下广泛地应用了玻尔兹曼方程. 如果你困扰于 4.3 节, 或许会被 Peebles 的书中 §92 的内容吸引 (或许被惹怒？), 在其中他用很少的篇幅推导出康普顿散射的项.

很多文章推导了宇宙扰动的玻尔兹曼方程, 非常值得阅读. 它们是：具有开创性的工作 (Lifshitz, 1946；Peebles and Yu, 1970；Bond and Szalay, 1983). 还有一篇很好的综述 (Efstathiou, 1990). 这里对于康普顿散射的处理基于文献 (Dodelson and Jubas, 1995). 如果你只想读此领域的一篇文章, 我推荐 Ma 和 Bertschinger (1995) 的工作, 在其中略去了本书中很多推导过程, 但拥有在共形牛顿规范和同步规范下的相关公式. 玻尔兹曼方程偏振项的推导参见文献 (Kosowsky, 1996). 还有第一篇给出张量的玻尔兹曼方程推导的文章 (Crittenden et al., 1993).

本书不会在不同规范, 以及在扰动分解为标量、矢量和张量的方面花很大篇幅. 在这两方面, 有两篇非常好的综述型文章进行了详细的探讨, 它们是 Mukhanov, Feldman 和 Brandenberger (1992) 及 Kodama 和 Sasaki (1984) 的工作. 这两篇文章对之后的两章 (爱因斯坦场方程和暴胀) 也进行了很好的描述.

练　　习

1. 通过求 (4.6) 式的矩, 推导出无碰撞、一维谐振子的流体方程. 相应的数密度和速度定义为对分布函数的积分如下：

$$n \equiv \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\mathrm{d}p}{2\pi} f, \quad v \equiv \frac{1}{n} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\mathrm{d}p}{2\pi} \frac{p}{m} f. \tag{4.109}$$

2. 同步规范的度规是

$$g_{00}(\vec{x}, t) = -1$$
$$g_{0i}(\vec{x}, t) = 0$$

$$g_{ij}(\vec{x},t) = a^2[\delta_{ij} + h_{ij}], \tag{4.110}$$

其扰动为

$$h_{ij} = \begin{pmatrix} -2\tilde{\eta} & 0 & 0 \\ 0 & -2\tilde{\eta} & 0 \\ 0 & 0 & h+4\tilde{\eta} \end{pmatrix} \tag{4.111}$$

这里的 $\tilde{\eta}$ 与共形时间无关. 波矢 $\vec{k}$ 沿 $\hat{z}$ 方向. 导出同步规范下 (4.63) 式的对应形式：

$$\dot{\Theta} + \mathrm{i}k\mu\Theta - \frac{\mu^2\dot{h}}{2} - \mathcal{P}_2(\mu)\dot{\tilde{\eta}} = -\dot{\tau}[\Theta_0 - \Theta + \mu\nu]. \tag{4.112}$$

3. 从零阶未积分的玻尔兹曼方程 (4.37) 起, 对所有动量积分, 证明数密度随 a^3 的反比下降. 本题的过程会证实 (3.1) 式左侧的形式.

4. 证明在宇宙各个时期, 泡利不相容原理的因子 $1-f_\mathrm{e}$ 均可设为 1. 首先利用 3.1 节中的近似 (假设 $T_\mathrm{e} \ll m_\mathrm{e}$) 将 f_e 写成温度和数密度的函数. 然后证明当温度远小于 m_e 时, f_e 远小于 1.

5. 假设在本章开始时设

$$\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}\lambda} = C'. \tag{4.113}$$

将上式的形式改写成 (4.1) 式左边 $(\mathrm{d}f/\mathrm{d}t)$ 的形式. 那么这里的碰撞项 C' 与 (4.1) 式中的碰撞项 C 有何联系？证明, 由于碰撞项本身为一阶项, 联系这两个碰撞项的一阶扰动项可以忽略.

6. 推导有质量粒子未积分的玻尔兹曼方程 (4.68).

7. 计入康普顿散射的角度相关性, 从 (4.49) 式开始, 但不再设散射强度为常数, 而是取

$$|\mathcal{M}|^2 = 6\pi\sigma_T m_\mathrm{e}^2(1+\cos^2[\hat{p}\cdot\hat{p}']).$$

证明正确地计入角度相关性会得到 (4.100) 式中的 $(1/2)\mathcal{P}_2(\mu)\Theta_2$ 一项.

8. 证明非相对论性物质的温度在无相互作用时随 a^{-2} 变化. 利用 (4.48) 式的零阶项并假设 $f_\mathrm{dm} \propto \mathrm{e}^{-E/T} = \mathrm{e}^{-p^2/2mT}$. 注意这个结论不适用于电子和质子, 因为它们与光子耦合, 因而其温度随 a^{-1} 变化.

9. 在练习 8 中, 证明了无碰撞非相对论性粒子的热分布的温度随 a^{-2} 变化, 而相对论性粒子随 a^{-1} 变化, 因而 $T_\mathrm{dm} \propto T^2$. 当它们与暗物质质量相等时, 由 $T_\mathrm{dm} = T$ 归一化. 当光子温度是 1eV 时, 估计等效质量为 100GeV 的暗物质粒子的特征热运动速率.

10. 本题的目的是用玻尔兹曼方程推导 2.3 节的结论. 将 (4.68) 式的零阶项乘以 $\mathrm{d}^3pE(p)/(2\pi)^3$ 然后积分. 证明得到的方程与 (2.55) 式等价.

11. 考虑静止质量不为零的中微子对演化方程的影响.

(a) 从有质量粒子的玻尔兹曼方程 (4.68) 起, 将其变成关于 $\mathcal{N}$ 的方程, 即静止质量不为零的中微子的分布函数的扰动. 利用中微子分布函数的一阶项

$$f_\nu = f_\nu^{(0)} + \frac{\partial f_\nu^{(0)}}{\partial T_\nu} T_\nu \mathcal{N} \tag{4.114}$$

这里 $f_\nu^{(0)} = [\mathrm{e}^{p/T_\nu}+1]^{-1}$. 将最终的方程表示成在傅里叶空间, 以共形时间为演化变量的形式.

(b) 最近针对大气中微子流的试验估计, τ-中微子的质量为 0.07eV, 远大于电子中微子和 μ-中微子. 计算质量为 0.07eV 的中微子对当今能量密度的贡献. 你可以假定这种中微子是非相对论性粒子.

(c) 考虑以下两种情况：能量密度分别等于临界密度除以冷暗物质粒子和中微子. 在这两种情况下中微子都有标准的丰度和温度, 唯一的区别在于中微子的静止质量为零, 或者 0.07eV. 分别画出能量密度对尺度因子的函数图像. 注意两条曲线在早期 (在早期中微子都应是相对论性的) 和晚期应该保持一致, 只在中期有所不同.

12. 证明在早期宇宙的不同时期常规物质的耦合性.

(a) 计算库仑散射率和哈勃膨胀率的比值, 假定电子和质子完全电离.

(b) 证明即使电离度在 10^{-4} 量级, 中性氢对自由质子的散射率也远大于宇宙膨胀率.

13. 考虑对度规的张量扰动, 其对 $g_{00}(=-1)$ 和 $g_{0i}(=0)$ 无扰动, 但度规的空间部分变为

$$g_{ij} = a^2 \begin{pmatrix} 1+h_+ & h_\times & 0 \\ h_\times & 1-h_+ & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

推导在张量扰动下光子的分布函数所满足的方程. 与标量扰动不同, 张量扰动导致方位角的相关性 Θ_l, 将各向异性按张量分解为

$$\Theta^T(k,\mu,\phi) = \Theta_+^T(k,\mu)(1-\mu^2)\cos(2\phi) + \Theta_\times^T(k,\mu)(1-\mu^2)\sin(2\phi). \tag{4.115}$$

证明 $+$ 和 $\times$ 分量都满足方程

$$\frac{\mathrm{d}\Theta_i^T}{\mathrm{d}\eta} + \mathrm{i}k\mu\Theta_i^T + \frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}h_i}{\mathrm{d}\eta} = \dot{\tau}\left[\Theta_i^T - \frac{1}{10}\Theta_{i,0}^T - \frac{1}{7}\Theta_{i,2}^T - \frac{3}{70}\Theta_{i,4}^T\right] \tag{4.116}$$

其中 i 可代表 $+$ 或 $\times$, 式中的矩同标量矩的定义 (4.99) 式.

第 5 章　爱因斯坦场方程

第 4 章中建立了描述引力场的扰动对粒子分布的影响的方法. 这种方法得到了一系列方程 (4.100)~(4.107). 我们还需要对这些方程加以补充, 计入这些粒子分布的扰动如何影响引力场. 这需要广义相对论中的爱因斯坦场方程. 本章在详细地将爱因斯坦场方程加入扰动后, 对其零阶、均匀宇宙下的解进行展开. 并非犹如广义相对论的声望一般, 本章中的计算尽管有些冗长, 却并不那么复杂和隐晦, 而是非常直接. 但是, 这些推导还是 "必须要做一次" 的, 因此本章很详细地呈现出了这个过程.

5.1　扰动后的里奇张量和里奇标量

广义相对论最基本的公式 (2.30) 是一个四维张量方程, 理论上, 它代表 16 个独立的方程. 然而, 方程等号两边都是对称的张量, 故只有 10 个方程是独立的. 我们只对这 10 个方程中的两个感兴趣, 因为我们关注的度规仅有两个独立变量, Φ 和 Ψ.

计算爱因斯坦场方程的左边需要首先进行以下三个步骤:

(i) 计算扰动后的度规 (4.9) 式的克氏符 $\Gamma^{\mu}_{\alpha\beta}$.

(ii) 利用 (2.31) 式计算里奇张量 $R_{\mu\nu}$.

(iii) 将里奇张量 $R_{\mu\nu}$ 缩并得到里奇标量 $\mathcal{R} \equiv g^{\mu\nu}R_{\mu\nu}$.

注意, 尽管我们只对爱因斯坦场方程的两个分量感兴趣, 但还是需要计算出里奇张量的所有分量. 爱因斯坦张量 $G_{\mu\nu} \equiv R_{\mu\nu} - g_{\mu\nu}\mathcal{R}/2$ 的所有分量都依赖于里奇标量，里奇标量又取决于 $R_{\mu\nu}$ 的所有分量.

5.1.1　克氏符

我们在 (2.22) 式和 (2.23) 式中计算过零阶的克氏符. 现在需要计算其一阶项, 它们是 Φ 和 Ψ 的线性组合. 首先考虑 $\Gamma^0_{\mu\nu}$, 定义为

$$\Gamma^0_{\mu\nu} = \frac{1}{2}g^{0\alpha}[g_{\alpha\mu,\nu} + g_{\alpha\nu,\mu} - g_{\mu\nu,\alpha}] \tag{5.1}$$

重申, "α" 代表对 x^α 求普通导数. 只有 $g^{0\alpha}$ 为时间分量①, 也就是 $g_{00} = -1 - 2\Psi$

① 我们将采用 $x^0 = t$, 而非共形时间. 所以, $\Psi_{,0}$ 表示对时间的导数. 现在定义 $\dot{\Psi} \equiv \partial\Psi/\partial\eta$, $\Psi_{,0} \equiv \dot{\Psi}/a$.

的倒数. 所以, 在一阶微扰中, $g^{00}=-1+2\Psi$, 且

$$\Gamma^0_{\mu\nu}=\frac{-1+2\Psi}{2}[g_{0\mu,\nu}+g_{0\nu,\mu}-g_{\mu\nu,0}]. \tag{5.2}$$

轮流取角标的各个分量：首先是 $\mu=\nu=0$ 的情况. 方括号中每一项都相同, 故方括号内得到 $g_{00,0}=-2\Psi_{,0}$. 由于只考虑一阶项, 故方括号外面的 Ψ 可以被忽略掉, 剩下

$$\Gamma^0_{00}=\Psi_{,0}. \tag{5.3}$$

其次, 克氏符的角标之一是空间分量, 另一是时间分量. 由于克氏符关于其下脚标的对称性, 所以无所谓它们的顺序. 在这种情况下, (5.2) 式方括号中仅有一项非零, $g_{00,i}=-2\Psi_{,i}$. 同样的, 由于只保留一阶项, 前面的 2Ψ 可以忽略, 得到

$$\Gamma^0_{0i}=\Gamma^0_{i0}=\Psi_{,i}=\mathrm{i}k_i\Psi. \tag{5.4}$$

上式最后一步等式成立是因为将其变换到了傅里叶空间, 之后的推导也将会在傅里叶空间进行. 注意我们的习惯：傅里叶空间中的变量不用 “∼” 标记, 故上式最右侧的 Ψ 实际应为 $\tilde{\Psi}$.

最后, (5.2) 式的下脚标都为空间分量时, 方括号中前两项为零, 因为 $g_{0i}=0$, 只有最后一项非零：

$$\Gamma^0_{ij}=\frac{1-2\Psi}{2}\frac{\partial}{\partial t}[\delta_{ij}a^2(1+2\Phi)]. \tag{5.5}$$

这里有一个零阶项, 正如 (2.22) 式得到的一样, 还有三个一阶项：

$$\Gamma^0_{ij}=\delta_{ij}a^2[H+2H(\Phi-\Psi)+\Phi_{,0}] \tag{5.6}$$

这里 $H=(\mathrm{d}a/\mathrm{d}t)/a$.

上角标为空间分量的克氏符 $\Gamma^i_{\mu\nu}$ 的计算留作练习. 计算结果为

$$\begin{aligned}\Gamma^i_{00}&=\frac{\mathrm{i}k^i}{a^2}\Psi\\ \Gamma^i_{j0}=\Gamma^i_{0j}&=\delta_{ij}(H+\Phi_{,0})\\ \Gamma^i_{jk}&=\mathrm{i}\Phi(\delta_{ij}k_k+\delta_{ik}k_j-\delta_{jk}k_i).\end{aligned} \tag{5.7}$$

注意只有分量 Γ^i_{j0} 非零, 这与 (2.23) 式吻合. 这里 δ_{ij} 和 k_i 都是欧氏空间中的量, 所以我们可以自由交换它们的上下角标.

5.1.2　里奇张量

里奇张量可以很方便地写成如 (2.31) 式中克氏符及其导数的形式. 首先考虑其时间–时间分量：

$$R_{00}=\Gamma^\alpha_{00,\alpha}-\Gamma^\alpha_{0\alpha,0}+\Gamma^\alpha_{\beta\alpha}\Gamma^\beta_{00}-\Gamma^\alpha_{\beta0}\Gamma^\beta_{0\alpha}. \tag{5.8}$$

上式所有项都是一阶项. 先考虑这些项 $\alpha=0$ 时的情况. 前两项互为相反数相互抵消, 后两项也是这样. 故只有 α 为空间分量时才对上式有贡献. 下面一项一项讨论.

首先利用 (5.7) 式的第一个式子得到

$$\Gamma^i_{00,i}=\frac{-k^2}{a^2}\Psi, \tag{5.9}$$

再利用 (5.7) 式的第二个式子, (5.8) 式的第二项为

$$-\Gamma^i_{0i,0}=-3\left(\frac{\mathrm{d}^2a/\mathrm{d}t^2}{a}-H^2+\Phi_{,00}\right) \tag{5.10}$$

其中括号外的 3 来自对 δ_{ii} 的爱因斯坦求和.

接下来一项是 $\Gamma^i_{i\beta}\Gamma^\beta_{00}$. 注意到无论 β 取什么值, Γ^β_{00} 都是一个一阶项, 所以我们只需要提取 $\Gamma^i_{i\beta}$ 的零阶项. 然而,(5.7) 式最后一个式子表示, 除非 $\beta=0$, 否则 $\Gamma^i_{i\beta}$ 为一阶项. 所以

$$\begin{aligned}\Gamma^i_{i\beta}\Gamma^\beta_{00}&=\Gamma^i_{i0}\Gamma^0_{00}\\&=3H\Psi_{,0}.\end{aligned} \tag{5.11}$$

最后一项为 $-\Gamma^i_{\beta0}\Gamma^\beta_{0i}$. 当 $\beta=0$ 时两个克氏符 Γ 都为一阶项, 其乘积为二阶项, 可忽略. 所以只需考虑 β 为空间分量, 得到

$$\begin{aligned}-\Gamma^i_{\beta0}\Gamma^\beta_{0i}&=-\Gamma^i_{j0}\Gamma^j_{0i}\\&=-3(H^2+2H\Phi_{,0}).\end{aligned} \tag{5.12}$$

将四项整合起来, 得到

$$R_{00}=-3\frac{\mathrm{d}^2a/\mathrm{d}t^2}{a}-\frac{k^2}{a^2}\Psi-3\Phi_{,00}+3H(\Psi_{,0}-2\Phi_{,0}). \tag{5.13}$$

注意其零阶项与 (2.34) 式吻合.

里奇张量的空间–空间分量的计算留作练习. 它们是

$$\begin{aligned}R_{ij}=\delta_{ij}\Bigg[&\left(2a^2H^2+a\frac{\mathrm{d}^2a}{\mathrm{d}t^2}\right)(1+2\Phi-2\Psi)\\&+a^2H(6\Phi_{,0}-\Psi_{,0})+a^2\Phi_{,00}+k^2\Phi\Bigg]+k_ik_j(\Phi+\Psi).\end{aligned} \tag{5.14}$$

现在可以将里奇张量的指标进行缩并, 以得到里奇标量：

$$\begin{aligned}\mathcal{R}&\equiv g^{\mu\nu}R_{\mu\nu}=g^{00}R_{00}+g^{ij}R_{ij}\\&=[-1+2\Psi]\left[-3\frac{\mathrm{d}^2a/\mathrm{d}t^2}{a}-\frac{k^2}{a^2}\Psi-3\Phi_{,00}+3H(\Psi_{,0}-2\Phi_{,0})\right]\end{aligned}$$

$$+\left[\frac{1-2\Phi}{a^2}\right]\left[3\left\{\left(2a^2H^2+a\frac{\mathrm{d}^2a}{\mathrm{d}t^2}\right)(1+2\Phi-2\Psi)\right.\right.$$
$$\left.\left.+a^2H(6\Phi_{,0}-\Psi_{,0})+a^2\Phi_{,00}+k^2\Phi\right\}+k^2(\Phi+\Psi)\right]. \tag{5.15}$$

首先, 让我们检查 $\mathcal{R}$ 的零阶项. 整理后, 发现零阶项为 $6\left(H^2+\dfrac{\mathrm{d}^2a/\mathrm{d}t^2}{a}\right)$, 与 (2.37) 式吻合. 为了得到 $\mathcal{R}$ 的一阶项 $\delta\mathcal{R}$, 我们利用已经熟悉了的方法, 将各项相乘, 只保留 Φ 和 Ψ 的一阶项. 这样得到

$$\begin{aligned}\delta\mathcal{R}=&-6\Psi\frac{\mathrm{d}^2a/\mathrm{d}t^2}{a}+\frac{k^2}{a^2}\Psi+3\Phi_{,00}-3H(\Psi_{,0}-2\Phi_{,0})\\&-6\Psi\left(2H^2+\frac{\mathrm{d}^2a/\mathrm{d}t^2}{a}\right)+3H(6\Phi_{,0}-\Psi_{,0})\\&+3\Phi_{,00}+4\frac{k^2\Phi}{a^2}+\frac{k^2\Psi}{a^2},\end{aligned} \tag{5.16}$$

其中第一行包含 R_{00} 给出的项 ((5.15) 式第二行), 后两行是 R_{ij} 给出的项 ((5.15) 式最后两行). 合并同类项得到

$$\begin{aligned}\delta\mathcal{R}=&-12\Psi\left(H^2+\frac{\mathrm{d}^2a/\mathrm{d}t^2}{a}\right)+\frac{2k^2}{a^2}\Psi+6\Phi_{,00}\\&-6H(\Psi_{,0}-4\Phi_{,0})+4\frac{k^2\Phi}{a^2}.\end{aligned} \tag{5.17}$$

5.2 爱因斯坦场方程的两个分量

现在可以推导关于 FRW 度规扰动 Φ 和 Ψ 的两个演化方程. 这里还有一些自由度, 因为爱因斯坦场方程

$$G^{\mu}_{\nu}=8\pi GT^{\mu}_{\nu} \tag{5.18}$$

有 10 个独立分量方程, 而我们只需要其中的两个. 另外 8 个分量或者其一阶项为零, 或者是多余的[①].

我们要用到的第一个方程是时间–时间分量的方程. 得到

$$\begin{aligned}G^0_0&=g^{00}\left[R_{00}-\frac{1}{2}g_{00}\mathcal{R}\right]\\&=(-1+2\Psi)R_{00}-\frac{\mathcal{R}}{2}.\end{aligned} \tag{5.19}$$

其中将 G_{00} 乘以 g^{00}(记住 g^{0i} 为零) 将下角标之一升为上角标. 这样做可以简化爱因斯坦张量中的能动张量 (见练习 3). 注意上式第二行的推导用到了 $g^{00}g_{00}=1$.

① 这里特指标量扰动. 当我们考虑张量扰动时, 另外的这些方程或许会很有用处.

我们已经计算出了里奇张量的时间–时间分量 ((5.13) 式) 和扰动的里奇标量 ((5.17) 式), 故爱因斯坦场方程时间–时间分量的一阶部分为

$$\begin{aligned}\delta G_0^0 = &-6\Psi\frac{\mathrm{d}^2a/\mathrm{d}t^2}{a} + \frac{k^2}{a^2}\Psi + 3\Phi_{,00} - 3H(\Psi_{,0} - 2\Phi_{,0}) \\ &+ 6\Psi\left(H^2 + \frac{\mathrm{d}^2a/\mathrm{d}t^2}{a}\right) - \frac{k^2}{a^2}\Psi - 3\Phi_{,00} \\ &+ 3H(\Psi_{,0} - \Phi_{,0}) - 2\frac{k^2\Phi}{a^2}.\end{aligned} \tag{5.20}$$

合并同类项得到

$$\delta G_0^0 = -6H\Phi_{,0} + 6\Psi H^2 - 2\frac{k^2\Phi}{a^2}. \tag{5.21}$$

爱因斯坦场方程中 G_0^0 等于 $8\pi G T_0^0$, 其中 $T_{\mu\nu}$ 是能动张量. 为了完成 Φ 和 Ψ 的第一个演化方程的推导, 需要计算源 T_0^0 的一阶部分. 回忆 2.3 节,$-T_0^0$ 是宇宙中所有粒子的能量密度, 且每种成分的贡献是一个对其分布函数的积分 ((2.59) 式),

$$T_0^0(\vec{x},t) = -\sum_{\text{all species } i} g_i \int \frac{\mathrm{d}^3p}{(2\pi)^3} E_i(p) f_i(\vec{p},\vec{x},t). \tag{5.22}$$

同样地指出, g_i 是这种成分的自旋简并 (并非度规); $E_i = \sqrt{p^2+m_i^2}$ 是拥有动量 p 和质量 m_i 的粒子的能量; f_i 即分布函数. 在 2.3 节中讨论过零阶、均匀宇宙的分布. 为了得到能动张量的一阶部分, 我们自然地考虑到分布函数的一阶部分, 即第 4 章定义的光子、中微子、暗物质、重子的扰动变量. 暗物质和重子很简单, 因为我们定义它们的密度为 $-\rho_i(1+\delta_i)$, 其中 i 分别表示暗物质和重子. 对于光子, 需要小心处理. 利用 (4.35) 式 Θ 的定义, 有

$$T_0^0 = -2\int \frac{\mathrm{d}^3p}{(2\pi)^3} p\left[f^{(0)} - p\frac{\partial f^{(0)}}{\partial p}\Theta\right] \quad (\text{光子}). \tag{5.23}$$

其中第一项便是光子能量密度的零阶部分 ρ_γ. 对于第二项, 首先对角度进行积分, 将单极子 Θ_0 从 Θ 中提取出来. 然后, 对半径进行分部积分. 这样改变了正负号, 并由 $\partial p^4/\partial p = 4p^3$ 引入了一个因子 4, 得到

$$T_0^0 = -\rho_\gamma[1 + 4\Theta_0] \quad (\text{光子}). \tag{5.24}$$

这里的因子 4 的意义很明显. 扰动变量 Θ 是温度的相对改变, 而能动张量与扰动的能量密度 $\delta\rho$ 相关. 我们早应预料到这一点, 因为 $\rho \propto T^4$, 所以 $\delta\rho/\rho = 4\delta T/T$. 在任何时刻它都不需要代数运算就容易理解. 我在此强调这一点, 是因为在某些读物中, 作者将 Θ 定义为 $\delta\rho/\rho$, 而有些则用我们这里的书写习惯. 中微子的一阶项贡献有同样的形式,

$$T_0^0 = -\rho_\nu[1 + 4\mathcal{N}_0] \quad (\text{中微子}). \tag{5.25}$$

理论上我们还应该将暗能量的扰动项归纳进来. 然而绝大多数模型预言暗能量是均匀的, 而且直到非常接近现在的时刻才变得重要. 这两个性质都与宇宙学常数相吻合. 当然, 也有一些模型偏离这样的假设, 但在大部分情况下我们可以忽略暗能量对度规扰动的影响.

回到爱因斯坦场方程, (5.21) 式等于 $8\pi G$ 乘以能动张量的时间–时间分量一阶项, 两边同除以 2, 得到

$$-3H\Phi_{,0} + 3\Psi H^2 - \frac{k^2\Phi}{a^2} = -4\pi G[\rho_{\rm dm}\delta + \rho_b\delta_{\rm b} + 4\rho_\gamma\Theta_0 + 4\rho_\nu\mathcal{N}_0]. \tag{5.26}$$

再次将方程写成共形时间的形式. 在每个时间导数出现的地方引入了一项 $1/a$, 故

$$k^2\Phi + 3\frac{\dot a}{a}\left(\dot\Phi - \Psi\frac{\dot a}{a}\right) = 4\pi G a^2[\rho_{\rm dm}\delta + \rho_b\delta_{\rm b} + 4\rho_\gamma\Theta_0 + 4\rho_\nu\mathcal{N}_0]. \tag{5.27}$$

这是 Φ 和 Ψ 的第一个演化方程. 在没有膨胀的情况下 ($a =$ 常数), (5.27) 式简化为引力场的泊松方程 (在傅里叶空间), 左边为 $-\nabla^2\Phi$, 右边为 $4\pi G\delta\rho$. 正比于 $\dot a$ 的项是因为膨胀引起的, 它对于相当于或大于哈勃半径 H^{-1} 的波长为 (σ/k) 的模式尤其重要. 当考虑到扰动演化时, 我们需要这种广义相对论的形式, 因为现在时刻所有的傅里叶模都曾有过波长大于哈勃半径的时候. 第 6 章将会详细讨论.

现在推导第二个 Φ 和 Ψ 的演化方程. 既然我们已经处理过爱因斯坦张量的时间–时间分量, 现在就针对 G^μ_ν 的空间分量,

$$G^i_j = g^{ik}\left[R_{kj} - \frac{g_{kj}}{2}\mathcal{R}\right] = \frac{\delta^{ik}(1-2\Phi)}{a^2}R_{kj} - \frac{\delta_{ij}}{2}\mathcal{R}. \tag{5.28}$$

(5.14) 式中大多数分量 R_{kj} 都正比于 δ_{kj}. 当与 δ^{ik} 缩并时, 会得到一系列与 δ_{ij} 成正比的项, 对于最后一项, 则与 $\mathcal{R}$ 成正比. 所以,

$$G^i_j = A\delta_{ij} + \frac{k_ik_j(\Phi+\Psi)}{a^2} \tag{5.29}$$

其中 A 包含很多项, 我们不必写出. 由于这些项都正比于 δ_{ij}, 它们都只对 G^i_j 的迹有贡献. 为了避免处理这些项, 考虑 G^i_j 的横向、无迹的部分, 这可以通过将 G^i_j 与投影算符 $\hat k_i\hat k_j - (1/3)\delta^j_i$ 缩并得到. 也就是说, 投影算符仅提取横向、无迹的部分. 这样的投影将所有正比于 δ_{ij} 的项消除, 仅剩下

$$(\hat k_i\hat k^j - (1/3)\delta^j_i)G^i_j = (\hat k_i\hat k^j - (1/3)\delta^j_i)\left(\frac{k^ik_j(\Phi+\Psi)}{a^2}\right) = \frac{2}{3a^2}k^2(\Phi+\Psi). \tag{5.30}$$

它应与能动张量横向、无迹的部分相等, 后者通过同样的方式计算出：

$$(\hat k_i\hat k^j - (1/3)\delta^j_i)T^i_j = \sum_{\text{all species } i} g_i\int\frac{{\rm d}^3p}{(2\pi)^3}\frac{p^2\mu^2-(1/3)p^2}{E_i(p)}f_i(\vec p). \tag{5.31}$$

我们可以马上辨认出 $\mu^2-1/3$ 正比于二阶勒让德多项式, 即等于 $(2/3)\mathcal{P}_2(\mu)$, 说明这个积分提取出分布的四极子部分. 显然, 分布函数的零阶部分不含四极子, 故上式为一阶项, 正比于 Θ_2, 其仅对光子和中微子不为零. (5.31) 式对光子的积分为

$$-2\int\frac{\mathrm{d}pp^2}{2\pi^2}p^2\frac{\partial f^{(0)}}{\partial p}\int_{-1}^{1}\frac{\mathrm{d}\mu}{2}\frac{2\mathcal{P}_2(\mu)}{3}\Theta(\mu)=2\frac{2\Theta_2}{3}\int\frac{\mathrm{d}pp^2}{2\pi^2}p^2\frac{\partial f^{(0)}}{\partial p}$$
$$=-\frac{8\rho^{(0)}\Theta_2}{3} \tag{5.32}$$

这里第一步等式成立是由四极子的定义, 第二步等式由分部积分得到. 能动张量的这一部分称为*各向异性拉伸*. 非相对论性的粒子, 如重子和暗物质粒子, 对各向异性拉伸无贡献.

这样, (5.30) 式左侧便等于 $8\pi G$ 乘以光子和中微子的各向异性拉伸：

$$k^2(\Phi+\Psi)=-32\pi Ga^2[\rho_\gamma\Theta_2+\rho_\nu\mathcal{N}_2]. \tag{5.33}$$

也就是说, 两个引力势 Φ 和 Ψ 互为相反数, 除非光子或中微子有四极矩贡献. 实际上, 光子的四极矩对此贡献很小, 因为, 当光子有一定能量密度时, 其四极矩已经很小 (见 (4.54) 式后的讨论). 而只有几乎无碰撞的中微子在辐射主导时期有一定的四极矩.

5.3 张 量 扰 动

到现在为止, 我们讨论的几乎都是对均匀 FRW 宇宙的*标量*扰动. 形式上, 这意味着扰动 $\Phi(\hat{x},t)$ 和 $\Psi(\hat{x},t)$ 犹如标量变换, $\hat{x}\to\hat{x}'$, 即它们在空间坐标变换下保持不变. 这是合理的：对度规的标量扰动和密度起伏互相影响. 密度起伏导致了宇宙结构形成, 这是我们最感兴趣的问题.

但同样有很多结构形成理论不仅产生标量扰动, 也产生对度规的张量扰动. 因为它造成 CMB 的扭曲, 特别是在大尺度上, 因而是有可能观测到的. 这本书中有很多练习 (包含解答) 都与张量扰动有关. 用于分析张量扰动的工具我们已经在标量扰动中熟练使用过. 所以在很多地方, 我将张量扰动的演化当作一个很大的作业, 在这其中并没有出现新的物理知识.

在做这些练习的时候自然会产生一个疑问：为什么我们要独立地分别考虑标量扰动和张量扰动? 为了回答这个问题 (同样减轻作业负担), 本节推导了张量扰动下的爱因斯坦场方程. 我们将看到, 标量扰动和张量扰动*非耦合*, 即它们独立演化. 所以, 张量扰动的存在不会影响标量扰动, 反之亦然. 相比于 Φ 和 Ψ, 它们紧紧耦合在一起. 如果不同样求解 Ψ 的演化方程, 我们不可能得到 Φ 的方程. 这种标量

和张量的非耦合就是*分解理论*的一个表现. 抽象地去证明分解理论还不如通过一个实例来证明它更有启发性. 顺便一提, 我们自然会想到, 分解理论应该也适用于*矢量*扰动, 它也是由早期宇宙的模型引发的 (但不像张量扰动一样普遍存在), 可以被独立讨论.

张量扰动描述为 $g_{00}=-1$, 空间–时间分量为零 $g_{0i}=0$, 空间部分为

$$g_{ij}=a^2\begin{pmatrix}1+h_+ & h_\times & 0\\ h_\times & 1-h_+ & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}. \tag{5.34}$$

也就是, 度规的张量扰动由两个小量 h_+ 和 $h_\times$ 描述. 由定义, 扰动发生在 x-y 平面上, 这代表隐含的坐标轴的选择, 即选择 z 轴为波矢 k 的方向. 更一般地, h_+ 和 $h_\times$ 是两个无散、无迹的对称张量. 若这个扰动张量可以写为 $\mathcal{H}_{ij}$, 则无散度的意思是 $k^i\mathcal{H}_{ij}=k^j\mathcal{H}_{ij}=0$. 这显然满足 (5.34) 式, 因为在 $\hat{k}=\hat{z}$ 方向上没有分量. 无迹的条件满足, 因为扰动的对角线元素之和为零.

一旦 (5.34) 式的度规给定, 我们就可以马上开始推导爱因斯坦场方程. 推导的过程还是一样: ① 克氏符; ② 里奇张量; ③ 里奇标量.

5.3.1 张量扰动的克氏符

首先考虑 $\Gamma^0_{\alpha\beta}$. 我们考虑的度规 (5.34) 式中 g_{00} 为常数, g_{0i} 为零. 克氏符由度规的导数的和得到. 所以, 只有与度规空间分量导数有关的项 $g_{ij,\alpha}$ 非零, 所以马上得到

$$\Gamma^0_{00}=\Gamma^0_{i0}=0. \tag{5.35}$$

下角标均为空间分量的项是

$$\begin{aligned}\Gamma^0_{ij}&=-\frac{g^{00}}{2}g_{ij,0}\\&=\frac{1}{2}g_{ij,0}.\end{aligned} \tag{5.36}$$

让我们利用以前提到过的符号: 包含了三阶扰动的矩阵 $\mathcal{H}_{ij}$, 当 $\hat{k}$ 取 $\hat{z}$ 方向时等于

$$\mathcal{H}_{ij}=\begin{pmatrix}h_+ & h_\times & 0\\ h_\times & -h_+ & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix} \tag{5.37}$$

所以 $g_{ij}=a^2(\delta_{ij}+\mathcal{H}_{ij})$. 故

$$g_{ij,0}=2Hg_{ij}+a^2\mathcal{H}_{ij,0} \tag{5.38}$$

在这里注意区分哈勃参量 H 和张量扰动 $\mathcal{H}$. 第一个非零的克氏符是

$$\Gamma^0_{ij} = Hg_{ij} + \frac{a^2\mathcal{H}_{ij,0}}{2}. \tag{5.39}$$

当 Γ 的两个下角标都为 0 时, 克氏符为零. 非零的两种克氏符是 Γ^i_{0j} 和 Γ^i_{jk}, 前者是

$$\Gamma^i_{0j} = \frac{g^{ik}}{2} g_{jk,0}. \tag{5.40}$$

(5.38) 式中, g_{jk} 的时间导数作用于尺度因子和扰动 $h_{+,\times}$ 上, 得到

$$\Gamma^i_{0j} = \frac{g^{ik}}{2}[2Hg_{jk} + a^2\mathcal{H}_{jk,0}]. \tag{5.41}$$

由 $g^{ik}g_{jk} = \delta_{ij}$, 上式第一项得到 $\delta_{ij}H$. 为了得到上式第二项, 设 $g^{jk} = \delta_{jk}/a^2$(忽略掉一阶项), 因为它乘以一阶项 $\mathcal{H}$, 所以,

$$\Gamma^i_{0j} = H\delta_{ij} + \frac{1}{2}\mathcal{H}_{ij,0}, \tag{5.42}$$

这里还用到了 $\mathcal{H}_{ij}$ 的对称性.

最后一个克氏符 Γ^i_{jk}, 通过练习 7 可以得到

$$\Gamma^i_{jk} = \frac{i}{2}[k_k\mathcal{H}_{ij} + k_j\mathcal{H}_{ik} - k_i\mathcal{H}_{jk}]. \tag{5.43}$$

5.3.2 张量扰动的里奇张量

通过标量扰动的推导中相同的步骤, 我们将这些克氏符组合得到里奇张量. 首先计算里奇张量的时间–时间分量:

$$R_{00} = \Gamma^\alpha_{00,\alpha} - \Gamma^\alpha_{0\alpha,0} + \Gamma^\alpha_{\beta\alpha}\Gamma^\beta_{00} - \Gamma^\alpha_{\beta 0}\Gamma^\beta_{0\alpha}. \tag{5.44}$$

我们已经证明, 在张量扰动下, 两个下角标都为时间项的克氏符为零. 所以上式第一项和第三项为零. 同理, 第二项和第四项指标 α 和 β 须为空间项, 所以

$$R_{00} = -\Gamma^i_{0i,0} - \Gamma^i_{j0}\Gamma^j_{0i}. \tag{5.45}$$

只有 Γ^i_{j0} 非零, 利用 (5.42) 式得到

$$\begin{aligned} R_{00} = &-3\frac{\mathrm{d}H}{\mathrm{d}t} - \frac{1}{2}\mathcal{H}_{ii,00} \\ &- \left(H\delta_{ij} + \frac{1}{2}\mathcal{H}_{ij,0}\right)\left(H\delta_{ij} + \frac{1}{2}\mathcal{H}_{ij,0}\right). \end{aligned} \tag{5.46}$$

第一行, 迹 $\mathcal{H}_{ii}$ 为零, 因为 h_+ 在度规的对角线上出现两次且符号相反, 可以相互抵消. 类似地, 将上式第二行展开并只保留一阶项. $\mathcal{H}_{ii}$ 乘以 δ_{ij}, 故无一阶项存在. 而零阶项合并为

$$R_{00} = -3\frac{\mathrm{d}^2 a/\mathrm{d}t^2}{a}, \tag{5.47}$$

这个方程已经第三次被推导出了 (见 (2.34) 式和 (5.13) 式), 对其结果的正确性我们应很有信心. 当然, 我们不仅得到了正确的零阶项, 具有更重要意义的是张量扰动并不影响 R_{00} 的一阶项. 之后还会得到, 里奇标量中也没有张量扰动的贡献 (即使 R_{ij} 有). 所以, 我们可以推测, 爱因斯坦场方程的时间–时间分量也不含张量扰动. 这很重要：构成爱因斯坦场方程时间–时间分量 (5.26) 式右边的密度扰动不含任何张量扰动. 我们已经看到了分解理论的冰山一角. 密度扰动和标量扰动耦合 (它们有时还被用作同义词). 然而张量扰动与前两者非耦合, 其自身独立演化.

里奇张量的空间分量是依赖于张量扰动变量的. 我们有

$$R_{ij} = \Gamma^{\alpha}_{ij,\alpha} - \Gamma^{\alpha}_{i\alpha,j} + \Gamma^{\alpha}_{\alpha\beta}\Gamma^{\beta}_{ij} - \Gamma^{\alpha}_{\beta j}\Gamma^{\beta}_{i\alpha}. \tag{5.48}$$

同时考虑上式前两项, 展开得到

$$\Gamma^{\alpha}_{ij,\alpha} - \Gamma^{\alpha}_{i\alpha,j} = \Gamma^{0}_{ij,0} + \Gamma^{k}_{ij,k} - \Gamma^{k}_{ik,j} \tag{5.49}$$

由 (5.35) 式 $\alpha = 0$, 对 $\Gamma^{\alpha}_{i\alpha,j}$ 无贡献. 第一项最复杂, 包含了多个时间导数. 由 $\Gamma^0_{ij} = g_{ij,0}/2$, 这一项可以暂时将第一项化简成 $g_{ij,00}/2$. (5.49) 式最后一项为零, 因为张量扰动中 $\Gamma^k_{ik} = 0$. 合并其他项得到

$$\Gamma^{\alpha}_{ij,\alpha} - \Gamma^{\alpha}_{i\alpha,j} = \frac{g_{ij,00}}{2} + \frac{1}{2}[-k_i k_k \mathcal{H}_{jk} - k_j k_k \mathcal{H}_{ik} + k^2 \mathcal{H}_{ji}]. \tag{5.50}$$

记住我们选择 z 轴作为 $\vec{k}$ 的方向. 所以方括号内第一项的指标 i 和 k 必须为 3. 但这些项乘以 $\mathcal{H}_{jk} = \mathcal{H}_{j3} = 0$, 故 $k_j k_k \mathcal{H}_{ik}$ 和 $k_i k_k \mathcal{H}_{jk}$ 均为零. 所以

$$\Gamma^{\alpha}_{ij,\alpha} - \Gamma^{\alpha}_{i\alpha,j} = \frac{g_{ij,00}}{2} + \frac{k^2}{2}\mathcal{H}_{ji}. \tag{5.51}$$

(5.48) 式中第三项 $\Gamma^{\alpha}_{\alpha\beta}\Gamma^{\beta}_{ij}$ 仅在指标 α 为空间项时非零, 故

$$\Gamma^{\alpha}_{\alpha\beta}\Gamma^{\beta}_{ij} = \Gamma^{k}_{k0}\Gamma^{0}_{ij} + \Gamma^{k}_{kl}\Gamma^{l}_{ij}. \tag{5.52}$$

第二项中的两个克氏符都是一阶项, 它们的乘积可忽略. 第一项中, 对 k 的求和使得一阶项不存在, Γ^k_{k0} 是一个完全的零阶项 $3H$, 所以

$$\Gamma^{\alpha}_{\alpha\beta}\Gamma^{\beta}_{ij} = \frac{3}{2}H g_{ij,0}. \tag{5.53}$$

(5.48) 式最后一项的计算留作练习; 答案是

$$\Gamma^{\alpha}_{\beta j}\Gamma^{\beta}_{i\alpha} = 2H^2 g_{ij} + 2a^2 H\mathcal{H}_{ij,0}. \tag{5.54}$$

现在可以将 (5.48) 式的四项组合起来, 得到

$$\begin{aligned} R_{ij} = &\frac{g_{ij,00}}{2} + \frac{k^2}{2}\mathcal{H}_{ji} + \frac{3}{2}H g_{ij,0} \\ &- 2H^2 g_{ij} - 2a^2 H\mathcal{H}_{ij,0}. \end{aligned} \tag{5.55}$$

现在需要将度规的时间导数展开. 利用 (5.38) 式得到

$$g_{ij,00} = 2g_{ij}\left(\frac{\mathrm{d}^2a/\mathrm{d}t^2}{a} + H^2\right) + 4a^2 H\mathcal{H}_{ij,0} + a^2\mathcal{H}_{ij,00}. \tag{5.56}$$

所以里奇张量

$$\begin{aligned} R_{ij} = &g_{ij}\left(\frac{\mathrm{d}^2a/\mathrm{d}t^2}{a} + 2H^2\right) + \frac{3}{2}a^2 H\mathcal{H}_{ij,0} \\ &+ a^2\frac{\mathcal{H}_{ij,00}}{2} + \frac{k^2}{2}\mathcal{H}_{ij}. \end{aligned} \tag{5.57}$$

可以看到, 我们再一次正确地计算出里奇张量的零阶部分. 更重要的是, 我们还将看到, 在应用爱因斯坦场方程时, 里奇张量的一阶部分不与标量扰动相耦合.

首先我们必须计算出里奇标量:

$$\mathcal{R} = g^{00}R_{00} + g^{ij}R_{ij}. \tag{5.58}$$

其中时间–时间项的乘积都是零阶项, 在考虑 $\delta\mathcal{R}$ 的一阶部分时可以不予考虑. 而空间–空间项的乘积包含两类项. 其一是在 (5.57) 式中正比于度规 g_{ij} 的项. 由于 $g^{ij}g_{ij} = 3$, 所以这里不含一阶项. 在 (5.57) 式中其余的项都正比于 $\mathcal{H}_{ij}$, 故它们缩并时可以将 g^{ij} 设为其零阶的值 δ_{ij}/a^2. 这对应于取 (5.57) 式一阶项的迹. 由于所有的一阶项都正比于 $\mathcal{H}_{ij}$, 这个迹为零, 所以得到结论：张量扰动 (在一阶近似下) 不影响里奇标量.

5.3.3 张量扰动的爱因斯坦场方程

现在我们由张量扰动的模计算出爱因斯坦张量的扰动. 由于张量扰动不影响里奇标量, 爱因斯坦张量的一阶部分为

$$\delta G^i_j = \delta R^i_j. \tag{5.59}$$

从 (5.57) 式得到的里奇张量, 经过缩并 $g^{ik}R_{kj}$ 得到 R^i_j. 第一项正比于缩并 $g^{ik}g_{kj}=\delta^i_j$, 无一阶项; 其余项含 $\mathcal{H}$, 为一阶项, 故可以设 $g^{ik}=\delta^{ik}/a^2$, 得到

$$\delta G^i_j=\delta^{ik}\left[\frac{3}{2}H\mathcal{H}_{kj,0}+\frac{\mathcal{H}_{kj,00}}{2}+\frac{k^2}{2a^2}\mathcal{H}_{kj}\right]. \tag{5.60}$$

现在可以推导关于张量扰动变量 h_+ 和 $h_\times$ 演化的方程组.

为了导出关于 h_+ 的方程, 考虑爱因斯坦张量 ${}^1{}_1$ 和 ${}^2{}_2$ 分量之间的差别. (5.60) 式中的爱因斯坦张量是 $\mathcal{H}_{ij}$ 及其导数的线性组合. 由 $\mathcal{H}_{11}=-\mathcal{H}_{22}=h_+$, δG^1_1 与 δG^2_2 互为相反数. 所以,

$$\delta G^1_1-\delta G^2_2=3Hh_{+,0}+h_{+,00}+\frac{k^2h_+}{a^2}. \tag{5.61}$$

用共形时间表示, 得到 $h_{+,0}=\dot{h}_+/a, h_{+,00}=\ddot{h}_+/a^2-(\dot{a}/a^3)\dot{h}_+$. 所以

$$a^2[\delta G^1_1-\delta G^2_2]=\ddot{h}_++2\frac{\dot{a}}{a}\dot{h}_++k^2h_+. \tag{5.62}$$

爱因斯坦场方程的这个分量方程的右边等于零 (见练习 8), 而 $h_\times$ 也满足同样的方程 (见练习 9). 故张量扰动的模都满足同一个方程:

$$\ddot{h}_\alpha+2\frac{\dot{a}}{a}\dot{h}_\alpha+k^2h_\alpha=0 \tag{5.63}$$

这里 $\alpha=+,\times$. (5.63) 式是一个波动方程, 对应的解被称为*引力波*. 假如, 忽略宇宙的膨胀, (5.63) 式中的衰减项 (第二项) 为零, 它的两个解为 $h_\alpha\propto \mathrm{e}^{\pm \mathrm{i}k\eta}$. 在实空间中, 对度规的这种扰动的形式是

$$h_\alpha(\vec{x},\eta)=\int \mathrm{d}^3k\mathrm{e}^{\mathrm{i}\vec{k}\cdot\vec{x}}[A\mathrm{e}^{\mathrm{i}k\eta}+B\mathrm{e}^{-\mathrm{i}k\eta}]\quad(\text{无膨胀}). \tag{5.64}$$

这里的两个模对应于沿 $\pm\hat{z}$ 方向以光速传播的引力波.

而 (5.63) 式则是在膨胀宇宙中波动方程的一般形式. 练习 12 表示, 若宇宙由纯辐射或纯物质构成, 这个方程可以得到解析解. 它们犹如 (5.64) 式的形式是振荡的, 但会衰减. 图 5.1 中展示了三种不同波长的模的 h_α 的演化. 其中大尺度的模 ($k\eta_0=10$) 在其波长大于视界 $k\eta<1$ 的时候都保持为常数. 一旦视界接近其波长, 其强度便开始衰减并振荡数次, 直到现在. 小尺度的模 $k\eta_0=1000$ 的波长与视界可比时也开始衰减. 但由于它更早地进入视界, 其衰减得非常厉害. 到现在, 它的强度已经微乎其微.

从图 5.1 中可以看到引力波对 CMB 各向异性产生的效应. 因为小尺度的模比大尺度的模更早衰减, 在退耦时刻 ($\eta/\eta_0\simeq 0.02$) 仅有 $k\eta_0$ 小于约 100 的模还存在. 所有更小尺度的模都可以被忽略. 故小尺度的各向异性不会被引力波所影响, 引力波只会影响到大尺度的各向异性.

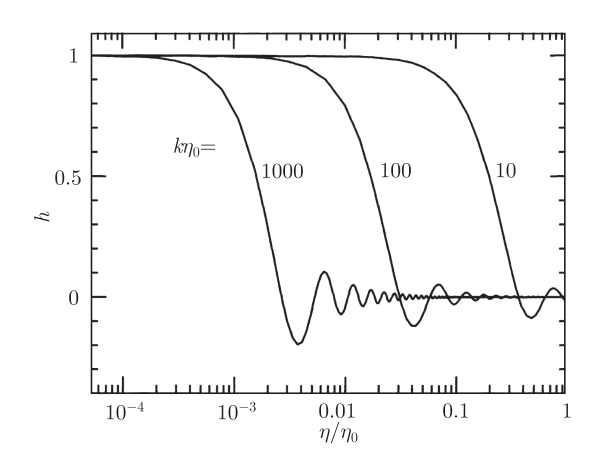


图 5.1 引力波随共形时间的演化. 三种不同的模由它们的波数标记在图上, 可以看出, 更小尺度的模更早地衰减

5.4 模式分解理论

分解理论指出, 对度规张量的扰动可分为三种类型：*标量扰动*、*矢量扰动*和*张量扰动*. 每种扰动独立演化. 也就是说, 如果早期宇宙的某种物理过程造成了张量扰动, 它不会影响标量扰动的演化. 反过来, 若想得到标量扰动的演化, 我们不必担心可能的矢量或张量扰动.

到目前为止已经计算出标量扰动和张量扰动对爱因斯坦张量 $G_{\mu\nu}$ 的贡献, 我们可以证明这两种扰动的分解. 记得在标量扰动的方程推导中, 利用了爱因斯坦张量的两个分量：

$$G^0_0; \quad (\hat{k}_i\hat{k}_j - (1/3)\delta_{ij})G^i_j. \tag{5.65}$$

将这两个分量代入爱因斯坦场方程中可以得到 (5.27) 式和 (5.33) 式. 若能证明张量扰动对这两项无贡献, 我们至少可以信服分解理论的一部分, 即标量扰动的方程不会被张量扰动所影响.

很容易看出张量扰动对 G^0_0 无贡献. 因为 G^0_0 依赖于 R_{00} 和 $\mathcal{R}$, 后两者显然与 h_+ 和 $h_\times$ 无关.

再来证明 $(\hat{k}_i\hat{k}_j - \delta_{ij}/3)G^i_j$ 也不受张量扰动影响. 将 (5.60) 式乘以投影算符：

$$\begin{aligned}(\hat{k}_i\hat{k}_j - (1/3)\delta_{ij})\delta G^i_j = &(\delta_{i3}\delta_{j3} - (1/3)\delta_{ij})\\ &\times\left[\frac{3}{2}H\mathcal{H}_{ij,0} + \frac{\mathcal{H}_{ij,00}}{2} + \frac{k^2}{2a^2}\mathcal{H}_{ij}\right]\end{aligned} \tag{5.66}$$

等式成立是因为我们选取 $\hat{k}$ 沿 $\hat{z}$ 方向. 由 $\mathcal{H}_{33}=0$, 所有指标 i 和 j 为 3 的项都为零, 只剩下正比于 δ_{ij} 的项. 但克罗内克符号取 $\mathcal{H}$ 的迹, 它们同样为零. 故上一节中推导出的标量扰动的方程在张量扰动存在的情况下保持不变. 这支持了分解理论.

5.5 规范的选择

回到标量扰动, 我们已经用 Ψ 和 Φ 两个变量通过 (4.9) 式描述了标量扰动. 这意味着我们选择了一个*规范*或一种坐标系统来描述时空. 如果选择另外一种系统, 我们将会得到度规的另一种不同的形式, 即不同的规范. 尽管到了后面, 我们几乎都将在共形牛顿规范 [(4.9) 式] 下讨论问题, 然而历史上还有很多其他的规范被使用, 并且对于 “宇宙学扰动” 不同部分的问题, 不同的规范也各有其优越性. 实际上, 我们将会在 6.5.3 节中看到, 在暴胀理论的研究中有时会倾向于使用*空间平滑规范*(g_{ij} 未被扰动), 因为由暴胀引起的扰动方程得到了相当程度的简化. 另外, 目前被大多数人使用的计算宇宙各向异性和非均匀性的程序是*同步规范*, 其中部分原因是这样的规范更有利于数值计算. 所以, 在不同的规范之间变换是很有用的, 我将用一些篇幅描述如何作规范变换.

最一般地, 对度规张量的标量扰动可以写成如下的形式:

$$\begin{aligned} g_{00} &= -(1+2A) \\ g_{0i} &= -aB_{,i} \\ g_{ij} &= a^2(\delta_{ij}[1+2\psi]-2E_{,ij}) \end{aligned} \tag{5.67}$$

这里有四个函数用来描述对度规的标量扰动：A, B, ψ 和 E. 它们都是时间和空间的函数, 且都是标量. 例如, g_{0i} 分量是其中一个标量方程的导数, 并非一个独立的带方向的矢量函数. 在共形牛顿规范下, $A=\Psi$, $\psi=\Phi$ 且 $B=E=0$.

我们怎样将一个规范变换到另一个？如果用一个不同的坐标系 $\tilde{x}$ 来代替原坐标 x, (2.2) 式中的距离不变量守恒. 所以,

$$\tilde{g}_{\alpha\beta}(\tilde{x})\mathrm{d}\tilde{x}^\alpha\mathrm{d}\tilde{x}^\beta = g_{\mu\nu}(x)\mathrm{d}x^\mu\mathrm{d}x^\nu, \tag{5.68}$$

为了在下面的公式中显得更清晰, 在上式等号左右两边用了不同的缩并指标. 上式左边第一项微分可以写成 $\mathrm{d}\tilde{x}^\alpha=(\partial\tilde{x}^\alpha/\partial x^\mu)\mathrm{d}x^\mu$, 将其他项也写成这样的形式, 两边除以 $\mathrm{d}x^\mu\mathrm{d}x^\nu$, 得到

$$\tilde{g}_{\alpha\beta}(\tilde{x})\frac{\partial\tilde{x}^\alpha}{\partial x^\mu}\frac{\partial\tilde{x}^\beta}{\partial x^\nu} = g_{\mu\nu}(x). \tag{5.69}$$

我们将利用这个公式指出度规在坐标变换下如何改变.

坐标变换最普遍的形式是

$$
\begin{aligned}
t \to \tilde{t} &= t + \xi^0(t,\vec{x}) \\
x^i \to \tilde{x}^i &= x^i + \delta^{ij}\xi_{,j}(t,\vec{x}),
\end{aligned}
\tag{5.70}
$$

其中 ξ^0 和 ξ 是扰动变量的同阶微扰. 现在检测度规在这种坐标变换下如何变化. 我只推导其中的一个分量, 而其他分量留作练习. 考虑 (5.69) 式的 $_{00}$ 分量:

$$
\tilde{g}_{\alpha\beta}(\tilde{x})\frac{\partial \tilde{x}^\alpha}{\partial t}\frac{\partial \tilde{x}^\beta}{\partial t} = -[1+2A]. \tag{5.71}
$$

只有 $\alpha=\beta=0$ 时, 等号左边不为零. 考虑 $\alpha=0$, $\beta=i$ 的情况. $\tilde{g}_{0i}$ 的非对角线元素正比于一阶扰动 $\tilde{B}_{,i}$. 但 $\partial\tilde{x}^i/\partial t$ 正比于一阶量 ξ, 故乘积为二阶量, 可忽略. 同理 $\alpha=i$, $\beta=j$ 的情况也可忽略. 所以等号左边得到

$$
\begin{aligned}
-[1+2\tilde{A}]\left(\frac{\partial\tilde{t}}{\partial t}\right)^2 &= -[1+2\tilde{A}]\left(1+\frac{\partial\xi^0}{\partial t}\right)^2 \\
&\simeq -1-2\tilde{A}-2\frac{\partial\xi^0}{\partial t}.
\end{aligned}
\tag{5.72}
$$

它等于 g_{00}, 所以

$$
-2\tilde{A}-2\frac{\partial\xi^0}{\partial t} = -2A, \tag{5.73}
$$

所以, 在 (5.70) 式的坐标变换下,

$$
A \to \tilde{A} = A - \frac{1}{a}\dot{\xi}^0. \tag{5.74}
$$

由同样的套路, 度规的其他分量变换为

$$
\begin{aligned}
\tilde{\psi} &= \psi - H\xi^0 \\
\tilde{B} &= B - \frac{\xi^0}{a} + \dot{\xi} \\
\tilde{E} &= E + \xi.
\end{aligned}
\tag{5.75}
$$

这里需要注意一点: (5.74) 式和 (5.75) 式描述了度规张量的分量如何在一般的坐标系的变化下的变换. 这些方程在变得标准一些后可能会引起误解. 因为, 任意一个单独的函数, 例如 A, 犹如标量变换, 即在坐标变换下保持不变. 这里我们已经将度规本身变换,A,B,ψ 和 E 也进行了新的定义. 这并不等同于 A 本身的变换.

总之, 共有四个函数描述标量扰动, 但在坐标变换下, 这些可以用另外两个函数代替. 例如, 一开始使用 $E\neq 0$ 的度规, 很方便地进行坐标变换来消除 E: 只要设 $\xi=-E$, 则 $\tilde{E}=0$. 结果是, 最终只有 $4-2=2$ 个函数是有用的. 这也就是我们

为什么在共形牛顿规范下只有两个函数 Φ 和 Ψ. 更一般地, 可以构造两个**规范不变量**, 它们在一般的坐标变换下保持不变. Bardeen (1980) 首先找到了这样的两个变量:

$$\Phi_A \equiv A + \frac{1}{a}\frac{\partial}{\partial\eta}[a(\dot{E} - B)]$$
$$\Phi_H \equiv -\psi + aH(B - \dot{E}). \tag{5.76}$$

在共形牛顿规范下, $E = B = 0$, $\Phi_A = \Psi$, $\Phi_H = -\Phi$. 这样的不变量非常有用：若在一个特定的规范下的方程有简单的形式, 则可以在这个规范下求解, 得到规范不变量, 然后可以在任何规范下将这些不变量变成扰动量. 6.5.3 节将精确地进行这样的计算. 换句话说, Φ_A 和 Φ_H 是度规变换的有用的捷径.

在一般的坐标变换下, 能动张量 $T_{\mu\nu}$ 的分量同样要发生变化. 与度规张量的变换完全类似, 有

$$\tilde{T}_{\mu\nu}(\tilde{x}) = \frac{\partial x^\alpha}{\partial \tilde{x}^\mu}\frac{\partial x^\beta}{\partial \tilde{x}^\nu}T_{\alpha\beta}(x). \tag{5.77}$$

同样地, Bardeen 找到了 $T_{\mu\nu}$ 的分量的组合, 使其在规范变换下保持不变, 因此能够很方便地连接不同的规范. 特别地, 在傅里叶空间,

$$v \equiv \mathrm{i}kB + \frac{\hat{k}^i T_i^0}{(\rho + \mathcal{P})a} \tag{5.78}$$

在坐标变换下保持不变. 在共形牛顿规范下, 对于物质, v 与第 4 章定义的 v 相同; 对于辐射, $v = -3\mathrm{i}\Theta_{r,1}$, 即正比于偶极子. 第二个不变量是一般化的能量密度的扰动

$$\varepsilon \equiv -1 - \frac{T_0^0}{\rho} + \frac{3H}{k^2\rho}k^i T_i^0. \tag{5.79}$$

在共形牛顿规范下, 对于物质, $\epsilon_m = \delta + (3aHv/k)$, 在小于视界的尺度它化简为通常的密度起伏 δ; 对于辐射, $\epsilon_m = 4\Theta_{r,0} - 12\mathrm{i}\Theta_{r,1}aH/k$, 在小尺度, 也化简为通常的密度起伏.

5.6 小 结

爱因斯坦场方程将度规的扰动和对物质和辐射的扰动联系在一起. 利用场方程 $G_{\mu\nu} = 8\pi GT_{\mu\nu}$ 的两个分量, 得到了关于描述度规标量扰动的两个函数 Φ 和 Ψ 的演化方程. 在傅里叶空间讨论这些方程非常方便. 我们的习惯是忽略傅里叶空间变量的 "~" 符号. 这两个方程是

$$k^2\Phi + 3\frac{\dot{a}}{a}\left(\dot{\Phi} - \Psi\frac{\dot{a}}{a}\right) = 4\pi Ga^2[\rho_{\mathrm{m}}\delta_{\mathrm{m}} + 4\rho_{\mathrm{r}}\Theta_{\mathrm{r},0}] \tag{5.27}$$

$$k^2(\Phi+\Psi) = -32\pi G a^2 \rho_{\rm r}\Theta_{{\rm r},2}. \tag{5.33}$$

这里的下角标 “m” 包括了所有可能的物质, 如重子物质和暗物质; 下角标 “r” 包括了任何辐射, 如中微子和光子, 即

$$\rho_{\rm m}\delta_{\rm m} \equiv \rho_{\rm dm}\delta + \rho_{\rm b}\delta_{\rm b}, \quad \rho_{\rm r}\Theta_{{\rm r},0} \equiv \rho_\gamma\Theta_0 + \rho_\nu\mathcal{N}_0$$
$$\rho_{\rm m}\upsilon_{\rm m} \equiv \rho_{\rm dm}\upsilon + \rho_{\rm b}\upsilon_{\rm b}, \quad \rho_{\rm r}\Theta_{{\rm r},1} \equiv \rho_\gamma\Theta_1 + \rho_\nu\mathcal{N}_1 \tag{5.80}$$

爱因斯坦场方程的其他分量方程是多余的, 它们并未增加 Φ 和 Ψ 的更多的信息. 例如, 其时间–空间分量, 将在练习 5 中推导. 有时, 演化方程的某种形式会比其他形式更加有用处. 例如, 几个分量方程的组合 (见练习 6) 得到一个关于势的代数方程:

$$k^2\Phi = 4\pi G a^2\left[\rho_{\rm m}\delta_{\rm m} + 4\rho_{\rm r}\Theta_{{\rm r},0} + \frac{3aH}{k}({\rm i}\rho_{\rm m}\upsilon_{\rm m} + 4\rho_{\rm r}\Theta_{{\rm r},1})\right]. \tag{5.81}$$

爱因斯坦场方程的其他分量方程并非包含 Φ 和 Ψ 的信息, 而是关于矢量扰动和张量扰动的信息. 标量扰动、矢量扰动和张量扰动非耦合：每种扰动独立于其他扰动而演化. 在第 6 章中我们将会看到, 暴胀会产生张量扰动, 所以了解爱因斯坦场方程如何描述张量扰动的演化非常重要. 我们给出两个函数 h_+ 和 $h_\times$, 能够完备地描述张量扰动, 它们独立演化, 满足方程

$$\ddot{h}_\alpha + 2\frac{\dot{a}}{a}\dot{h}_\alpha + k^2 h_\alpha = 0 \tag{5.63}$$

其中 α 代表 $+$ 和 $\times$. 在膨胀的宇宙中, (5.63) 式描述的引力波的强度自从模进入视界起开始衰减.

推 荐 读 物

很多宇宙学的读物给出了扰动的爱因斯坦场方程的推导. *The Large Scale Structure of the Universe* (Peebles) 是一本很好的参考书, 特别是在同步规范中. *Cosmological Inflation and Large Scale Structure* (Liddle and Lyth) 很好地揭示了度规选择的物理意义. 在此领域有两篇很深刻的综述性文章 (Mukhanov, Feldman and Brandenberger, 1992; Kodama and Sasaki, 1984), 前者更容易被接受而后者更具普遍性. 它们都是基于文献 (Bardeen, 1980), 这篇文章在度规不变量的处理上简明而清晰.

第 2 章中提到的广义相对论的书籍都很好地讨论了引力波. 在转向更专业的文献之前, 你应该阅读*Black Holes and Time Warps* (Thorne), 它很好地融合了与 20 世纪广义相对论有关的历史、科学和名人. 这是我读过的最好的科普书籍.

练　　习

1. 推导 (5.7) 式中的克氏符 $\Gamma^i_{\mu\nu}$. 这将利用到 g^{ij}, 证明它等于 $\delta_{ij}(1-2\Phi)/a^2$.

2. 证明 R_{ij} 由表达式 (5.14) 式给出.

3. 利用 (2.101) 式给出的能动张量的广义相对论形式 (在存在度规扰动时依然成立), 证明, 存在度规的标量扰动时, 场方程时间–时间分量在相空间积分得到 (5.22) 式. 证明成分 α 对 T^0_i 的贡献是

$$T^0_i = g_\alpha a \int \frac{\mathrm{d}^3 p}{(2\pi)^3} p_i f_\alpha(\vec{p}, \vec{x}, t). \tag{5.82}$$

注意积分号前的因子 a.

4. 考虑三阶矩阵 $G_{ij} = (\hat{k}_i \hat{k}_j - \delta_{ij}/3) G^L$. 证明这种形式是无迹的, 且满足 $\epsilon_{ijk} G_{kl,jl} = 0$, 故它是横向分量的一种形式.

5. 计算爱因斯坦张量的时间–空间分量. 证明, 在傅里叶空间,

$$G^0_i = 2\mathrm{i}k_i \left(\frac{\dot{\Phi}}{a} - H\Psi \right). \tag{5.83}$$

利用练习 3 中能动张量的计算结果, 证明

$$\dot{\Phi} - aH\Psi = \frac{4\pi G a^2}{\mathrm{i}k} [\rho_{\mathrm{dm}} \upsilon + \rho_{\mathrm{b}} \upsilon_{\mathrm{b}} - 4\mathrm{i}\rho_\gamma \Theta_1 - 4\mathrm{i}\rho_\nu \mathcal{N}_1]. \tag{5.84}$$

推导出书中得到的两个爱因斯坦场方程后, 时间–空间分量方程不包含更多的信息. 可以根据待处理问题的具体情况, 选择使用哪两个方程.

6. 作爱因斯坦场方程的牛顿近似. 联合时间–时间分量方程 (5.27) 和练习 5 中得到的时间–空间方程, 以得到一个关于势的代数方程 (5.81) (不含时间的导数). 证明, 在波长远小于视界 ($k\eta \gg 1$) 时, 这个方程化简为泊松方程 (含因子 a).

7. 推导出未推导的张量扰动方程.

(a) 证明张量扰动下, Γ^i_{jk} 满足 (5.43) 式.

(b) 证明 (5.48) 式最后一项为 (5.54) 式.

8. 我们在 (4.34) 式中定义了对光子分布函数的扰动. 证明, 如果 Θ 只依赖于 $\hat{k}$(取 $\hat{z}$ 方向) 和 $\hat{p}$ 的夹角的余弦 μ, 则 $T^1_1 - T^2_2$ 为零. 这实际上就是我们之前的假设. 这也是分解理论的另一个方面：与标量扰动相互影响的项 Θ 不影响张量扰动. 由张量扰动 h_+ 引发的各向异性使 Θ 具有如下形式：

$$\Theta(\mu, \phi) = (1-\mu^2)\cos(2\phi)\Theta_+(\mu) \tag{5.85}$$

而对于 $h_\times$ 的方程只是将式中的 cos 替换为 sin. 然而这些方程对于引力波的影响可以忽略, 故 (5.63) 式右侧可以设为零.

9. 利用爱因斯坦场方程的 $^1{}_2$ 分量证明, $h_\times$ 满足与 h_+ 一样的演化方程.

10. 证明标量扰动 (Φ 和 Ψ) 对 $G^1_1 - G^2_2$ 和 G^1_2 都无贡献. 这使得对于标量扰动和张量扰动的分解理论更加完整.

11. 考虑对度规的矢量扰动. 矢量扰动由两个函数 h_{xz} 和 h_{yz} 来描述, 只有度规的空间部分被扰动. g_{ij} 的扰动部分为

$$h_{ij}^{V} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & h_{xz} \\ 0 & 0 & h_{yz} \\ h_{xz} & h_{yz} & 0 \end{pmatrix}. \tag{5.86}$$

证明, h_{xz} 和 h_{yz} 不影响我们已经导出的标量扰动和张量扰动的演化方程. 这也是分解理论的另一个方面.

12. 分别在宇宙为纯物质主导、纯辐射主导的情况下, 求解波动方程 (5.63).

13. 定义引力波演化的*转移函数*为

$$T(k) \equiv \frac{h_\alpha(k,\eta)}{h_\alpha(k,\eta=0)}\left(\frac{k\eta}{3j_1(k\eta)}\right). \tag{5.87}$$

你应该发现, 括号中即练习 12 中物质主导情况下的解的倒数. 数值求解 (5.63) 式以得到转移函数. 将你的结果与 Turner, White 和 Lidsey (1993) 的拟合结果比较:

$$T(y) = [1 + 1.34y + 2.5y^2]^{1/2} \tag{5.88}$$

其中 $y \equiv (k\eta_0/370h)$(h 为约化的哈勃常数). 这里假设宇宙是平坦、物质主导的, 但计入物质–辐射转变.

14. 推导度规分量的变换 (5.75) 式. 证明 Φ_A 和 Φ_H 在一般的坐标变换下保持不变.

第 6 章　宇宙早期的初始条件

为了了解宇宙的结构, 我们已经推导出了在均匀宇宙背景下加入扰动后的方程组. 在开始求解这些方程组之前, 我们必须先给出方程的初始条件. 追寻初始条件的过程使我们进入了一个崭新的物理领域 —— 暴胀理论. 暴胀理论的引入 (Guth, 1981; Linde 1982; Albrecht and Steinhardt, 1982) 是为了解释为何从未有过因果关联的区域会有相同的温度. 之后很快发现, 能够解释宇宙温度均匀性的机制同样也得到了宇宙的原初扰动 (Starobinsky, 1982; Guth and Pi, 1982; Hawking, 1982; Bardeeh, Steinhardt, and Turner, 1983; Brandenberger, Kahn, and Press, 1983; Guth and Pi, 1985). 所以, 为了得到宇宙早期的一系列初始条件, 我们必须花一些篇幅在暴胀理论上. 请注意：我们并不确定暴胀理论就是产生原初扰动的机制. 这个理论所对应的能量远远高于加速器所达到的范围, 因此检验这个理论也十分困难. 然而, 这也是当前唯一合理的解释. 实际上, 当今宇宙学的问题之一是没有任何能代替暴胀理论的理论. 而对于 CMB 和大尺度结构的下一个时代的观测会对暴胀理论做出更严格的检验.

6.1　早期宇宙的爱因斯坦–玻尔兹曼方程

第 4 章和第 5 章中给出了关于 9 个扰动变量的 9 个一阶微分方程. 理论上, 为了求解它们, 需要所有这些变量的初始条件. 实际上, 这些变量的某个组合将它们联系起来, 而我们只需确定其中之一的组合的初始条件. 本节给定了所有变量在早期如何依赖于引力势 Φ; 本章其余部分给出 Ψ 的初始条件.

首先考虑宇宙早期的玻尔兹曼方程 (4.100)$\sim$(4.107) 式. 特别地, 我们应考虑宇宙极早期, 以至于对于任何 k 模式, 都有 $k\eta \ll 1$. 这个不等式立即能使方程得到很多重要的简化. 首先考虑 (4.100) 式 $\dot{\Theta}$ 和 $\mathrm{i}k\mu\Theta$ 两项. 第一项是 Θ/η 的量级, 而第二项是 $k\Theta$ 的量级. 所以第一项比第二项大 $1/(k\eta)$ 的量级, 由宇宙早期的假定, $1/(k\eta)$ 远大于 1. 类似地, 可以得到结论：玻尔兹曼方程中所有被 k 乘的项在宇宙早期可以忽略. 其物理意义是：早期宇宙中一切扰动的波长 ($\sim k^{-1}$) 都大于当时物理作用的范围. 在那时假定的观测者看到的是在其视界内光子构成的均匀的 “天空”. 故多极矩 (Θ_1,Θ_2, $\ldots$) 远小于单极矩 Θ_0. 光子和中微子温度的演化方程变为

$$\dot{\Theta}_0 + \dot{\Phi} = 0,$$

$$\mathcal{N}_0 + \dot{\Phi} = 0. \tag{6.1}$$

这样的原理同样适用于物质分布. 密度扰动的方程化简为

$$\begin{aligned}\dot{\delta} &= -3\dot{\Phi},\\ \dot{\delta}_{\mathrm{b}} &= -3\dot{\Phi}.\end{aligned} \tag{6.2}$$

物质的运动速度类似于辐射分布函数的一阶矩, 它比密度扰动小 $k\eta$ 的量级, 因此在早期可以设为零. 事实上, 重子物质的速度并不类似于光子的一阶矩 Θ_1: 这取决于康普顿散射的强度.(4.106) 式中 $\dot{\tau}$ 很大时, 必有 $v_{\mathrm{b}} = -3\mathrm{i}\Theta_1$. 在之后重新检验接近退耦时的玻尔兹曼方程时, 还会用到这个结论. 现在, 我们讨论宇宙极早期的情况, 那时, 所有高阶矩都可以忽略.

下面再看宇宙早期的爱因斯坦场方程. 首先考虑 (5.27) 式, 第一项包含 k^2, 可以被忽略. 同样, 由于当时辐射为主, 方程右侧两个物质项可以被忽略. 得到

$$3\frac{\dot{a}}{a}\left(\dot{\Phi} - \frac{\dot{a}}{a}\Psi\right) = 16\pi G a^2(\rho_\gamma\Theta_0 + \rho_\nu\mathcal{N}_0). \tag{6.3}$$

由辐射为主, $a \propto \eta$(见 (2.100) 式及之后的讨论), 故 $\dot{a}/a = 1/\eta$. 所以

$$\begin{aligned}\frac{\dot{\Phi}}{\eta} - \frac{\Psi}{\eta^2} &= \frac{16\pi G\rho a^2}{3}\left(\frac{\rho_\gamma}{\rho}\Theta_0 + \frac{\rho_\nu}{\rho}\mathcal{N}_0\right)\\ &= \frac{2}{\eta^2}\left(\frac{\rho_\gamma}{\rho}\Theta_0 + \frac{\rho_\nu}{\rho}\mathcal{N}_0\right),\end{aligned} \tag{6.4}$$

这里最后一步等式成立利用了零阶爱因斯坦场方程.

为进一步化简, 定义中微子能量密度与总辐射能量密度的比

$$f_\nu \equiv \frac{\rho_n u}{\rho_\gamma + \rho_n u}. \tag{6.5}$$

将 (6.4) 式乘以 η^2 得到

$$\dot{\Phi}\eta - \Psi = 2([1 - f_\nu]\Theta_0 + f_\nu\mathcal{N}_0). \tag{6.6}$$

(6.1) 式描述了单极矩的导数与引力势的导数之间的关系. 将 (6.6) 式左右两边求导, 以消去单极矩项, 得到

$$\ddot{\Phi}\eta + \dot{\Phi} - \dot{\Psi} = -2\dot{\Phi}, \tag{6.7}$$

得到上式右侧是因为 $\dot{\Theta}_0$ 和 $\mathcal{N}_0$ 在大尺度下等于 $-\dot{\Phi}$.

目前只用了其中一个爱因斯坦场方程. 另一个, (5.33) 式描述了在光子和中微子分布的高阶矩存在的情况下, $\Psi + \Phi$ 不为零. 这里, 我们忽略这些让两个引力势

的和偏离零的高阶矩①. 在这样的假设下, 可以随时用 Ψ 来消去 $-\Phi$. 所以

$$\ddot{\Phi}\eta + 4\dot{\Phi} = 0. \tag{6.8}$$

设 $\Phi = \eta^p$, 得到代数方程

$$p(p-1) + 4p = 0. \tag{6.9}$$

它有两个解：$p = 0, -3$. $p = -3$ 为一个衰减模式, 如果这个模式在很早期被激发, 它将很快衰减以至于对目前的宇宙无影响. 而 $p = 0$ 的模式一旦被激发将不会衰减, 这是我们感兴趣的. 如果某种机制被发现能够激发这种模式, 那么这种机制很有可能是造成宇宙原初扰动的原因.

于是我们只关注 $p = 0$ 的模式, 可见 (6.6) 式将引力势与中微子和光子的密度扰动联系起来：

$$\Phi = 2([1 - f_\nu]\Theta_0 + f_\nu \mathcal{N}_0). \tag{6.10}$$

Θ_0 和 $\mathcal{N}_0$ 都不随时间变化. 结构形成的大多数模型中它们是相等的, 因为造成扰动的任何机制都不会区分光子和中微子. 所以, 可以设

$$\Theta_0(k, \eta_i) = \mathcal{N}_0(k, \eta_i) \tag{6.11}$$

得到

$$\Phi(k, \eta_i) = 2\Theta_0(k, \eta_i) \tag{6.12}$$

这里明确写出了所有变量对 k 的依赖关系, 并且强调了这样的初始条件是在宇宙早期时间 η_i 建立的.

物质分布的初始条件 δ 和 δ_b, 依赖于原初扰动的本质. 将 (6.1) 第一式和 (6.2) 式合并得到暗物质密度扰动的方程

$$\delta = 3\Theta_0 + \mathrm{constant}, \tag{6.13}$$

重子物质密度扰动的方程具有同样的形式. 原初密度扰动通常被分为两部分, 其中之一 (绝热扰动) 使得 (6.13) 式中的常数为零, 另外一部分 (等曲率扰动) 使得这个常数不为零. 其中绝热扰动在各点具有相同的物质–辐射比, 因为

$$\frac{n_\mathrm{dm}}{n_\gamma} = \frac{n_\mathrm{dm}^{(0)}}{n_\gamma^{(0)}} \left[\frac{1+\delta}{1+3\Theta_0}\right]. \tag{6.14}$$

① 见练习 2, 详细地考虑了中微子的四极矩的效应; 而康普顿散射使光子的四极矩保持很小, 所以它对 (5.33) 式确实没有贡献.

中括号之前的因子, 即零阶数密度, 在时空各点都为常数. 由于物质、辐射的数密度比是均匀的, 中括号内的项 (可线性化为 $1+\delta-3\Theta_0$) 应与空间无关. 所以对于绝热扰动, 扰动的和必为零,

$$\delta = 3\Theta_0, \tag{6.15}$$

对于重子物质, 同理可得 $\delta_{\rm b} = 3\Theta_0$. 还有很多模型是基于等曲率扰动, 但至今它们的进展都不是很大; 我们将主要讨论绝热初始条件.

在大多数情况下, 速度和偶极矩在宇宙早期可以忽略. 然而, 我们也会遇到在初始条件中需要考虑这些的情况. 练习 3 中将会看到, 这样的初始条件为

$$\begin{aligned}\Theta_1 = \mathcal{N}_1 = \frac{\mathrm{i}v_{\rm b}}{3} = \frac{\mathrm{i}v}{3} \\ = -\frac{k\Phi}{6aH}.\end{aligned} \tag{6.16}$$

6.2 视　界

如果这本书是一本小说或传记, 本节可以命名为*中年危机*. 主人公进入一所优秀的中学, 然后考入一所好大学. 这时他爱上了一个有激情也很懂事的女孩. 在毕业前, 经过几次面试, 在市中心找到了一份好工作. 他与他的大学女朋友结婚, 在城市居住了几年后, 他们搬到了郊区并有了三个孩子. 我们的男主角积极投入社区建设并被认可为一个可敬的公民. 他在公司很快晋升, 并得到一个政治演讲的机会. 正当将要陈述自己的候选资格时, 他陷入了困境."我一直在做什么? 什么才是最重要的? 难道这些年的学习工作仅仅是沿着命中注定的轨迹? 我这样做难道是因为其他人也在向同样的方向前进? 我的人生有何与众不同之处?" 更糟的是, 他怀疑自己建立起来的全部人生都是基于一个错误.

也许这并不会是一本畅销书, 但它为我们学习宇宙的扰动提供了一个很好的比喻. 到目前为止我们一直在很系统、恰当地做着每件事. 我们首先回顾了标准的大爆炸宇宙学, 然后对这个零阶、均匀的宇宙作展开, 得到了粒子分布的扰动和引力场扰动的演化方程, 并意识到这些耦合的微分方程需要初始条件来求解, 在上一节也建立了这些初始条件. 然而, 现在必须问: 这些原初扰动是如何产生的? 当然, 我们可以写出 $\Phi = 2\Theta_0$ 这样的初始条件, 但去解释 Φ 在最开始为何不为零, 完全又是另一回事.

实际比这更糟. 让我们先思考共形时间 η 的物理意义: 它是自宇宙诞生以来光能够传播的最大共动距离. 同样, 现在 (共动距离) 相距超过 η 的两个物体应从未有过接触, 因为任何信息不可能传递超过 η 的距离. 由于这个原因, η 被称为共动视界.

通过这样的理解, 重新审视上一节所提到的状态 $k\eta \ll 1$. 波数 k 粗略地等于该傅里叶模式的波长的倒数 (差一个因子 2π). 因此 $k\eta$ 就是共动视界与扰动波长的共动尺度的比值. 如果这个比值远小于 1, 则这个傅里叶模式的波长很大, 以至于在当时不会被任何物理效应所影响. 图 6.1 中, 视界随尺度因子的增长而增长, 而相关的共动波长保持不变. 宇宙学中所有有关的傅里叶模式的波长都曾在宇宙早期大于视界. 随宇宙演化, 这些宇宙学模式相继*进入视界*, 在一个模式进入视界之后, 相关的物理效应便开始作用于其上.

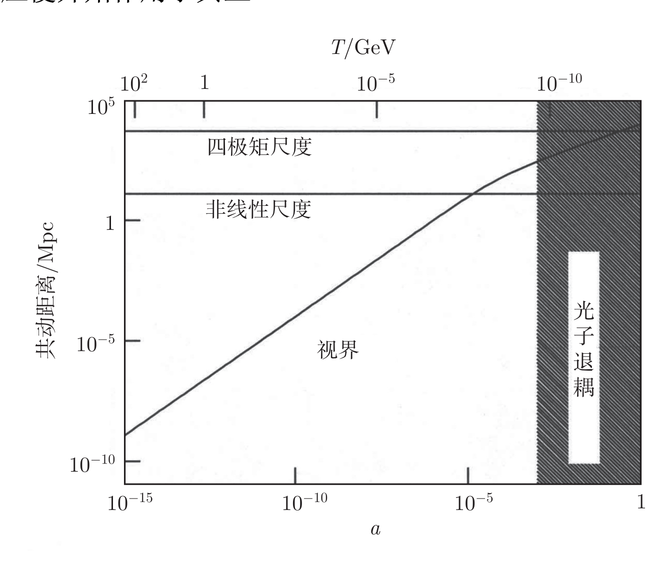


图 6.1 共动视界随尺度因子的变化. 图中还画出了两个共动波长, 它们不随时间变化. 在宇宙早期, 包含着两个模式的所有相关模式的波长都曾大于视界.CMB 产生于位于 $a \simeq 10^{-3}$ 的最后散射面. 在那时, 一些很大的尺度 (如图中标出的“四极矩尺度”) 仍在视界之外. 视界疑难的内容是：为何在最后散射面上相距大于视界的区域能够具有相同的温度?

最令人烦恼的是考虑当今宇宙微波背景辐射的情形.CMB 在所有尺度的观测都近似于各向同性. 这是怎么造成的? 观测到的 CMB 的最大尺度只有在近期才进入视界, 远远晚于退耦时刻 (例如, 图 6.1 中画出了与 CMB 的四极矩所对应的尺度). 在退耦之前, 这些模式的波长很大, 以至于没有任何物理机制能够消除这个模式对均匀的偏离. 在退耦之后, 光子不再相互作用, 开始自由传播. 所以, 即使从理论上讲, 今天来自相反方向的光子有机会相互作用以达到相同温度的平衡态, 但实际上这也不可能发生. 为何 CMB 的温度竟会如此均匀? 在之前我们掩饰了这个深奥的问题, 只是假设温度是均匀的, 且假设对于零阶温度的扰动还是很小的.

图 6.2 更直观地表述了视界疑难. 在任意给定时刻, 只有在圆锥以内的区域与我们 (位于中心) 有因果联系. 今天我们观测到的最后散射面上的光子在最初发射

时远远超过视界的范围. 让人难以理解的是：对大尺度各向异性的观测指出, 在最后散射面相距很多倍视界的光子, 竟然会拥有相同的温度 (10^5 分之一的精确度)

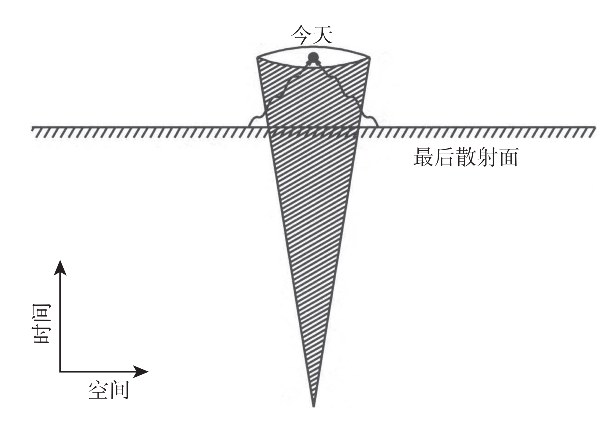


图 6.2　视界疑难. 在任何时刻圆锥以内的区域都与我们 (位于中心) 有因果联系. 从最后散射面 (位于红移 ~ 1000) 发射的光子起始于这个区域之外. 所以, 在最后散射面上, 它们不应与我们有任何联系, 它们之间更不应该有联系. 然而它们的温度却几乎相同

6.3　暴　　胀

本节为上一节给出的视界疑难提供了一个美妙的解释. 首先, 我们找到一个合理的解释替代先前的论述, 即认识到一种宇宙早期的快速膨胀能够解决视界疑难. 之后通过爱因斯坦场方程得到能够产生这种快速膨胀的能量类型, 即负压力. 最后, 考虑一种标量场理论, 并指出我们所需的负压力适用于这样的理论.

这里对场论做两点评论. 第一, 场论由于它的复杂而声名远扬, 然而我们在暴胀理论中用到的部分却比较简单. 实际上, 我们对场论所需要了解的, 几乎在上一章广义相对论的讨论中都已经提及过了. 第二, 并没有能够推动暴胀的已知的标量场 (有的怀疑论者甚至会指出根本就不存在什么本质的标量场！). 所以, 很有可能暴胀理论是正确的, 但它是由标量场外的其他机制所引发的. 每当需要明确暴胀的起因时, 有很多原因使得我们选择标量场. 几乎所有基本粒子物理学都包含标量场. 历史上, 正是粒子物理学家研究标准模型 (大统一理论 (Grand Unified Theory)) 在高能的扩展时提出了暴胀的想法, 而标量场正是这种高能扩展所得到的副产品. 实际上, 目前几乎所有针对暴胀的研究工作都是基于标量场 (有时是两个标量场). 另一种与粒子物理不同的想法是：利用一种矢量场 (类似电磁场的势) 或一系列费米子 (类似低温超导过程) 去引发暴胀. 这两种选择并没有很好地解释暴胀, 反而使理论更加复杂化, 所以我们主要讨论标量场.

6.3.1 解决视界疑难

为了找到一个解决视界疑难的方法, 让我们首先将共动视界写为

$$\eta = \int_0^a \frac{\mathrm{d}a'}{a'} \frac{1}{a'H(a')}. \tag{6.17}$$

可见, 共动视界是*共动哈勃半径*$1/aH$ 的对数积分. 哈勃半径是在宇宙进行一次膨胀的时间 (大约是尺度因子变为原来的两倍所用的时间) 内, 粒子能穿过的最大距离. 所以哈勃半径是粒子间是否有因果联系的另一个量度: 如果粒子间相距超过哈勃半径, 它们在当时不可能有联系. 这里的共动视界 η 和共动哈勃半径 $(aH)^{-1}$ 有一个细微的差别. 若粒子相距大于共动视界 η, 则它们*从未*有过联系; 若粒子相距大于共动哈勃半径 $(aH)^{-1}$, 则它们只是*现在*无法联系. 所以很有可能现在的 η 比 $(aH)^{-1}$ 大很多, 故现在不能相互作用的粒子在很早的时候是存在因果联系的. 如果是这样, 那么在早期, 共动哈勃半径远大于现在的值, 所以, η 主要来自宇宙早期的贡献. 这是可能发生的, 但不会发生在物质或辐射主导的时代, 因为这些情况下共动哈勃半径随时间增加, 所以通常我们认为对 η 的最大贡献主要来自最临近现在的时期. 实际上这就是图 6.1 中指出的.

回到图 6.1 中, 图上方的坐标轴给出了在给定尺度因子的宇宙等离子体的温度. 在达到这幅图的左边界时, 能量达到几百 GeV, 这种情况下的物理规律我们并不了解. 在图中的能量范围内, 粒子物理的标准模型是非常适用的. 当超过这个能量范围, 尽管我们也有很多理论, 但没有实验以支持某一个理论. 由于宇宙中的能量成分决定了 $a(t)$ 的变化, 当在图 6.1 中将视界的变化外推到 $a = 0$ 时 (温度无限高), 这的确只是一个假设, 即假设了在更早的时期没有特别的事情发生, 也就是宇宙在早期一直处于辐射主导的状态. 如果这个假设成立, 则确实得出: 共动视界在极早期得到的增长可以忽略, 大爆炸发生不到 1s 的时间光子只能穿行很短的一段距离.

这引出了一个解决视界疑难的办法: 也许在宇宙极早期并非物质或辐射主导. 也许, 至少在很短的一段时间内, 共动哈勃半径减小了. 这样, 我们会得到图 6.3 所描述的状态. 共动哈勃半径在这一时期急剧减小. 这种情况下, 共动视界并非是在近期显著增加的, 而是在共动坐标快速膨胀之前的时代. 今天相距几个哈勃半径的粒子 (如图 6.3 下图, 圆圈之外的粒子), 在这个快速膨胀之前曾经有过因果联系 (如图 6.3 上图, 在表示成哈勃半径的圆圈中).

怎样才能使尺度因子这样演化以解决视界疑难呢? 先定性地回答这个问题. 如果共动哈勃半径减小,aH 必须增加, 即

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[a\frac{\mathrm{d}a/\mathrm{d}t}{a}\right] = \frac{\mathrm{d}^2a}{\mathrm{d}t^2} > 0. \tag{6.18}$$

所以, 为了解决视界疑难, 宇宙必须经历一个迅速加速膨胀的时代. 这便是*暴胀*一词

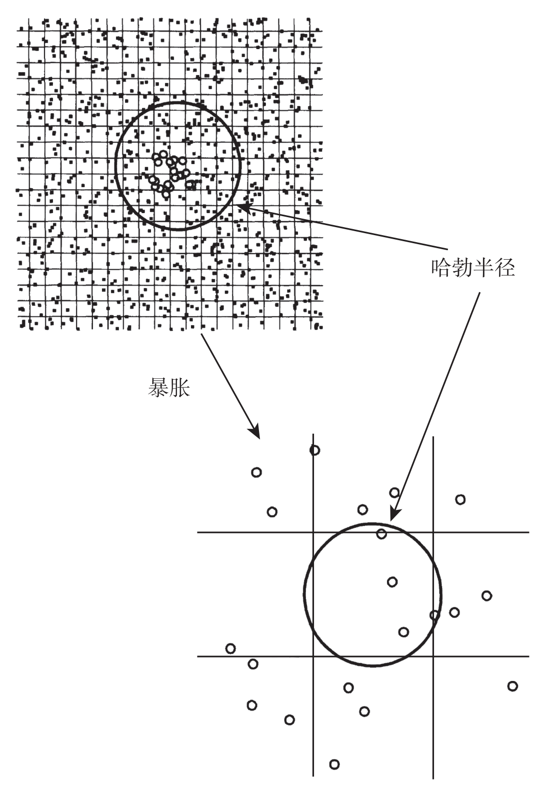


图 6.3　在暴胀发生之前 (上图) 和之后 (下图) 粒子在共动坐标网格上的位置对比. 上图和下图中用圆圈表示的粒子是相同的粒子。暴胀发生之前, 共动哈勃半径很大, 包含了几十个坐标网格. 暴胀结束后, 共动哈勃半径已经收缩到只有一个网格大小 (在图中, 尺度因子只扩大到原来的 7 倍, 而对于实际的暴胀这个倍数大于 e^{60}). 共动哈勃半径的收缩导致原本有相互作用的粒子 (上图的圆圈中) 已不能再发生联系. 注意, 在两个图中用圆圈标出的哈勃半径的物理尺度在暴胀过程中几乎保持不变

的由来. 为了定量地理解暴胀时期, 先给出大多数暴胀模型的能量量级是 10^{15}GeV 或更高. 当温度达到 10^{15}GeV 时共动哈勃半径是多少呢? 为了估计其量级, 忽略相对短暂的宇宙物质主导的阶段, 假设在暴胀结束后, 宇宙一直处于辐射主导时期 (练习 6 对这个假设进行了修正). H 随 a^{-2} 变化, 故 $a_0H_0/a_eH_e = a_e$, 其中 a_e 是暴胀结束后的尺度因子. 若 a_e 对应的时刻的温度为 10^{15}GeV, 则 $a_e \simeq T_0/10^{15}\text{GeV} \simeq 10^{-28}$. 故共动哈勃半径在暴胀结束时比现在小 28 个数量级. 如果暴胀解决了视界疑难, 那么在暴胀开始时的共动哈勃半径应大于我们今天观测到的最大尺度, 即今天的共动哈勃半径. 所以在暴胀时期, 共动哈勃半径应减小了 28 个量级.

通常可以构造一个在暴胀时期 H 保持常数的模型. 这样, 由于 $\mathrm{d}a/a = H\mathrm{d}t$,

尺度因子的演化模式为

$$a(t) = a_e \mathrm{e}^{H(t-t_e)}, \quad t < t_e. \tag{6.19}$$

这里 t_e 是暴胀结束的时刻. 尺度因子的指数膨胀使得共动哈勃半径 $(aH)^{-1}$ 减小. 为了让尺度因子增长 10^{28} 倍, 式中的指数幂须为 $\ln(10^{28}) \sim 64$(留意练习 6 中的修正), 所以说, 若宇宙能指数膨胀到自然对数 e 的 60 次方倍以上, 则暴胀便能解决视界疑难.

图 6.4 中画出了共动哈勃半径随尺度因子的变化. 其右半部分实际上与图 6.1 一致, 说明了在标准宇宙学中, 各种模式的共动尺度远大于哈勃半径. 图中左半部分展示出暴胀时期共动哈勃半径大幅减小. 这是有道理的：由于尺度因子急速膨胀, 光子变得越来越难以在共动坐标网格 (它随 a 膨胀) 上运动. 暴胀发生前, 共动哈勃半径远大于今天观测到的一切宇宙学尺度, 故那时这些尺度都在视界之内.

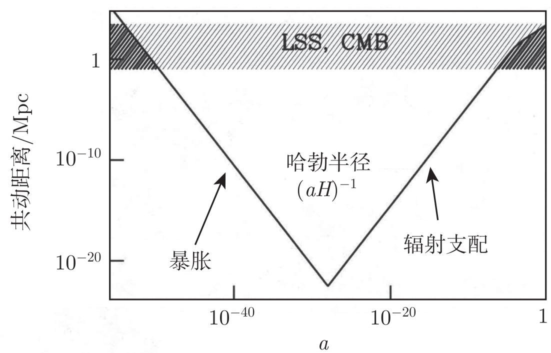


图 6.4　共动哈勃半径随尺度因子的变化. 宇宙学中一些常见的尺度 (阴影部分) 在 $a \sim 10^{-5}$ 之前都大于哈勃半径. 深色的阴影部分表示, 这些给定尺度小于哈勃半径, 使微观物理过程的发生变得可能. 极早期, 暴胀发生前, 所有尺度都小于哈勃半径, 可以在其内发生微观物理过程. 类似地, 直到最近, 这些尺度才依次重新进入哈勃半径

注意图 6.4 中的对称性. 那些直到今天才进入视界的尺度 (在暴胀后已膨胀 e^{60} 倍) 在暴胀结束前已经超过视界 e^{60} 倍. 这些尺度上扰动的强度在超视界 (尺度超出视界) 时保持不变. 所以, 今天当我们去测量它们时, 得到的结果仿佛就是它们在暴胀时期离开视界时的样子 (当其重新进入视界后发生的一切过程, 第 7、8 章将给出详细的计算). 当我们去解释当今宇宙的结构时, 理解暴胀时期产生的扰动非常重要.

在共动坐标下的暴胀已经讨论过了. 同样在物理尺度的坐标下思考这样的指数膨胀也十分有益. 图 6.5 描绘出视界在早期膨胀的状况. 原本有因果联系的区域的物理尺度 (a 乘以共动尺度) 在暴胀时期发生快速的指数膨胀. 今天观测到的宇宙尺度的结构在暴胀发生之前十分微小, 因此得以发生因果相互作用.

暴胀后, 总共动视界不再是一个有效的时间参量, 因为它在早期变得很大, 在之后的物质和辐射主导的时期变化很小. 可以对其进行简单的改正: 减去其初始值 $\eta_{\rm prim}$, 重新定义 η 为

$$\eta = \int_{t_{\rm e}}^{t} \frac{{\rm d}t'}{a(t')}, \tag{6.20}$$

这样, 总共动视界便是 $\eta_{\rm prim} + \eta$. 之后沿用这样的习惯. 注意, 这意味着在暴胀时期, η 取负值, 但仍然单调增加. 图 6.4 中某个尺度离开视界意味着 $k|\eta|$ 小于 1, 当晚期 $k\eta$ 大于 1 时这个尺度重新进入视界.

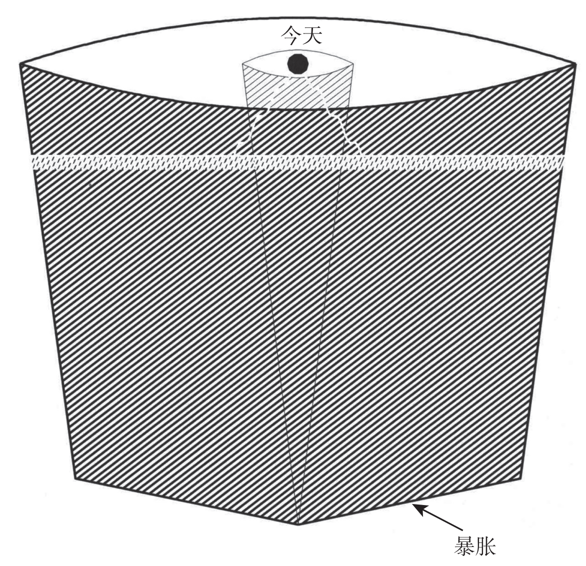


图 6.5　暴胀理论对视界疑难的解决. 图中较大的锥形表示暴胀模型的视界, 而中间较小的圆锥形表示没有发生暴胀的宇宙的视界. 暴胀时期, 物理尺度的视界增长极快. 阴影部分中的所有尺度都曾经有过因果联系, 这也是它们拥有相同温度的原因

总之, 暴胀—宇宙加速急剧膨胀的时期—解决了视界疑难. 在这个加速膨胀的时期, 哈勃半径的物理尺度保持不变, 原本有因果联系的粒子不能再相互作用. 今天相距很远的区域在暴胀之前和暴胀时保持因果联系. 在那时, 这些区域被给定了必要的初始条件, 即今天我们所观测到的均匀性; 我们在后面也会看到, 在均匀性基础上的微扰最终增长成为星系以及宇宙中的其他结构.

6.3.2　负压强

我们已证明, 一个加速膨胀的宇宙可以解决视界疑难. 广义相对论决定了宇宙能量成分和它如何膨胀的关系, 现在需要问, 怎样的能量能导致加速膨胀. 由零阶爱因斯坦场方程的时间–时间分量和空间–空间分量可以很快得到答案. 它们是 ((2.39)

式和 (2.93) 式)

$$\left(\frac{\mathrm{d}a/\mathrm{d}t}{a}\right)^2 = \frac{8\pi G}{3}\rho,$$
$$\frac{\mathrm{d}^2a/\mathrm{d}t^2}{a} + \frac{1}{2}\left(\frac{\mathrm{d}a/\mathrm{d}t}{a}\right)^2 = -4\pi G\mathcal{P}. \tag{6.21}$$

将上式第一个方程乘以 1/2 减去第二个方程, 消去 a 的一阶导数, 剩下

$$\frac{\mathrm{d}^2a/\mathrm{d}t^2}{a} = -\frac{4\pi G}{3}(\rho + 3\mathcal{P}). \tag{6.22}$$

加速膨胀定义为 $\mathrm{d}^2a/\mathrm{d}t^2$ 大于零. 这样, 右边括号中的项必须小于零. 故暴胀要求

$$\mathcal{P} < -\frac{\rho}{3}. \tag{6.23}$$

既然能量密度必须为正, 则压力必为负. 这个结论或许并不奇怪：第 2 章中曾提到, 使超新星看起来更暗的加速膨胀是由具有负压力的暗能量造成的. 暴胀看来也是由类似的能量形势导致, 即 $\mathcal{P} < 0$. 正如我们在第 2 章强调的，负压力并不是我们所熟悉的. 非相对论性物质拥有小的正压力, 它正比于温度除以质量, 而相对论性的气体有 $\mathcal{P} = +\rho/3$, 依然是正压力. 所以通常的物质或辐射都不能推动暴胀.

6.3.3 标量场的引入

在推导 $\Psi(\vec{x},t)$ 和 $\Phi(\vec{x},t)$ 的演化 (爱因斯坦场方程) 和粒子分布的演化方程时, 我们已经对 $\Psi(\vec{x},t)$ 和 $\Phi(\vec{x},t)$ 非常熟悉. 这两个场是度规张量 $g_{\mu\nu}$ 的一部分. 度规是物理学最基本的场之一, 但并不是唯一的. 每种基本粒子—电子、中微子、夸克、光子等—都与它们自身的场联系在一起. 我们希望找到这样一种场 (如与光子相联系的电磁场的势) 作为暴胀模型的源. 不幸的是, 至今尚未有人提出一个这样的具体模型. 与之相对的方法, 是考虑一种一般的标量场 (不像费米子如夸克和轻子, 或电磁矢量场). 粒子物理的标准模型就包含一种类似的场——希格斯 (Higgs) 场. 但同样不幸的是, 我们了解希格斯场太多, 很清楚它的相互作用和性质, 它不可能成为暴胀的源. 所以, 我们不再要求推动暴胀的标量场必须与已知的物理联系起来, 建立这个联系是留给未来诺贝尔奖得主的作业.

我们将这个标量场标记为 $\phi(\vec{x},t)$, 注意与度规扰动 $\Phi(\vec{x},t)$ 区分, 这个标量场有负压力 $\rho + 3\mathcal{P}$. 写出 ϕ 的能动张量：

$$T^\alpha_\beta = g^{\alpha\nu}\frac{\partial\phi}{\partial x^\nu}\frac{\partial\phi}{\partial x^\beta} - g^\alpha_\beta\left[\frac{1}{2}g^{\mu\nu}\frac{\partial\phi}{\partial x^\mu}\frac{\partial\phi}{\partial x^\nu} + V(\phi)\right]. \tag{6.24}$$

这里的 $V(\phi)$ 是标量场的势. 例如, 一个自由的、质量为 m 的场拥有势能 $V(\phi) = m^2\phi^2/2$. 注意, 如果参考其他读物可能会发现 (6.24) 式中使用不同的符号, 这是由

度规的号差选择引起的. 尽管我们的度规的符号选择 $(-,+,+,+)$ 是在宇宙学中最常用的, 但在粒子物理领域中并不常用. 设 ϕ 几乎是均匀的, 包含零阶项 $\phi^{(0)}(t)$ 和一阶扰动项 $\delta\phi(\vec{x},t)$. 本节推导标量场的零阶、均匀部分的能量密度、压力以及随时间的演化. 在后面会考虑它的扰动 $\delta\phi$ 及其产生机制.

对于标量场的均匀部分, 只需考虑其时间导数, (6.24) 式第一项的角标 α 和 β、第二项的角标 μ 和 ν 都为零. 能动张量化简为

$$T_{\beta}^{(0)\alpha} = -g_0^\alpha g_\beta^0 \left(\frac{\mathrm{d}\phi^{(0)}}{\mathrm{d}t}\right)^2 + g_\beta^\alpha \left[\frac{1}{2}\left(\frac{\mathrm{d}\phi^{(0)}}{\mathrm{d}t}\right)^2 - V(\phi^{(0)})\right]. \tag{6.25}$$

T_0^0 的时间–时间分量等于 $-\rho$, 故能量密度为

$$\rho = \frac{1}{2}\left(\frac{\mathrm{d}\phi^{(0)}}{\mathrm{d}t}\right)^2 + V(\phi^{(0)}). \tag{6.26}$$

其中第一项是标量场的动能, 第二项是势能密度. 所以均匀标量场的动力学非常类似于一个单独的粒子在势场中的运动 (将 $\phi^{(0)}(t)$ 类比为粒子的位置 $x(t)$). 实际上在描述暴胀的语言中都充满着这样的类比. 均匀标量场的压力等于 $\mathcal{P} = T_i^{(0)i}$(这里对空间指标 i 不求和), 故

$$\mathcal{P} = \frac{1}{2}\left(\frac{\mathrm{d}\phi^{(0)}}{\mathrm{d}t}\right)^2 - V(\phi^{(0)}). \tag{6.27}$$

可以看出, 负压力对应于势能大于动能的标量场. 例如, 图 6.6 所示, 标量场处于一个*伪真空态* (*亚稳态*), 即在局部, 而非整体时, 势取最小的状态.

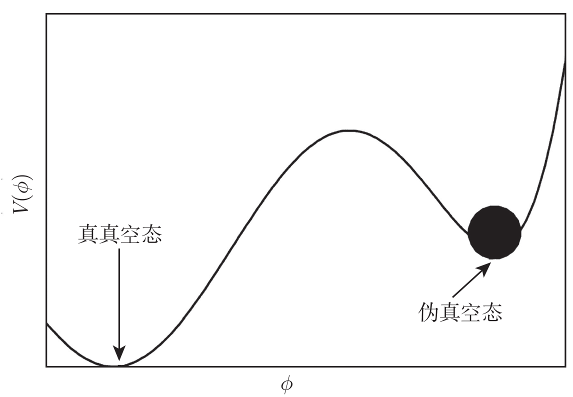


图 6.6　处于伪真空态的标量场. 由于不能逃出这个状态, 它只具有很少的动能. 然而其势能并不为零, 所以标量场具有负压力. 势能整体的最小值称为真真空态, 因为均匀标量场处于势能最小值的状态是系统的基态

处在伪真空态的标量场, $\phi^{(0)}$ 为常数, 标量场的能量密度全部由势能组成, 不随时间变化. 我们所理解的物质、辐射, 它们的能量密度都随宇宙膨胀而快速衰减,

而现在讨论的标量场的能量密度却不随宇宙的膨胀变化. 所以, 即使宇宙初期包含物质和辐射, 以及假真空能, 随宇宙膨胀也很快就会只剩下真空能. 对处于这种状态的标量场, 很容易写出尺度因子的演化. 因为能量密度为常数, 所以关于 a 的演化的爱因斯坦场方程为

$$\frac{\mathrm{d}a/\mathrm{d}t}{a} = \sqrt{\frac{8\pi G\rho}{3}} = \text{constant}. \tag{6.28}$$

可见, 处于伪真空态的标量场得到了形如 (6.19) 式的指数膨胀 ($H \propto \rho^{1/2}$, 为常数). 暴胀结束前产生的原初共动视界, 可以由 (6.19) 式的倒数对时间积分得到

$$\eta_{\text{prim}} = \frac{1}{H_e a_e}(\mathrm{e}^{H(t_e - t_b)} - 1), \tag{6.29}$$

其中 t_b 是暴胀开始时刻. 如果标量场处于伪真空态至少 60 个 e- 叠数 ($H(t_e - t_b) > 60$), 视界疑难即可被解决.

Guth(1981) 对暴胀理论早期的构想利用了处于势能极小值的标量场, 但后来很快意识到 (Guth and Weinberg, 1983; Hawking, Moss, and Stewart, 1982), 这种方案是不可行的. 让这种标量场演化到其真真空态的唯一途径, 类似于 α 粒子穿越原子核的势垒, 即量子力学的隧道贯穿效应. 所以, 只有很小的空间区域能从伪真空态隧道贯穿到真真空态. 这些真真空态的 “气泡” 必须合并, 这样宇宙才能整体性地演化到真真空态. 详细的计算表明, 这种合并是不可能发生的, 伪真空态的区域会快速膨胀并一直存在着, 这样永远也不会得到一个真真空态的宇宙.

为了避免这个问题, 随后的暴胀模型 (Linde, 1982; Albrecht and Steinhardt, 1982) 使标量场慢慢地 “滚” 入其真正的基态. 这种标量场的能量密度同样接近常数 (若势不急剧变化), 因此很快主导整个宇宙. 为了得到标量场不再处于伪真空态时 $\phi^{(0)}$ 的演化方程, 我们回到 (6.21) 式给出的爱因斯坦场方程. 考虑第一式, 如果宇宙被标量场 ϕ 主导, 则右侧能量密度变为 $(\mathrm{d}\phi^{(0)}/\mathrm{d}t)^2/2 + V$, 然后求导, 得到

$$2\frac{\mathrm{d}a/\mathrm{d}t}{a}\left[\frac{\mathrm{d}^2 a/\mathrm{d}t^2}{a} - \left(\frac{\mathrm{d}a/\mathrm{d}t}{a}\right)^2\right] = \frac{8\pi G}{3}\left[\left(\frac{\mathrm{d}\phi^{(0)}}{\mathrm{d}t}\right)\left(\frac{\mathrm{d}^2\phi^{(0)}}{\mathrm{d}t^2}\right) + V'\frac{\mathrm{d}\phi^{(0)}}{\mathrm{d}t}\right]. \tag{6.30}$$

这里 V' 定义为 V 对 $\phi^{(0)}$ 的导数. 由 (6.22) 式, 将左边中括号内第一项替换为 $-4\pi G(\rho/3 + \mathcal{P})$. 类似地, 第二项替换为 $8\pi G\rho/3$. 上式左侧变为

$$\frac{\mathrm{d}a/\mathrm{d}t}{a} 8\pi G[-(\rho/3) - \mathcal{P} - 2\rho/3] = -8\pi G H\left(\frac{\mathrm{d}\phi^{(0)}}{\mathrm{d}t}\right)^2. \tag{6.31}$$

代入 (6.30) 式便得到了膨胀宇宙中均匀标量场的演化方程：

$$\frac{\mathrm{d}^2\phi^{(0)}}{\mathrm{d}t^2} + 3H\frac{\mathrm{d}\phi^{(0)}}{\mathrm{d}t} + V' = 0. \tag{6.32}$$

将共形时间 η 作为时间变量更有用处, 上式化为 (练习 8)

$$\ddot{\phi}^{(0)} + 2aH\dot{\phi}^{(0)} + a^2 V' = 0 \tag{6.33}$$

这里变量上方加 "·" 表示对共形时间 η 求一次导数.

大多数暴胀模型都是慢滚模型, 即零阶标量场 (以及哈勃速率) 的变化很慢. 这样得到了一个共形时间 η 和膨胀速率的简单关系. 特别地, 在暴胀时期,

$$\begin{aligned}\eta &\equiv \int_{a_e}^{a} \frac{\mathrm{d}a}{Ha^2} \\ &\simeq \frac{1}{H}\int_{a_e}^{a} \frac{\mathrm{d}a}{a^2} \\ &\simeq \frac{-1}{aH}\end{aligned} \tag{6.34}$$

其中第一步近似是由于 H 近似为常数, 而第二步近似是因为暴胀结束后的尺度因子远大于暴胀过程中的尺度因子 ($a_e \gg a$). 为了量化慢滚近似, 通常定义两个变量, 它们在 ϕ 为常数的极限下为零. 首先定义:

$$\varepsilon \equiv \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{1}{H}\right) = \frac{-\dot{H}}{aH^2}. \tag{6.35}$$

由于 H 始终减小, ϵ 永远为正. 在暴胀时期, ϵ 是一个很小的正数, 然而在辐射主导时期 $\epsilon = 2$. 实际上, 暴胀时期的一个定义即 $\epsilon < 1$. 定义另外一个变量, 同样用于度量慢滚的程度:

$$\begin{aligned}\delta &\equiv \frac{1}{H}\frac{\mathrm{d}^2\phi^{(0)}/\mathrm{d}t^2}{\mathrm{d}\phi^{(0)}/\mathrm{d}t} = \frac{-1}{aH\dot{\phi}^{(0)}}[aH\dot{\phi}^{(0)} - \ddot{\phi}^{(0)}] \\ &= \frac{-1}{aH\dot{\phi}^{(0)}}[3aH\dot{\phi}^{(0)} + a^2V'].\end{aligned} \tag{6.36}$$

由于希腊字母有限, 妨碍我们的表达, 第二个慢滚参数通常标记为 η, 但这与 η 作为共形时间的习惯冲突 (研究早期宇宙的科学家通常使用 τ 作为共形时间, 留出 η, 但我们用 τ 表示光深). 这里选择 δ 作为慢滚参数也很常见, 但要留意与第 4 章中的密度扰动区分. 上式第二行的得出用到了 (6.33) 式. 在大多数暴胀模型中 δ 也是小量. 在 6.6 节将会看到, 暴胀的一些特性、与最简单的功率谱的偏差, 以及引力波的产生都正比于 ϵ 和 δ. 如果将来观测到这些特性, 它们不仅将成为暴胀唯一的特征, 而且使我们能够了解引发暴胀的物理机制.

6.4 引力波的产生

暴胀解决了比视界疑难更多的东西. 暴胀使看起来不相关的尺度相互联系起来. 上一节对零阶标量场的推导使宇宙所有相关的尺度能够呈现今天均匀的样子.

同样也存在对于这个零阶标量场的扰动, 这些扰动在所有尺度都存在因果联系的时候就产生了, 直到暴胀结束后这些扰动依然存在.

度规张量的扰动中,*标量*扰动是我们最感兴趣的, 因为它联系着物质的密度和辐射, 并最终决定了宇宙不均匀性和各向异性. 6.5 节中将详细讨论. 暴胀不仅产生标量扰动, 还产生了对度规的*张量*扰动, 即引力波. 正如第 5 章提到, 张量扰动不与密度扰动耦合, 故与宇宙大尺度结构无关, 然而它在 CMB 中引入了扰动. 事实上, 这些扰动是暴胀独特的标志, 提供了一个研究引发暴胀的物理机制的途径, 很值得研究. 之所以在标量扰动前先讨论张量扰动的产生, 是因为对度规的张量扰动与其他任何扰动变量都不耦合①, 故当我们考虑张量扰动时, 扰动只发生在一个单独的场中. 度规的标量扰动与能量密度扰动耦合. 耦合的场一起振荡, 这种耦合比较复杂. 然而我们感兴趣的是在暴胀时期产生的量子扰动, 它导致了今天的大尺度结构, 这种扰动最好由单一的场来描述, 故我们从张量扰动开始.

暴胀时期, 宇宙主要由一个均匀的标量场和一个均匀的背景度规组成. 它们发生量子扰动. 在一个给定时间, 这个扰动的平均值为零, 因为有些区域的场大于平均值, 有些区域小于平均值. 然而扰动的平方的平均值 (方差) 不为零. 我们的目的是计算这个方差及它是如何随暴胀进行演化的. 在后面将会看到, 一旦得到这个方差, 我们就可以得到一个已知方差的分布来确定初始②条件.

6.4.1 简谐振子的量子化

为了计算度规中的量子扰动, 需要将场量子化. 不论是张量扰动还是标量扰动, 量子化的方法是先将问题写成类似简谐振子的样子, 然后借助我们对这些简单的系统的认识来解决问题. 首先回顾谐振子的量子化.

- 一个具有单位质量和频率 ω 的简谐振子的方程是

$$\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}+\omega^2x=0. \tag{6.37}$$

- 量子化时, x 成为一个量子算符

$$\hat{x}=v(\omega,t)\hat{a}+v^*(\omega,t)\hat{a}^\dagger \tag{6.38}$$

其中 $\hat{a}$ 是作用在系统的态上的算符,v 是 (6.37) 式的一个解,$v\propto \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}$.

- 特别地, $\hat{a}$ 与*真空态*$|0\rangle$(没有任何粒子的情况) 湮灭, 它也满足对易关系

$$[\hat{a},\hat{a}^\dagger]\equiv\hat{a}\hat{a}^\dagger-\hat{a}^\dagger\hat{a}=1. \tag{6.39}$$

① 这不完全正确, 四极矩是张量扰动的源, 然而, 如果标量场推动暴胀, 四极矩消失.

② 这里的*初始*是指所有的傅里叶模式都在视界之外的时刻. 这发生在一切物理过程发生之前, 但又在暴胀产生它们之后.

其他对易关系为零：$[\hat{a},\hat{a}]=[\hat{a}^{\dagger},\hat{a}^{\dagger}]=0$. 可以证明 (练习 9), 这些对易关系与我们更熟悉的 $\hat{x}$ 和 $\hat{p}$ 之间的对易关系等价：

$$[\hat{x},\hat{p}]=\mathrm{i}, \tag{6.40}$$

而 v 进行了归一化

$$v(\omega,t)=\frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}}{\sqrt{2\omega}}. \tag{6.41}$$

这些条件让我们能够计算 $\hat{x}$ 在基态 $|0\rangle$ 的量子扰动：

$$\begin{aligned}\langle|\hat{x}^2|\rangle &\equiv \langle 0|\hat{x}^{\dagger}\hat{x}|0\rangle \\ &= \langle 0|(v^*\hat{a}^{\dagger}+v\hat{a})(v\hat{a}+v^*\hat{a}^{\dagger})|0\rangle.\end{aligned} \tag{6.42}$$

由于 $\hat{a}|0\rangle=0$, 第二行两个括号相乘的第一项为零. 类似地,$\langle 0|\hat{a}^{\dagger}=(a|0\rangle)^{\dagger}=0$, 剩下

$$\begin{aligned}\langle|\hat{x}|^2\rangle &= |v(\omega,t)|^2\langle 0|\hat{a}\hat{a}^{\dagger}|0\rangle \\ &= |v(\omega,t)|^2\langle 0|[\hat{a},\hat{a}^{\dagger}]+\hat{a}^{\dagger}\hat{a}|0\rangle.\end{aligned} \tag{6.43}$$

其中第二项为零, 因为 $\hat{a}$ 与真空态湮灭, 而第一项为 1, 故 $\hat{x}$ 的方差是

$$\langle|\hat{x}|^2\rangle=|v(\omega,t)|^2, \tag{6.44}$$

等于 $1/2\omega$. 在计算暴胀产生的早期宇宙的扰动时, 这些几乎是需要用到的全部内容.

6.4.2 张量扰动

回顾由 h_+ 和 $h_\times$ 描述的对度规的张量扰动, 它们都遵循方程 (5.63) 式,

$$\ddot{h}+2\frac{\dot{a}}{a}\dot{h}+k^2h=0. \tag{6.45}$$

将其改写为谐振子的形式, 则 h 很容易被量子化. 定义①

$$\tilde{h}\equiv\frac{ah}{\sqrt{16\pi G}}. \tag{6.46}$$

① 至于这里的因子 $\sqrt{16\pi G}$, 我们知道的唯一推导方法是写出场 $h_{+,\times}$ 的作用量. 其中动能项乘以因子 $1/32\pi G$, 而标准的标量场的系数是 $1/2$. 所以剩余的 $16\pi G$ 必须重新定义在场之中. 这样做的困难之处是如何写出二阶扰动变量的作用量. 我们发现, 即使是一阶扰动的计算也十分复杂. 另一方面, 利用量纲分析 ($h(\vec{x})$ 无量纲, 而标准标量场有质量的量纲) 可以猜测需要因子 $m_{\mathrm{Pl}}=G^{-1/2}$. 但这个因子并未影响到 $\tilde{h}$ 的方程, 只是将其归一化, 这在我们试图确定引力波功率谱的强度时非常重要.

h 对共形时间的导数可以写为

$$\frac{\dot{h}}{\sqrt{16\pi G}} = \frac{\dot{\tilde{h}}}{a} - \frac{\dot{a}}{a^2}\tilde{h} \tag{6.47}$$

以及

$$\frac{\ddot{h}}{\sqrt{16\pi G}} = \frac{\ddot{\tilde{h}}}{a} - 2\frac{\dot{a}}{a^2}\dot{\tilde{h}} - \frac{\ddot{a}}{a^2}\tilde{h} + 2\frac{(\dot{a})^2}{a^3}\tilde{h}. \tag{6.48}$$

代入 (6.45) 式, 两边乘以 $\sqrt{16\pi G}$, 得到

$$\begin{aligned}&\frac{\ddot{\tilde{h}}}{a} - 2\frac{\dot{a}}{a^2}\dot{\tilde{h}} - \frac{\ddot{a}}{a^2}\tilde{h} + 2\frac{(\dot{a})^2}{a^3}\tilde{h} + 2\frac{\dot{a}}{a}\left(\frac{\dot{\tilde{h}}}{a} - \frac{\dot{a}}{a^2}\tilde{h}\right) + k^2\frac{\tilde{h}}{a}\\ &= \frac{1}{a}\left[\ddot{\tilde{h}} + \left(k^2 - \frac{\ddot{a}}{a}\right)\tilde{h}\right] = 0.\end{aligned} \tag{6.49}$$

我们知道如何利用这种形式. 它没有衰减项 ($\propto \dot{\tilde{h}}$), 故可以马上写出这个算符的一种表达式

$$\hat{\tilde{h}}(\vec{k},\eta) = v(k,\eta)\hat{a}_{\vec{k}} + v^*(k,\eta)a^\dagger_{\vec{k}}, \tag{6.50}$$

其中产生和湮灭算符的系数满足方程

$$\ddot{v} + \left(k^2 - \frac{\ddot{a}}{a}\right)v = 0. \tag{6.51}$$

在求解方程 (6.51) 式之前, 先观察一下最终的解如何确定张量扰动的功率谱. 利用谐振子的类比, 可以写出 $\tilde{h}$ 场扰动的方差是

$$\langle\hat{\tilde{h}}^\dagger(\vec{k},\eta)\hat{\tilde{h}}(\vec{k}',\eta)\rangle = |v(\vec{k},\eta)|^2(2\pi)^3\delta^3(\vec{k}-\vec{k}'). \tag{6.52}$$

在这里有一处与一维谐振子的表达式 (6.44) 不同. 量子场定义在全空间, 可以当作谐振子的 (无限的) 集合, 每个谐振子在不同的空间位置 (或傅里叶空间, 取不同的 $\vec{k}$). 每个量子扰动都是独立的 (这样方程是线性的), 所以当 $\vec{k} \neq \vec{k}'$ 时, $\hat{\tilde{h}}(\vec{k})$ 与 $\hat{\tilde{h}}(\vec{k}')$ 没有相关性. (6.52) 式中的 δ 函数确定了这样的独立性, 而 $(2\pi)^3$ 使方程在连续的极限下成立. 由 $\tilde{h} = ah/\sqrt{16\pi G}$, 得到

$$\begin{aligned}\langle\hat{h}^\dagger(\vec{k},\eta)\hat{h}(\vec{k}',\eta)\rangle &= \frac{16\pi G}{a^2}|v(k,\eta)|^2(2\pi)^3\delta^3(\vec{k}-\vec{k}')\\ &\equiv (2\pi)^3 P_h(k)\delta^3(\vec{k}-\vec{k}')\end{aligned} \tag{6.53}$$

其中第二行定义了对度规的原初扰动的*功率谱*. 不同的读物中用到了不同的功率谱的定义,(6.53) 式并不是早期宇宙研究的最普遍形式, 一般还要加上因子 k^{-3} 以使得功率谱无量纲化. 我不加入这个因子是为了和大尺度结构功率谱的定义 (量纲为 k^{-3}) 相一致. 定义

$$P_h(k) = 16\pi G \frac{|v(k,\eta)|^2}{a^2}. \tag{6.54}$$

我们已经将确定暴胀产生的张量扰动的功率谱问题, 简化到求解一个关于 $v(k,\eta)$ 的二阶微分方程 (6.51) 式的问题. 为了求解, 首先要确定暴胀时期 $\ddot{a}/a$ 的值. 注意这是对共形时间求导, 故由 (6.34) 式得到 $\dot{a} = a^2 H \simeq -a/\eta$. 所以,(6.51) 式中 a 的二阶导数是

$$\begin{aligned} \frac{\ddot{a}}{a} &\simeq -\frac{1}{a}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\eta}\left(\frac{a}{\eta}\right) \\ &\simeq \frac{2}{\eta^2}. \end{aligned} \tag{6.55}$$

这样 v 的方程化为

$$\ddot{v} + \left(k^2 - \frac{2}{\eta^2}\right) v = 0. \tag{6.56}$$

为了得到这个方程的初始条件, 考虑很早期, 暴胀的作用还未起效时的 v. 那时,$-\eta$ 很大, 为 η_{prim} 的量级, 所以 k^2 项占主要地位, 方程完全化简为简谐振子的形式. 这样, 我们知道 ((6.41) 式) 归一化的解为 $\mathrm{e}^{-\mathrm{i}k\eta}/\sqrt{2k}$. 这使得我们能够定出 (6.56) 式的解为 (练习 11)

$$v = \frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}k\eta}}{\sqrt{2k}}\left[1 - \frac{\mathrm{i}}{k\eta}\right]. \tag{6.57}$$

这显然得到了尺度在视界内 ($k|\eta| \gg 1$) 的解. 即使没有经过练习 11(从一条相对曲折的路得到 (6.57) 式), 也可以检验出, 上式给出的 v 确实是 (6.56) 式的解.

经暴胀 e 的若干次方倍之后, $k|\eta|$ 已经很小. 既然 v 已经归一化, 我们可以定出其强度, 以得到超视界引力波强度的方差. (6.57) 式取极限, 得到

$$\lim_{-k\eta\to 0} v(k,\eta) = \frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}k\eta}}{\sqrt{2k}}\frac{-\mathrm{i}}{k\eta}. \tag{6.58}$$

图 6.7 描述了暴胀时期 $h \propto v/a$ 的演化. 暴胀削减了傅里叶模式的强度, 在早期 h 随 $1/a$ 衰减. 一旦 $-k\eta$ 小于 1, 该模式已经大于视界, 之后 h 不再变化.

张量扰动模式的原初功率谱, 正比于 $|v|^2/a^2$, 在暴胀将某个模式的尺度拉伸到大于视界后保持为一个常数. 这个常数确定了引力波的初始条件, h_+ 和 $h_\times$ 由这些初始条件从早期开始演化 (“早期” 指晚于暴胀但早于退耦). 由 (6.54) 式和 (6.58) 式得到这些常数

$$\begin{aligned} P_h(k) &= \frac{16\pi G}{a^2}\frac{1}{2k^3\eta^2} \\ &= \frac{8\pi G H^2}{k^3}. \end{aligned} \tag{6.59}$$

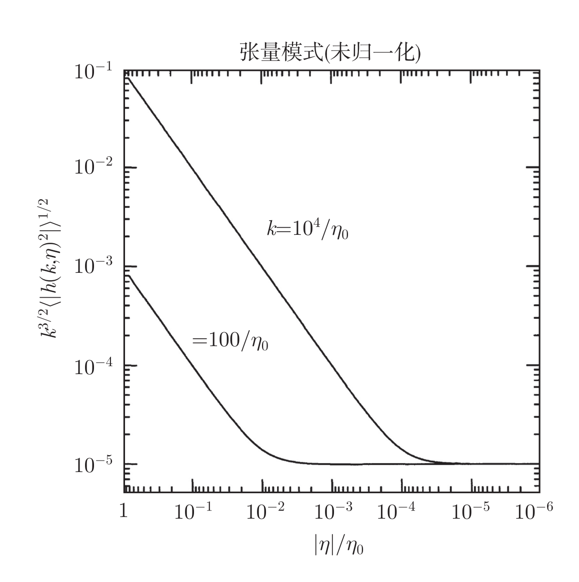


图 6.7　两个 k-模式的张量场均方根扰动. 时间由左至右演化：η 在暴胀时期为负并逐渐逼近零. 一旦某个模式 "逃离视界"($\eta \sim -1/k$), 其均方根强度保持不变. 注意, 这个强度乘以 $k^{3/2}$ 对所有模式取同样的值, 故称为尺度无关谱. 它在模式离开视界, 哈勃膨胀率为常数时才严格成立

其中第二行借助 (6.34) 式得到. 在推导中我们假设了 H 为常数; 更一般地, 在模式离开视界时,H 需要重新计算. 上式便是原初引力波的最终表达式. 探测这些引力波需要测量暴胀时期的哈勃参量. 暴胀模型中, 由于势能通常远超过动能, 对 H 的测量可以等价于对势能 V 的测量. 注意暴胀由约 10^{15}GeV 的能量产生, 比现在的粒子加速器能产生的最大能量高 12 个量级. 因此, 暴胀时期产生的引力波不一定能被探测到. 事实上,$H^2 \propto \rho/m_{\rm Pl}^2$, 其功率谱正比于 $\rho/m_{\rm Pl}^4$, 暴胀时期的能量密度是普朗克质量的量级. 假如暴胀发生在小于普朗克长度的尺度, 原初引力波将无法被探测到. 本书后面将会发展回答下面问题所必须的方法工具：我们能够发现多么弱的引力波成分？

(6.59) 式有两个要点. 我还没有提到过原初扰动谱的这个特点：扰动 h 的分布是高斯分布, 正如简谐振子的量子力学扰动一样. 高斯性是暴胀理论的一个很强的预言; 而很多研究工作旨在发现 CMB 和大尺度结构中的原初非高斯性, 以对暴胀理论进行怀疑. 但还没有全面彻底的发现, 故暴胀的预言依然是成立的. 另外,(6.59) 式是 h_+ 和 $h_\times$ 各自的功率谱, 它们不相关, 故总功率谱应乘以 2.

6.5 标 量 扰 动

本章的目的是求出暴胀产生的扰动 Ψ(或 Φ; 我们假设它们有相同的强度) 的功率谱. 然后利用 6.1 节的关系式可以推出其他扰动变量的功率谱. 然而 Ψ 的功率谱的推导比之前讨论的张量扰动谱更为复杂. 主要的难处在于推动暴胀的标量场的扰动与 Ψ 相耦合.

为了处理这个耦合, 我们首先忽略它：6.5.1 节将在忽略 Ψ 的情况下, 计算暴胀产生的标量场 ϕ 的扰动谱. 其推导类似于上一节张量扰动谱的计算, 相对简单. 为什么可以忽略 Ψ? 这与 ϕ 又有何联系呢? 接下来的两个小节分别从两个侧面依次回答了这两个问题. 首先, 6.5.2 节表示：在一个模式远远离开视界之前,Ψ 确实很小, 可以忽略不计. 一旦远离视界, Ψ 不能再被忽略, 但 Ψ 与 $\delta\phi$ 的一个线性组合 (推动暴胀的标量场的扰动) 是守恒的, 使得 $\delta\phi$ 的初始功率谱可以转换成 Ψ 的功率谱. 另一种方法也可以证明对度规的扰动是可以忽略的：规范变换, 使度规的空间分量不受扰动, 即*空间平滑规范*. 在这种规范下, 6.5.1 节的计算是严格的; 剩余的问题就是如何变换回共形牛顿规范. 6.5.3 节引入了一个*规范不变量*, 其在规范变换下保持不变, 且在空间平滑规范中正比于 $\delta\phi$. 在共形牛顿规范下也可以定义这样的变量, 这样共形牛顿规范下的 Ψ 便可与空间平滑规范下的 $\delta\phi$ 联系起来. 6.5.2 节和 6.5.3 节中的两种解决耦合问题的方法是可以相互代替的. 如果你习惯于规范变换, 6.5.3 节则给出一个更美妙的解决问题的方法; 而 6.5.2 节更直接地解决了同样的问题, 其包含较少的推导, 也不需要很多的背景知识.

6.5.1 均匀背景下的标量场扰动

将标量场分解为零阶、均匀的部分和扰动部分,

$$\phi(\vec{x},t) = \phi^{(0)}(t) + \delta\phi(\vec{x},t), \tag{6.60}$$

然后在平滑膨胀，即度规为 $g_{00} = -1$, $g_{ij} = \delta_{ij}a^2$ 的宇宙存在下，试图找到一个主导 $\delta\phi$ 的方程. 考虑能动张量的守恒性,

$$T^{\mu}_{\nu;\mu} = \frac{\partial T^{\mu}_{\nu}}{\partial x^{\mu}} + \Gamma^{\mu}_{\alpha\mu}T^{\alpha}_{\nu} - \Gamma^{\alpha}_{\nu\mu}T^{\mu}_{\alpha} = 0. \tag{6.61}$$

对 $\nu = 0$ 时的分量方程作一阶展开便得到了 $\delta\phi$ 的方程. 由于度规是均匀的, 唯一的一阶项是能动张量的扰动. 由 (2.22) 式和 (2.23) 式, 所有的 Γ 或是零阶项 ($\Gamma^0_{ij} = \delta_{ij}a^2H$ 和 $\Gamma^i_{0j} = \Gamma^i_{j0} = \delta_{ij}H$) 或是零 (其余的项). 将能动张量的扰动写为 δT^{μ}_{ν}, 当 $\nu = 0$ 时的守恒方程的扰动部分为

$$0 = \frac{\partial \delta T^0_0}{\partial t} + \mathrm{i}k_i\delta T^i_0 + 3H\delta T^0_0 - H\delta T^i_i. \tag{6.62}$$

接下来需要将能动张量的扰动表示成标量场扰动的形式.

首先计算 δT^i_0. 由于度规时间–空间分量都为零, (6.24) 式以 g^α_β 为系数的第二项为零, 剩下

$$T^i_0 = g^{i\nu}\phi_{,\nu}\phi_{,0} \tag{6.63}$$

这里,“$_\nu$” 依然表示对 x^ν 求导. 由 $g^{i\nu} = a^{-2}\delta_{i\nu}$, 角标 ν 必为 i. 标量场的零阶项 $\phi^{(0)}$ 是均匀的, 所以 $\phi^{(0)}_{,i} = 0$. 这样能动张量的时间–空间分量不含零阶项. 为了提取出一阶项, 将 $\phi_{,i}$ 设为 $\delta\phi_{,i} = ik_i\delta\phi$. 再将其他项都设为它们的零阶项的值, 得到

$$\delta T^i_0 = \frac{\mathrm{i}k_i}{a^3}\dot{\phi}^{(0)}\delta\phi. \tag{6.64}$$

其中分母上多出一项 a 是由于 $\phi^{(0)}_{,0} = \dot{\phi}^{(0)}/a$(重申“$\cdot$”表示对共形时间求导).

能动张量的时间–时间分量稍复杂一些:

$$T^0_0 = g^{00}(\phi_{,0})^2 - \frac{1}{2}g^{\alpha\beta}\phi_{,\alpha}\phi_{,\beta} - V. \tag{6.65}$$

设 $\phi = \phi^{(0)} + \delta\phi$ 得到

$$T^0_0 = \frac{-1}{2}\left(\phi^{(0)}_{,0} + \delta\phi_{,0}\right)^2 - \frac{1}{2a^2}\delta\phi_{,i}\delta\phi_{,i} - V(\phi^{(0)} + \delta\phi). \tag{6.66}$$

标量场的对空间指标的导数都成对出现, 每一对 $(\delta\phi_{,i})$ 相乘都得到一个二阶项, 可以忽略. 而势 V 展开成一个零阶项 $V(\phi^{(0)})$ 和一个一阶修正 $V'\delta\phi$, 这样能动张量的一阶修正为

$$\begin{aligned}\delta T^0_0 &= -\phi^{(0)}_{,0}\delta\phi_{,0} - V'\delta\phi \\ &= \frac{-\dot{\phi}^{(0)}\dot{\delta\phi}}{a^2} - V'\delta\phi.\end{aligned} \tag{6.67}$$

类似地, 可以证明能动张量空间–空间项为

$$\delta T^i_j = \delta_{ij}\left(\frac{\dot{\phi}^{(0)}\dot{\delta}\phi}{a^2} - V'\delta\phi\right). \tag{6.68}$$

由上述结果, 守恒方程 (6.62) 式变为

$$\left(\frac{1}{a}\frac{\partial}{\partial\eta} + 3H\right)\left(\frac{-\dot{\phi}^{(0)}\dot{\delta}\phi}{a^2} - V'\delta\phi\right) - \frac{k^2}{a^3}\dot{\phi}^{(0)}\delta\phi - 3H\left(\frac{\dot{\phi}^{(0)}\dot{\delta}\phi}{a^2} - V'\delta\phi\right) = 0. \tag{6.69}$$

进行对时间的求导 (较复杂的一项为 $\partial V'/\partial\eta = V''\dot{\phi}^{(0)}$), 乘以 a^3, 化简得到

$$-\dot{\phi}^{(0)}\ddot{\delta}\phi + \dot{\delta}\phi(-\ddot{\phi}^{(0)} - 4aH\dot{\phi}^{(0)} - a^2V') + \delta\phi(-a^2V''\dot{\phi}^{(0)} - k^2\dot{\phi}^{(0)}) = 0. \tag{6.70}$$

这里 V'' 项很小, 正比于慢滚参数 ϵ 和 δ(练习 14), 忽略不计. 利用零阶方程 (6.33) 式, $\delta\dot{\phi}$ 的系数, 第一个括号中的项等于 $-2aH\dot{\phi}^{(0)}$, 再除以 $-\dot{\phi}^{(0)}$, 剩下

$$\ddot{\delta}\phi + 2aH\dot{\delta}\phi + k^2\delta\phi = 0. \tag{6.71}$$

这个关于扰动 $\delta\phi$ 的方程与度规的张量扰动方程 (6.45) 式形式相同. 于是我们直接利用 6.4.2 节中的结果, 得到扰动 $\delta\phi$ 的功率谱等于

$$P_{\delta\phi} = \frac{H^2}{2k^3}. \tag{6.72}$$

与 (6.57) 式比较, 只差一个因子 $16\pi G$. 重申, 我们在张量扰动中加入这一项 (带有一点随手人为的意图; 参见 135 页的脚注) 是为了将无量纲量 h 化为质量量纲. $\delta\phi$ 作为一个标量场已经有适当的量纲, 所以我们去掉了这个因子.

6.5.2 超视界扰动

到目前为止我们一直忽略了度规扰动. 当扰动的波长达到视界的尺度量级, 或者比视界更小时, 这个假设是成立的. 在暴胀结束时, 度规扰动变得很重要. 所以, 尽管暴胀产生的扰动一开始只含 $\delta\phi$, 但后来应考虑 Ψ 和 $\delta\phi$ 的线性组合, 更一般地, 考虑 Ψ 和能动张量扰动的线性组合. 具体说, 是寻找它们的一个线性组合, 在视界外守恒. 这个守恒量由穿越视界时的 $\delta\phi$ 确定, 暴胀之后这个量可以完全由 Ψ 表示. 然后得到一个形如 $\Psi \propto \delta\phi$ 的方程, 其左边是暴胀后的度规扰动, 右边是暴胀时期产生的标量场扰动 (其功率谱已在前面得出). 我们最后将 P_Ψ (以及所有其他有关变量的功率谱, 利用 6.1 节的结果) 和 $P_{\delta\phi}$ 通过 (6.72) 式联系起来.

首先写出度规扰动下的能量守恒方程. 容易证明 (6.62) 式变为

$$\frac{\partial \delta T_0^0}{\partial t} + ik_i\delta T_0^i + 3H\delta T_0^0 - H\delta T_i^i = -3(\mathcal{P}+\rho)\frac{\partial\Psi}{\partial t} \tag{6.73}$$

其中 $\mathcal{P}$ 和 ρ 分别是今天的零阶压力和能量密度. 上一小节中忽略 Ψ 是否正确呢? 是的, 因为等号右边远小于左边的项. 例如左边第一项, 要求

$$\Psi \ll \frac{\delta T_0^0}{\mathcal{P}+\rho}. \tag{6.74}$$

这可以用第 5 章的爱因斯坦场方程证明. 场方程时间–时间分量 (5.21) 式, 将 Φ 替换为 Ψ:

$$k^2\Psi + 3aH(\dot{\Psi} + aH\Psi) = 4\pi Ga^2\delta T_0^0. \tag{6.75}$$

对于正在穿越视界的模式, 左边的量级为 $k^2\Psi \sim a^2H^2\Psi$, 所以,

$$\Psi \sim G\frac{\delta T_0^0}{H^2} \sim \frac{\delta T_0^0}{\rho}$$

$$= \frac{\mathcal{P}+\rho}{\rho}\left(\frac{\delta T^0_0}{\mathcal{P}+\rho}\right). \tag{6.76}$$

左边必须远小于上式括号中的项, 或者说,$(\mathcal{P}+\rho)/\rho$ 必须很小. 实际在暴胀时期, 压力近似等于负的能量密度, 所以这一项确实很小, 它也可以用慢滚参数表示为 $2\varepsilon/3$. 所以, 至少在暴胀的慢滚模型中, 计算功率谱时是可以忽略度规扰动的.

上述讨论只在模式还未穿出视界的条件下成立. 超视界的模式需要更小心的处理. 实际上不可避免地, (6.74) 式在暴胀结束前将不再成立. 暴胀结束后应是辐射主导, $\delta T^0_0 = -4\rho_r\Theta_0$, $\mathcal{P}+\rho = 4\rho_r/3$. 所以暴胀后 (6.74) 式右边等于 $-3\Theta_0$. 根据 (6.12) 式, 暴胀刚结束的时候 $\Psi = -2\Theta_0$, 所以 (6.74) 式必然不能在所有情况下成立. 从暴胀结束前的某个时刻起, Ψ 的扰动必将增长到与能动张量扰动同样的量级.

解决度规扰动和能量密度扰动之间的耦合的方法之一, 是定义

$$\zeta \equiv -\frac{\mathrm{i}k_i\delta T^0_i H}{k^2(\rho+\mathcal{P})} - \Psi. \tag{6.77}$$

对于亚视界和刚刚离开视界的模式, Ψ 可以忽略; 由 (6.26) 式和 (6.27) 式得 $P+\rho = (\dot{\phi}^{(0)}/a)^2$; 再对第一项的分子应用 (6.64) 式, 在穿越视界时期, 得到

$$\zeta = -aH\delta\phi/\dot{\phi}^{(0)} \tag{6.78}$$

暴胀结束后, $\mathrm{i}k_i\delta T^0_i = 4ak\rho_r\Theta_1$, 正比于辐射的偶极矩. 由于辐射压等于能量密度的 1/3,

$$\begin{aligned}\zeta &= -\frac{3aH\Theta_1}{k} - \Psi \\ &= -\frac{3}{2}\Psi \quad (\text{postinflation}).\end{aligned} \tag{6.79}$$

上式第二步利用了偶极矩和势的关系 (6.16) 式.

变量 ζ 在扰动穿越视界时守恒 (图 6.8). 我们将证明 ζ 只在短期内守恒, 但首先说明这个守恒的重要性. 由于已知在暴胀后 $\zeta = -3\Psi/2$, 我们可以马上将暴胀后得到的 Ψ 与穿越视界时的 $\delta\phi$ 联系起来,

$$\Psi\Big|_{\text{post inflation}} = \frac{2}{3}aH\frac{\delta\phi}{\dot{\phi}^{(0)}}\Big|_{\text{horizon crossing}}. \tag{6.80}$$

同样, 暴胀后 Ψ 的功率谱与穿越视界时 $\delta\phi$ 的功率谱的关系为

$$\begin{aligned}P_\Psi &= \frac{4}{9}\left(\frac{aH}{\dot{\phi}^{(0)}}\right)^2 P_{\delta\phi}\Big|_{aH=k} \\ &= \frac{2}{9k^3}\left(\frac{aH^2}{\dot{\phi}^{(0)}}\right)\Big|_{aH=k},\end{aligned} \tag{6.81}$$

利用 (6.72) 式得到第二行. 另外一种表示标量场扰动的功率谱的方法是利用慢滚参数 ϵ 消去 $\dot{\phi}^{(0)}$, 得到 $(aH/\dot{\phi}^{(0)})^2 = 4\pi G/\varepsilon$(练习 12), 所以

$$P_\Psi = P_\Phi(k) = \frac{8\pi G}{9k^3}\frac{H^2}{\varepsilon}\Big|_{aH=k}. \tag{6.82}$$

第一步等式成立是因为我们假设各向异性拉伸很小, 所以 $\Psi = -\Phi$. 与 (6.59) 式对比, 发现标量和张量模式比的量级是 $1/\epsilon$; 即我们假设标量扰动的模式占主导. 最后, 还有一种功率谱写法, 利用势和它的导数消去 ϵ(利用练习 14 的结果), 得到

$$P_\Phi(k) = \frac{128\pi^2 G^2}{9k^3}\left(\frac{H^2V^2}{V'^2}\right)\Big|_{aH=k}. \tag{6.83}$$

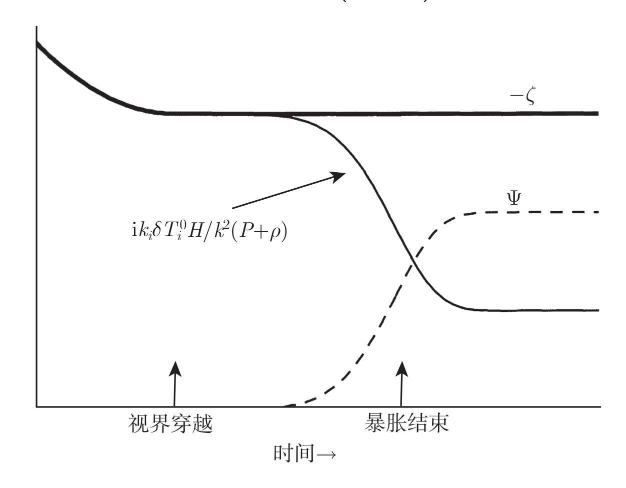


图 6.8 共形牛顿规范下, 绝热标量扰动在暴胀时期的演化. 亚视界时, 推动暴胀的标量场建立了量子扰动 $(\mathrm{i}k_i\delta T_i^0 H/k^2(\rho+\mathcal{P}) = aH\delta\phi/\dot{\phi}^{(0)})$. 这时度规的标量扰动可忽略不计. 一旦某个模式离开视界, 线性组合 $\zeta = -\mathrm{i}k_i\delta T_i^0 H/k^2(\rho+\mathcal{P}) - \Psi$ 守恒. 在暴胀结束后, 度规的扰动已经变得很重要, 但 ζ 仍保持不变

还需要证明 ζ 在超视界尺度保持不变. 利用 (6.73) 式, 在大尺度, $k_i\delta T_0^i$ 正比于 k^2 可以忽略, 留下

$$\frac{\partial \delta T_0^0}{\partial t} + 3H\delta T_0^0 - H\delta T_i^i = -3(\mathcal{P}+\rho)\frac{\partial\Psi}{\partial t}. \tag{6.84}$$

可以证明 (练习 13), 能动张量在大尺度上满足

$$\frac{\mathrm{i}k_i\delta T_i^0 H}{k^2} = \frac{\delta T_0^0}{3}. \tag{6.85}$$

所以, 在大尺度上

$$\zeta = -\Psi - \frac{1}{3}\frac{\delta T_0^0}{\rho+\mathcal{P}}. \tag{6.86}$$

用 ζ 消去 Ψ 得到

$$\frac{\partial\delta T^0_0}{\partial t}+3H\delta T^0_0-H\delta T^i_i=3(\mathcal{P}+\rho)\frac{\partial\zeta}{\partial t}+(\rho+\mathcal{P})\frac{\partial}{\partial t}\left[\frac{\delta T^0_0}{\rho+\mathcal{P}}\right]. \tag{6.87}$$

右边作用于 δT^0_0 的偏导数与左边第一项抵消, 留下

$$\delta T^0_0\left[3H+\frac{1}{\rho+\mathcal{P}}\left(\frac{\mathrm{d}\rho}{\mathrm{d}t}+\frac{\mathrm{d}\mathcal{P}}{\mathrm{d}t}\right)\right]-H\delta T^i_i=3(\mathcal{P}+\rho)\frac{\partial\zeta}{\partial t}. \tag{6.88}$$

回顾 (2.55) 式,$\mathrm{d}\rho/\mathrm{d}t=-3H(\rho+\mathcal{P})$, 方括号中第一项与第二项抵消,

$$\frac{\partial\zeta}{\partial t}=\frac{-1}{3(\rho+\mathcal{P})^2}\left[H(\rho+\mathcal{P})\delta T^i_i-\delta T^0_0\frac{\mathrm{d}\mathcal{P}}{\mathrm{d}t}\right]. \tag{6.89}$$

只需证明中括号中的两项在我们考虑的扰动下相互抵消. 为了证明, 首先将 $H(\rho+\mathcal{P})$ 写为 $-(1/3)\mathrm{d}\rho/\mathrm{d}t$. 这样, 中括号中的项正比于

$$\frac{\delta T^i_i}{3}+\frac{\mathrm{d}\mathcal{P}}{\mathrm{d}\rho}\delta T^0_0=\delta\mathcal{P}-\frac{\mathrm{d}\mathcal{P}}{\mathrm{d}\rho}\delta\rho \tag{6.90}$$

这是因为 δT^0_0 是能量密度的扰动, 而 $\delta T^i_i/3$ 是压力的扰动. 若已知背景压力与能量密度的关系, 则会得到一个密度反差, 我们期待压力扰动正比于密度反差, 并且拥有系数 $\mathrm{d}\mathcal{P}/\mathrm{d}\rho$. 事实上, 这就是暴胀产生的绝热扰动的特征. 如此看来, ζ 的确在大尺度上守恒.

6.5.3　空间平滑规范

前一小节的描述是完备的, 但并非理解暴胀中标量扰动最美妙的方法. 有一种更简单的办法是利用规范不变量在规范变换下保持不变的特性, 进行规范变换. 下面只介绍这种方法, 一些很详细的计算留作练习.

之前我们看到, 共形牛顿规范的复杂之处主要在于, 标量场的扰动 $\delta\phi$ 与势 Ψ 耦合. 显然, 变换到一个令它们不耦合的规范下将更方便. 考虑空间平滑规范, 其空间部分为 $g_{ij}=\delta_{ij}a^2$. 在这个规范下, 距离微元表示成

$$\mathrm{d}s^2=-(1+2A)\mathrm{d}t^2-2aB_{,i}\mathrm{d}x^i\mathrm{d}t+\delta_{ij}a^2\mathrm{d}x^i\mathrm{d}x^j, \tag{6.91}$$

这里有两个函数 A 和 B 描述度规的扰动. 在这种情况下, 关于 $\delta\phi$ 的方程 (6.71) 式严格成立 (练习 16): 标量场的扰动不与度规的扰动相耦合. 所以, 无需忽略任何耦合, 便可以直接得到 $\delta\phi$ 的功率谱 (6.72) 式.

下一步是找到一个规范不变量, 它在变换度规后保持不变. Bardeen (1980) 发现了很多这样的规范不变量, 其中有两个描述度规的标量扰动, 还有两个描述物质的扰动. 当然, 它们的线性组合也依然是规范不变量. 我们应在空间平滑规范下找

到一个与 $\delta\phi$ 成正比的线性组合. 在这种规范下, 其中的一个度规不变量为 ((5.78) 式)

$$v = \mathrm{i}kB - \frac{\mathrm{i}k\dot{\phi}^{(0)}\delta\phi}{(\rho+\mathcal{P})a^2} \quad \text{(spatially flat slicing)}. \tag{6.92}$$

这里已经将 δT^0_i 利用 (6.64) 式作了替换. 若减去上式第一项, 就得到了在空间平滑规范下正比于 $\delta\phi$ 的规范不变量. 而 Bardeen 给出的 Φ_H((5.76) 式) 恰恰正比于 aHB, 故线性组合

$$\zeta \equiv -\Phi_H - \frac{\mathrm{i}aH}{k}v. \tag{6.93}$$

这个规范不变量在空间平滑规范下等于

$$\zeta = -\frac{aH}{\dot{\phi}^{(0)}}\delta\phi \quad \text{(spatially flat slicing)}. \tag{6.94}$$

我们可以立即将 $\delta\phi$ 的功率谱转化成 ζ 的功率谱,

$$P_\zeta = \left(\frac{aH}{\dot{\phi}^{(0)}}\right)^2 P_{\delta\phi}. \tag{6.95}$$

$P_{\delta\phi}$ 的功率谱由 (6.72) 式得到, 而前面的因子是 $4\pi G/\epsilon$, 所以

$$P_\zeta = \frac{2\pi GH^2}{\epsilon k^3}\Big|_{aH=k}. \tag{6.96}$$

(6.96) 式描述了规范不变量的功率谱. 尽管这是在 (6.91) 式表示的规范下计算出来的, 但在其他任何规范中, 我们都可以计算出 ζ 然后将那个规范下的扰动变量的功率谱用 P_ζ 表示.

本书用共形牛顿规范来描述. 在这个规范中,$\Phi_H = -\Phi$, 所以 (6.93) 式中定义的 ζ 由 (6.77) 式给出. 在 6.5.2 节中曾经得到: 在共形牛顿规范下, 暴胀后有 $\zeta = 3\Phi/2$, 所以 $P_\Phi = 4P_\zeta/9$, 或者利用 (6.96) 式,

$$P_\Phi = \frac{8\pi GH^2}{9\epsilon k^3}\Big|_{aH=k}. \tag{6.97}$$

这与 (6.82) 式给出的结果完全一致.

计算到此为止, 但还不是故事的结尾. Bardeen 等还提出 Φ_H 与 ζ 在一定的规范下有很好的几何意义. 在固定时刻, 三维空间的曲率等于 $4k^2\Phi_H/a^2$. 所以,Φ_H 的扰动代表*曲率扰动*: 即使零阶空间是平坦的, 扰动也会引入取决于空间位置的曲率. 在共形牛顿规范或空间平滑规范下, 这个描述看似与 ζ 无关, 因为 ζ 是 Φ_H 与速度的一个组合. 然而, 若变换到*共动*规范下, 速度为零, ζ 等于 Φ_H. 因此可以很清楚地看到, 在共动规范下,ζ 就是曲率扰动, 而且暴胀产生的标量扰动有时也叫做曲率扰动.

6.6 总结和谱指数

为了理解为什么今天无相互关联的尺度会有几乎相同的温度, 我们被迫引入了暴胀理论. 除了解释标准宇宙学中令人烦扰的精细调节问题, 暴胀还是在均匀宇宙背景上产生原初扰动的机制.

暴胀理论预言: 量子扰动发生在极早期的宇宙, 那时所有的尺度都有因果联系. 之后这些尺度很快逃出视界, 只有当很久以后它们重新进入视界之后, 它们才被当作宇宙结构和各向异性增长的初始条件. 这些扰动通常用傅里叶模式来描述. 某个给定模式的扰动平均值为零 (如引力势扰动):

$$\langle\Phi(\vec{k})\rangle = 0. \tag{6.98}$$

另外, 不同模式的扰动是不相关的. 但同一个模式扰动的方差不为零，因此

$$\langle\Phi(\vec{k})\Phi^*(\vec{k}')\rangle = (2\pi)^3 P_\Phi(k)\delta^3(\vec{k}-\vec{k}'), \tag{6.99}$$

这里的 δ 函数决定了不同模式的独立性. 对于标量扰动这是极为重要的, 其功率谱由 (6.82) 式给出. 度规的张量扰动也在此产生, 也是平均值为零的高斯分布, 其功率谱由 (6.59) 式给出. 标量扰动的功率谱取决于 (由 (6.35) 式定义, 正比于哈勃参量) 慢滚参数 ϵ. 由于哈勃参量在暴胀时期几乎不变 (因为势能主导), 故 ϵ 非常小.

功率谱还可写为 $k^3P_\Phi(k)$, 它是一个常数 (不取决于 k), 被称为*尺度无关谱*. 标量扰动和张量扰动谱都是尺度无关谱, 但它们的慢滚参数有一个微小的差别. 这种尺度无关谱既有好处又有不好之处. 好处在于这是一种确定的预言, 很容易检验. 不好之处在于, 即使没有复杂的暴胀机制, 尺度无关谱仍然可能是被期望的预言. 实际上，尺度无关谱也叫做 Harrison-Zel’dovich-Peebles 谱, 早在暴胀理论提出之前这三个人就提出了这种初始条件分布. 如果我们观测到一个尺度无关谱 (正如目前的观测), 并不能肯定暴胀理论. 然而, 如果观测到的是尺度无关谱和微弱的张量模式的混合, 或对尺度无关谱产生的小小偏离, 那么这将使人更加信服, 原初扰动是暴胀产生的.

为了量化与尺度无关谱的偏离, 通常将原初功率谱写为

$$\begin{aligned} P_\Phi(k) &= \frac{8\pi}{9k^3}\frac{H^2}{\epsilon m_{\mathrm{Pl}}^2}\Big|_{aH=k} \equiv \frac{50\pi^2}{9k^3}\left(\frac{k}{H_0}\right)^{n-1}\delta_H^2\left(\frac{\Omega_m}{D_1(a=1)}\right)^2 \\ P_h(k) &= \frac{8\pi}{k^3}\frac{H^2}{m_{\mathrm{Pl}}^2}\Big|_{aH=k} \equiv A_T k^{n_T-3}. \end{aligned} \tag{6.100}$$

这两个方程分别定义了标量扰动和张量扰动的强度 δ_H(其中角标 $_H$ 表示穿越视界时的强度) 和 A_T, 以及谱指数 n 和 n_T. 这是一种更一般的表示, 其中 $n=1$ 对应标量扰动的尺度无关谱, 而 $n_T=0$ 对应张量扰动的尺度无关谱. 因子 $\Omega_m/D_1(a=1)$(Ω_m 是今天临界密度占总物质的比) 和**生长函数**D_1 将会在第 7 章定义 ((7.4) 式和 (7.77) 式). 这里感到不便的是因为我们还未遇到生长函数, 而 δ_H 的定义已经很标准 (Liddle and Lyth, 1993; Bunn and White, 1997). 引入这些因子使现在时刻的物质功率谱的形式很简洁, 所以这里的复杂是为了以后的方便.

可以将原初功率谱的谱指数 n 和 n_T 与慢滚参数 ϵ 和 δ 联系起来. 首先考虑张量扰动谱. 由 (6.100) 式的定义,

$$\frac{\mathrm{d}\ln[P_h]}{\mathrm{d}\ln k}=n_T-3. \tag{6.101}$$

左边对数的导数得到两项, 第一项 $\mathrm{d}\ln(k^{-3})/\mathrm{d}\ln(k)$ 得到 -3, 剩下 $n_T=2\mathrm{d}\ln H/\mathrm{d}\ln(k)$. 穿越视界时哈勃参量有些复杂:

$$\left.\frac{\mathrm{d}\ln H}{\mathrm{d}\ln k}\right|_{aH=k}=\frac{k}{H}\frac{\mathrm{d}H}{\mathrm{d}\eta}\times\left.\frac{\mathrm{d}\eta}{\mathrm{d}k}\right|_{aH=k}. \tag{6.102}$$

由 (6.35) 式的定义,$\dot{H}=-aH^2\epsilon$,$\mathrm{d}\eta|_{aH=k}/\mathrm{d}k=-\mathrm{d}(aH)^{-1}|_{aH=k}/\mathrm{d}k=1/k^2$, 所以

$$\left.\frac{\mathrm{d}\ln H}{\mathrm{d}\ln k}\right|_{aH=k}=-\frac{k}{H}\left.\frac{aH^2\epsilon}{k^2}\right|_{aH=k}=-\epsilon. \tag{6.103}$$

这样, 暴胀产生的张量扰动的原初扰动谱谱指数等于

$$n_T=-2\epsilon. \tag{6.104}$$

标量扰动谱谱指数的推导类似. 取 P_Φ 的对数导数, 得到

$$n-1=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\ln(k)}[\ln(H^2)-\ln(\epsilon)]. \tag{6.105}$$

H 的导数得到 -2ϵ, ϵ 的对数导数是 $-2(\epsilon+\delta)$(练习 12). 所以

$$n=1-4\epsilon-2\delta. \tag{6.106}$$

n_T 与 ϵ 的正比关系引出了一个暴胀理论很强的预言. 各种暴胀模型提出了对 ϵ 和 δ 不同的预言. 但几乎所有这些模型, 张量扰动模式和标量扰动模式的比 (正比于 ϵ) 都与张量扰动谱谱指数有直接的关系 (同样正比于 ϵ). 随着对本书后面部分的深入, 应记住这个重要的问题：理论预言是否能被观测检验.

慢滚参数可以作为暴胀理论预言的一个总结. 然而, 最终我们还是对其物理意义感兴趣, 我们想知道这些参数与基本的实体 (如推动暴胀的标量场的势) 有何联系. 在练习 14 中将会看到, 这些参数可以表示为势和它的导数. 这样, ϵ 和 δ 的准确值可以通过探测标量场的势而得到. 练习 18 给出这个势的尺度量级为 10^{15}GeV, 这的确非常引人注目!

推 荐 读 物

本章的暴胀理论介绍了很多扰动产生的内容, 简单介绍了这个著名理论的很多侧面. 最近,Guth 在*The Inflationary Universe*中回顾了他对暴胀理论的探索. 暴胀理论的另一个提出者 Linde 有一本专业性更强的书：*Inflation and Quantum Cosmology*, 比本书更加强调模型的构造. 之前提到的*The Early Universe*(Kolb and Turner) 将很多章节放在暴胀理论上. 近期*Cosmological Inflation and Large Scale Structure*(Liddle and Lyth) 与本书相似, 很强调扰动的分析. 其对扰动谱的讨论比本书 6.5 节的推导更少, 很值得阅读 (注意那里的普朗克质量是我们的 $m_{\rm Pl}/\sqrt{8\pi}$).

Blau 和 Guth 有一篇很清晰、深入的文章介绍暴胀理论, *300 Years of Gravitation*(Hawking and Israel). 一些其他同样篇幅的文章也很有吸引力. 最早的一篇文章 (Guth, 1981) 很容易阅读, 介绍了所有引出暴胀的问题, 以及在最开始如何解决它们 (最初的暴胀理论). 我很鼓励阅读 Guth 最初的那篇文章, 因为本章引入暴胀理论是因为视界疑难, 而 Guth 当时是为了解决更多的问题, 包括磁单极子问题和平直疑难 (练习 4).

有很多文章回顾了暴胀时期扰动的产生, 如 Lidsey 等 (1997) 及 Lyth 和 Riotto (1999) 的工作. 前者利用了与本书不同的方法, 本书针对慢滚参数 ϵ 和 δ 只在一阶准确. 后者将暴胀与粒子物理模型联系起来. Stewart 和 Lyth (1993) 简洁地介绍了高阶慢滚近似的处理. Hollands 和 Wald(2002) 写了一篇关于暴胀理论的很深刻的评论文章, 这篇文章是针对一些来自于 20 世纪 90 年代末期的发现中的满足感的一剂使人耳目一新的镇静剂. 这篇文章除了其本身的重要性外，也是我看到过的最清楚的定性描述暴胀时期产生扰动的文章.

与 6.1 节类似地, 联系初始条件和各种扰动的部分, 综述文章 (Efstathiou, 1990) 做了清晰的讨论. 我们忽略的等曲率扰动在其中也有详细讨论.

我们一直忽略了拓扑缺陷可能造成的扰动. 这些很吸引人的理论还没有得到很强的预言; 从某种程度上讲, 它们是错误的. 然而它们的数学计算极其复杂, 如果今后它们又取得成功, 我并不感到奇怪. 一些书籍对拓扑缺陷有很深入全面的介绍, 如*Cosmic Strings and Other Topological Defects* (Vilenkin and Shellard) 和*The Formation and Evolution of Cosmic Strings* (Gibbons, Hawking, and Vachaspati).

练　　习

1. 计算中微子和辐射的能量密度比 f_ν, 假设存在三种静止质量为零的中微子.
2. 在建立初始条件时考虑中微子的四极矩.

(a) 由关于 $\mathcal{N}(\mu)$ 的方程 (4.107) 式起, 推导下面几个中微子矩的方程组：

$$\begin{aligned}\dot{\mathcal{N}}_0 + k\mathcal{N}_1 &= -\dot{\Phi} \\ \dot{\mathcal{N}}_1 - \frac{k}{3}(\mathcal{N}_0 - 2\mathcal{N}_2) &= \frac{k}{3}\Psi \\ \dot{\mathcal{N}}_2 - \frac{2}{5}k\mathcal{N}_1 &= 0.\end{aligned} \tag{6.107}$$

推导过程中, 首先回顾这些多极矩的定义 (它们与光子的多极矩定义 (4.99) 式相同).将 (4.107) 式乘以 $\mathcal{P}_0$ 然后积分 $\int_{-1}^{1} \mathrm{d}\mu$ 得到上面第一式.再将 (4.107) 式分别乘以 $\mathcal{P}_1$ 和 $\mathcal{P}_2$ 得到上面第二、第三式. 8.3 节给出了详细的说明, 在那里也将同样推导光子多极矩. 在第三式中可以忽略掉 $\mathcal{N}_3$, 因为它比 $\mathcal{N}_2$ 小 $k\eta$ 量级 (试证明之).

(b) 从这些方程中消去 $\mathcal{N}_1$ 并证明

$$\ddot{\mathcal{N}}_2 = \frac{2k^2}{15}(\Psi + \mathcal{N}_0 - 2\mathcal{N}_2). \tag{6.108}$$

右侧的 $\mathcal{N}_2$ 远小于 $\Psi + \mathcal{N}_0$, 可以略去.

(c) 将爱因斯坦场方程 (5.33) 式改写为

$$\mathcal{N}_2 = -(k\eta)^2 \frac{\Phi + \Psi}{12 f_\nu}. \tag{6.109}$$

这里忽略了光子的四极矩, 因为康普顿散射使得 $\Theta_2 \ll \mathcal{N}_2$. 证明之.

(d) 现在将场方程的这种形式进行两次微分以得到 $\ddot{\mathcal{N}}_2$ 的表达式. 结合 (6.108) 式 (可以忽略 Φ 和 Ψ 的导数, 因为我们只对 $p = 0$ 的模式感兴趣), 将 $\mathcal{N}_0$ 表达成 Φ 和 Ψ 的形式.

(e) 最后假设 $\Theta_0 = \mathcal{N}_0$ 并利用刚刚得到的 $\mathcal{N}_0$ 的表达式, 将 (6.12) 式改写成两个引力势的关系式：

$$\Phi = -\Psi\left(1 + \frac{2f_\nu}{5}\right). \tag{6.110}$$

3. 证明物质、辐射的偶极矩和速度的初始条件 (6.16) 式.

4. 暴胀同样解决了*平坦性疑难*, 即为什么今天的能量密度如此接近临界密度.

(a) 设

$$\Omega(t) \equiv \frac{8\pi G\rho(t)}{3H^2(t)} \tag{6.111}$$

在现在时刻等于 0.3, 其中 ρ 包括物质和辐射的能量密度 (设宇宙学常数为零). 由 (1.2) 式画出 $\Omega(t) - 1$ 随尺度因子的变化曲线. 在普朗克时代 $\Omega(t)$ 需要多么接近 1(考虑没有暴胀发生, 普朗克时代的尺度因子的量级为 10^{-32})? 这种对初始条件的精细调节称为平坦性问题. 若没有这种精细调节, 开放的宇宙在今天会变得极度的开放 (Ω 几乎等于零).

(b) 证明暴胀解决了平坦性疑难. 将 $\Omega(t) - 1$ 外推至暴胀结束时, 再外推至 e^{60} 倍的膨胀之前. 在 e^{60} 倍的膨胀之前 $\Omega(t) - 1$ 的取值如何?

5. 考虑哈勃体积中的熵. 它正比于该体积内的总粒子数, 其比例常数为 1 的量级. 今天的哈勃体积内总共有多少个光子? 解释暴胀怎样制造出如此大的熵.

6. 我们已经证明, 如果宇宙早期一直由通常的物质和辐射组成, 则尺度因子为 a_e(很小)时, 共动视界与今天的共动视界的比是 a_0H_0/a_eH_e. 计算, 当温度是 10^{15}GeV 时, 这个比例是多少. 设辐射–物质相变发生在 $a \sim 10^{-4}$.

7. 考虑一个自由、均匀、质量为 m 的标量场, 场的势能 $V = m^2\phi^2/2$. 证明, 如果 $m \gg H$, 随频率振荡的标量场等于其质量; 并且也证明其能量密度随 a^{-3} 衰减，它精确地表现为普通的非相对论性物质.

8. 通过将变量 t 变为 η, 证明 (6.32) 式得到 (6.33) 式.

9. 计算量子化谐振子的一些熟知的性质.

(a) 单位质量谐振子的动量是 $p = \mathrm{d}x/\mathrm{d}t$. 计算

$$[\hat{x}, \hat{p}],$$

证明它等于 i. 算符 $\hat{p}$ 可以由 $\hat{x}$((6.38) 式) 对时间求导而得到.

(b) 计算单位质量谐振子的零点能. 首先对能量进行量子化

$$E = \frac{p^2}{2} + \frac{\omega^2 x^2}{2},$$

然后在基态 $\langle 0|\hat{E}|0\rangle$ 计算上式的期望值.

10. 证明暴胀时期的标量场不产生引力波. 回顾 (6.45) 式右侧

$$\delta T^1_1 - \delta T^2_2,$$

其中 δT 是能动张量 (假设由 ϕ 主导) 的扰动. 同 (5.63) 式的推导, 将 $\vec{k}$ 选择为 $\hat{z}$ 方向. 证明上式对于标量场确实为零.

11. 证明 (6.57) 式是 (6.56) 式的一个解.

(a) 定义 $\tilde{v} = v/\eta$, 将 (6.56) 式写成 $\tilde{v}$ 的形式.

(b) 得到的方程是球贝塞尔方程. 写出方程的通解 —— 即 $k\eta$ 的两个函数的线性组合.

(c) 利用 (6.58) 式的边界条件确定 (b) 得到的解的系数. 并证明 (6.57) 式满足这样的边界条件.

12. 推导出暴胀时期慢滚参数的一些有用的等式.

(a) 证明

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\eta}\left(\frac{1}{aH}\right) = \epsilon - 1.$$

(b) 证明

$$4\pi G(\dot{\phi}^{(0)})^2 = \epsilon a^2 H^2. \tag{6.112}$$

(c) 利用 ϵ 和 δ 的定义, 证明

$$\frac{\mathrm{d}\epsilon}{\mathrm{d}\eta} = -2aH\epsilon(\epsilon + \delta). \tag{6.113}$$

利用上式结果证明 $\mathrm{d}\ln\epsilon|_{aH=k}/\mathrm{d}\ln(k) = -2(\epsilon + \delta)$.

13. 证明 (6.85) 式在大尺度成立. 合并爱因斯坦场方程的时间–时间项 (5.27) 式和时间–空间项 (第 5 章练习 5), 并取大尺度的极限.

14. 将慢滚参数 ϵ 和 δ 表达成势 V 和其对 ϕ 的导数的形式. 证明, 在低阶情况下,

$$\epsilon = \frac{1}{16\pi G}\left(\frac{V'}{V}\right)^2$$

$$\delta = \epsilon - \frac{1}{8\pi G}\frac{V''}{V}$$

其中 “$'$” 表示对 $\phi^{(0)}$ 求导.

15. 有很多方法可以描述宇宙中的压力并将压力与能量密度联系起来. 其中之一是回到第 2 章的*状态方程*

$$\omega \equiv \frac{\mathcal{P}}{\rho}. \tag{6.114}$$

之二是*声速*

$$c_s^2 \equiv \frac{\mathrm{d}\mathcal{P}}{\mathrm{d}\rho}. \tag{6.115}$$

计算 c_s^2 的方法是将 $\mathcal{P}$ 和 ρ 都对时间求导, 再取商. 最后得到了能量密度中的扰动和压力中的扰动之比:

$$\frac{\delta\mathcal{P}}{\delta\rho} = \frac{-3\delta T_0^0}{\delta T_i^i}, \tag{6.116}$$

式中的负号来自我们的习惯：能动张量的时间–时间分量等于能量密度的负值; 因子 3 来自对空间指标的求和. 对于绝热扰动, $\delta\mathcal{P}/\delta\rho = c_s^2$. 证明上式在三种情况下成立：物质、辐射, 以及暴胀时期正在穿越视界时的一个单独的标量场. 对于最后一种情况, 证明 $\delta\mathcal{P}/\delta\rho - c_s^2$ 是慢滚参数 ϵ 和 δ 的量级.

16. 证明对于由 (6.91) 式给出的规范, 关于标量场的扰动 $\delta\phi$ 的方程是 (6.71) 式.

(a) 不存在各向异性拉伸时, Bardeen 给出的关于规范不变密度的方程是

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\eta}(a^3\rho\epsilon_m) = -(\rho+\mathcal{P})a^3kv \tag{6.117}$$

其中规范不变密度定义为

$$\rho\epsilon_m = -\rho - \delta T_0^0 + \frac{3\mathrm{i}H}{k^2}k_i\delta T_i^0 \tag{6.118}$$

而速度 v 由 (6.92) 式定义. 在空间平滑规范下, 计算标量场的 $\rho\epsilon_m$. 证明, 在慢滚参数 ϵ(不是 ϵ_m) 和 δ 的低阶近似下, (6.117) 式化为

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\eta}(a^3\dot{\phi}^{(0)}\dot{\delta\phi}) = -k^2a\dot{\phi}^{(0)}\delta\phi. \tag{6.119}$$

(b) 利用慢滚近似, 将 (6.119) 式化为 (6.45) 式.

17. 证明共形牛顿规范下的曲率等于 $4k^2\Phi/a^2$. 为了证明这一点, 利用度规的空间部分 $g_{ij} = \delta_{ij}a^2(1+2\Phi)$ 计算出三维空间的里奇标量.

18. 利用以下形式的四次势, 得到暴胀模型的预言.

$$V(\phi) = \lambda\phi^4$$

(a) 计算慢滚参数 ϵ 和 δ, 用 ϕ 表示.

(b) 得到 ϕ_e, 即暴胀结束时的值. 在暴胀结束时设 $\epsilon = 1$ 即可.

(c) 为确定功率谱, 需要得出 $-k\eta = 1$ 时的 ϵ 和 δ. 将波数 k 设为今天的值 $a_0 H_0$. 证明 $-k\eta = 1$ 等价于

$$\mathrm{e}^{60} = \int_0^N \mathrm{d}N' \frac{\mathrm{e}^{N'}}{(H(N')/H_e)}$$

其中 H_e 为暴胀结束时的哈勃参量, 而 N 定义为暴胀后膨胀的 e 指数:

$$N \equiv \ln\left(\frac{a_e}{a}\right).$$

(d) 将上面的哈勃参量设为常数 $H/H_e = 1$,这意味着 $N \simeq 60$. 将这种情况用 ϕ 表达出来. 注意 $N = \displaystyle\int_t^{T_e} \mathrm{d}t' H(t')$并假设 H 为势能主导. 证明当 $\phi^2 = 60m_{\mathrm{Pl}}^2/\pi$ 时, 该模式离开视界.

(e) 计算出 n 和 n_T 的估计值.

(f) 估计标量场的强度, 用 λ 表示. 作为一个较粗略的估计, 设该模式的 $k^3 P_\Phi(k)$ 等于 10^{-8}(在第 8 章讨论大尺度各向异性的时候我们将得到更精确的值). 这个值对 λ 意味着什么?

这个模型展示了同时代的很多模型的特征.(1) 这种场的尺度相当于 (甚至大于) 普朗克尺度, 但 (2) 能量尺度 V 非常小, 因为 (3) 其耦合常数非常小.

第 7 章　非 均 匀 性

利用已经建立的方程组和产生扰动的初始条件, 我们能够计算宇宙的不均匀性和各向异性. 此章以暗物质的扰动开始进行初步求解. 原则上来说, 暗物质的扰动与其他所有扰动是相互耦合的, 但实际中, 暗物质的扰动对辐射扰动的细节依赖很弱. 从暗物质的定义可知, 辐射仅通过引力势间接地影响到它. 虽然宇宙的早期辐射会对引力势带来决定性作用, 然而当宇宙进入以物质为主的阶段, 引力势是独立于辐射的. 此外, 辐射扰动是相对简单的, 除了单极矩和偶极矩以外都可以忽略. 反之则不成立, 在下一章将会看到, 为了恰当地研究各向异性, 我们需要知道物质扰动演化的行为方式.

本章的最终目的是将理论与观测进行比较. 我们将求解每一个傅里叶模式 $\delta(k,\eta)$ 的演化. 给定这些解以及由暴胀产生的初始功率谱, 我们可以构建今天的物质功率谱. 至少从大尺度结构而言, 这是一个最重要的观测现象. 对于小尺度而言, 与今天的观测相比较是更困难的：当研究星系的分布时, 我们需要考虑非线性和气体动力学. 然而, 即便对于小尺度, 本章计算的线性功率谱常常是任何关于物质分布定量描述的出发点.

7.1　引　　言

引力不稳定性是一个容易理解的有力思想, 最可能造成宇宙的结构形成. 随着时间的演化, 物质会在高密度的区域不断积累, 而这与初始密度扰动的大小无关 (例如, 在经典的宇宙图景中, 密度扰动与 10^{-5} 数量级), 最终, 足够多的物质将被吸引到这个区域而形成结构.

引力不稳定性方程 $F = ma$ 支配着密度扰动 δ. 由示意图有

$$\ddot{\delta} + [\text{压力} - \text{引力}]\delta = 0. \tag{7.1}$$

这些基本的力, 如图 7.1 所示, 作用在相反方向. 引力会吸引更多物质进入此区域而使密度增加. 由于在高密度区中存在大量粒子, 随机热运动会造成此区域的质量流失, 因此, 若压力很大, 不均匀性不会增长. (7.1) 式说明, 低压情况下 δ 将呈指数增长, 而压力较大时,δ 将随时间振荡.

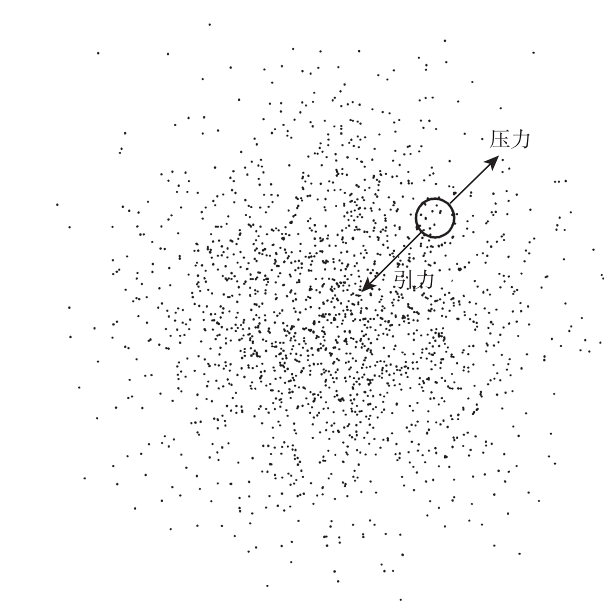


图 7.1　引力不稳定性. 高密度区附近的物质由于引力被吸引到中心, 同时压力会给它们向外的力. 如果此区域密度足够大, 引力将占主导且密度扰动随时间不断增大

接下来我们将会看到由 (7.1) 式描述的简单形式的引力不稳定性的许多表现. 不同环境的宇宙学条件会改变增长率, 例如, 在物质为主的宇宙中, δ 仅按时间的幂律形成增长, 而非指数形式; 然而, 在辐射为主的宇宙中, δ 却是对数增长. 我们将同时考虑此方程的超视界形式和熟悉的亚视界形式. 在进行数学计算时, 认识到引力和压力的相互作用是必要的.

7.1.1　宇宙演化的三个阶段

自然地, 宇宙学扰动的演化将分为三个阶段. 为理解这一点, 我们研究几种不同模式的解. 图 7.2 说明了长波、中波、短波模式下引力势随尺度因子的变化. 宇宙早期, 所有的模式处于视界之外 ($k\eta \ll 1$) 且势能为常数. 中期阶段 (图中阴影部分), 会发生两种情况：不同波长进入视界、宇宙从辐射为主 $a \ll a_{\rm eq}$ 演化到物质为主阶段 $a \gg a_{\rm eq}$. 粗略来讲, 可见这些时期的大小 ($a_{\rm eq}$ 和视界过渡期) 对势能的影响是极大的. 大尺度模式晚于 $a_{\rm eq}$ 进入视界, 它与早于 $a_{\rm eq}$ 进入视界的小尺度模式的演化存在很大差异. 最终, 所有模式再一次以相同方式演化并保持常数 ($\Omega_m = 1$).

我们能够观测到晚期阶段占主导的物质分布情况, 即所有模式以同样方式演化的第三阶段. 若将这些阶段的势能与暴胀阶段形成的初始势能相联系, 我们可以示意性地写为

$$\Phi(\vec{k}, a) = \Phi_{\rm p}(\vec{k}) \times \{\text{转移函数}(k)\} \times \{\text{增长函数}(a)\}. \tag{7.2}$$

其中 Φ_p 是暴胀时的初始势能值. 转移函数描述了视界过渡区和辐射/物质转换阶段 (图 7.2 的阴影部分) 的扰动演化, 而增长因子描述了晚期不同波长的独立增长. 此示意方程仅仅粗略地给出了增长因子和转移函数的定义. 从图 7.2 注意到随着宇宙演化到辐射与物质相等的时刻, 最大的波长扰动只是略有下降. 习惯将此下降消除使得转移函数在大尺度上等于 1. 因此, 转移函数定义为

$$T(k) \equiv \frac{\Phi(k, a_{\text{late}})}{\Phi_{\text{Large-Scale}}(k, a_{\text{late}})} \tag{7.3}$$

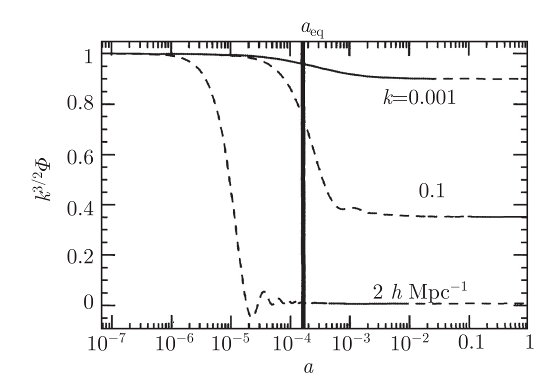


图 7.2 引力势 Φ 的线性演化. 虚线表示已进入视界的模式, 阴影区域的演化阶段由转移函数描述. 势能是没有归一化的, 但三种模式的相对归一化正如它们是尺度无关的扰动. 这里忽略重子物质,$\Omega_m = 1$,$h = 0.5$

其中 a_{late} 表示辐射转移结束后的一个时期,Large-Scale 解是减少一个小量的初始 Φ. 我们会在 7.2 节导出 — 忽略各向异性压力 — 这个因子等于 (9/10). 势能与其在转移函数结束后的值之比定义为

$$\frac{\Phi(a)}{\Phi(a_{\text{late}})} \equiv \frac{D_1(a)}{a} \quad (a > a_{\text{late}}), \tag{7.4}$$

其中 D_1 称为增长函数. 图 7.2 描述了平坦、物质为主的宇宙下的情况, 当势能为常数时, 有 $D_1(a) = a$. 利用以上方程, 可得

$$\Phi(\vec{k}, a) = \frac{9}{10}\Phi_{\text{p}}(\vec{k})T(k)\frac{D_1(a)}{a} \quad (a > a_{\text{late}}). \tag{7.5}$$

检验势能的最简单方式是测量物质的分布. 图 7.3 显示了三种不同模式下物质密度扰动的演化. 注意在晚期—当时势能为常数且所有模式处于视界内—扰动随尺度因子呈 $\delta \propto a$ 的增长. 这似乎解释了上述奇怪的定义 (如果势能为常数，为什么还称之为增长函数)：D_1 描述了晚期物质扰动的增长. 这个增长量与我们的直觉

认识是完全相符的, 即随着时间演化, 致密区吸引越来越多的物质, 因此密度越来越大.

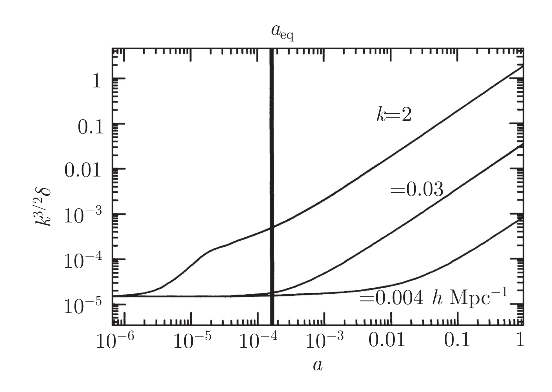


图 7.3 与图 7.2 相同模型下的暗物质扰动演化. 进入视界后幅度开始增长 (显示了三种不同模式的不同阶段).$a_{\rm eq}$ 之后, 所有亚视界模式以相同方式演化, 随着增长因子增长. 图中, 在平坦、物质为主的宇宙中, 增长因子等于 a

现在我们能够将物质分布的功率谱用暴胀阶段的原初功率谱、转移函数和增长函数表达出来. 将物质密度扰动与晚期势能建立联系的最简单方式是使用 Poisson 方程 ((5.81) 式中较大的 k 值和非辐射情况):

$$\Phi = \frac{4\pi G\rho_m a^2\delta}{k^2} \quad (a > a_{\rm late}). \tag{7.6}$$

背景物质的密度为 $\rho_m = \Omega_m\rho_{\rm cr}/a^3$, 且 $4\pi G\rho_{\rm cr} = (3/2)\,H_0^2$, 因此

$$\delta(\vec{k}, a) = \frac{k^2\Phi(\vec{k}, a)a}{(3/2)\Omega_m H_0^2} \quad (a > a_{\rm late}). \tag{7.7}$$

(7.7) 式与 (7.5) 式联立, 可以得到现在的密度扰动与初始势能之间的关系

$$\delta(\vec{k}, a) = \frac{3}{5}\frac{k^2}{\Omega_m H_0^2}\Phi_p(\vec{k})T(k)D_1(a) \quad (a > a_{\rm late}). \tag{7.8}$$

无论初始扰动 Φ_p 是如何产生的,(7.8) 式始终成立. 在暴胀理论下,$\Phi_p\left(\vec{k}\right)$ 源于均值为零, 方差 ((6.100) 式) 为 $P_\Phi = \left(50\pi^2/9k^3\right)(k/H_0)^{n-1}\,\delta_H^2\,(\Omega_m/D_1\,(a=1))^2$ 的高斯分布. 因此晚期物质功率谱为

$$P(k, a) = 2\pi^2\delta_H^2\frac{k^n}{H_0^{n+3}}T^2(k)\left(\frac{D_1(a)}{D_1(a=1)}\right)^2 \quad (a > a_{\rm late}). \tag{7.9}$$

功率谱的量纲为 (长度)^3. 如果将功率表示为无量纲函数, 必须乘以 k^3. 更准确来说, 常常乘以 $\mathrm{d}^3kP\,(k)\,/\,(2\pi)^2$, 其中 $\mathrm{d}k$ 表示以 k 为中心值的剩余功率间隔. 沿着 $\vec{k}$

的所有方向积分后, 可得 $(\mathrm{d}k/k)\,\Delta^2\,(k)$, 其中

$$\Delta^2(k) \equiv \frac{k^3 P(k)}{2\pi^2} \tag{7.10}$$

小的 Δ 对应小的不均匀性, 而大的 Δ 表示非线性扰动. 由此约定, 在视界尺度 $(k = H_0)$ 时, Harrison-Zel'dovich-Peebles 谱满足 $\Delta^2 = \delta_H^2$.

图 7.4 显示了两种不同模型现在的功率谱. 注意到, 大尺度上两种模型都满足 $P \propto k$, 其转移函数是一致的. 这个关系可以明显地从 (7.9) 式得到, 它对应于最小简单的暴胀模型, 其中 $n = 1$. 而小尺度上的功率谱恰好相反. 为了理解这一点, 参见图 7.2. 在物质/辐射相等之前, 小尺度模式 $(k = 2h\mathrm{Mpc}^{-1})$ 就已经进入视界. 由于辐射时期的势能衰变, 转移函数远小于 1. 此效应对物质扰动的影响见图 7.3, 其中从此模式进入视界之后 $a \simeq 10^{-5}$ 开始到宇宙以物质为主的 $a \simeq 10^{-4}$ 结束,δ 的增长一直受到阻碍. 进入视界的模式甚至更早就已经受到更多抑制, 因此, 小尺度上功率谱是 k 的减函数.

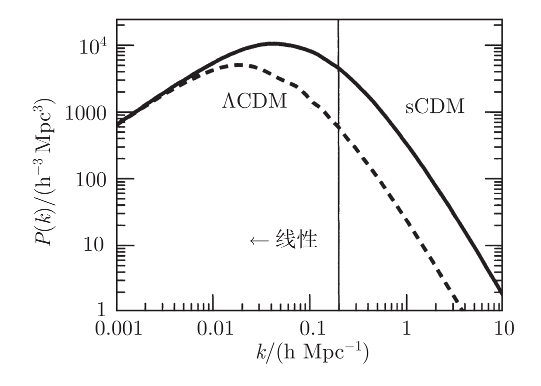


图 7.4　两个冷暗物质模型：ΛCDM 模型和没有宇宙学常数的 sCDM 模型中的功率谱. 功率谱已经进行了归一化以与大尺度吻合. 由于稍晚的 a_{eq}, 宇宙学常数模型中的功率谱在大尺度发生反转. 垂线左边的尺度仍然在线性演化

这会导致在物质/辐射相等的视界尺度上出现功率谱的反转, 这种反转能够从图 7.4 中明显的看到, 图中展示了两个不同的模型：一个是平坦、物质为主的宇宙 (常称为标准冷暗物质或 sCDM 模型); 一个是包含宇宙学常数的宇宙 (LCDM 或 ΛCDM 模型). 两种模型的主要区别是 sCDM 包含更多的物质且有更早的 a_{eq}. 更早的 a_{eq} 意味着在辐射主导时期只有非常小的尺度进入视界, 因此这种反转发生在更小的尺度. 最后, 另外一个需要记住的重要尺度是非线性不能忽略时的尺度, 其粗略估计为 $\Delta\,(k_{nl}) \simeq 1$, 在大部分模型中对应 $k_{nl} \simeq 0.2\ \mathrm{h\ Mpc}^{-1}$. 图 7.4 是现阶段的线性功率谱. 在小于 k_{nl} 的尺度, 不能够将现阶段的物质分布与图 7.4 所示的谱

盲目比较.

7.1.2 分析方法

暗物质密度扰动的演化方程是什么? 原则上, 它们是由第 4 章导出的 Boltzmann 方程组和第 5 章的爱因斯坦方程组成. 然而实际上, 我们并不需要所有的方程. 为了理解这一点, 可以回忆在宇宙早期 (再复合 $a = a_*$ 之前), 光子的分布特征只需由单极矩 Θ_0 和偶极矩 Θ_1 来描述. 由于光子与电子/质子气体之间紧密的耦合, 其他阶矩都被抑制了. 退耦之后, 我们需要更高阶矩来描述光子的分布. 然而, 我们的目的是为了计算物质的分布, a_* 之后光子的行为是与此无关的. 对于恰好进入物质阶段时期而言, 势能是由暗物质本身决定的. 总之, 当考虑物质分布的演化时, 除了单极矩和偶极矩之外, 我们可以忽略光子其他的所有阶矩.

当忽略高阶辐射矩后, 四个相关的 Boltzmann 方程为 (4.7 节)

$$\dot{\Theta}_{r,0} + k\Theta_{r,1} = -\dot{\Phi} \tag{7.11}$$

$$\dot{\Theta}_{r,1} - \frac{k}{3}\Theta_{r,0} = -\frac{-k}{3}\Phi \tag{7.12}$$

$$\dot{\delta} + \mathrm{i}kv = -3\dot{\Phi} \tag{7.13}$$

$$\dot{v} + \frac{\dot{a}}{a}v = \mathrm{i}k\Phi. \tag{7.14}$$

即使假设只有单极矩和偶极矩被保留, 从 (4.100) 式得到 (7.11) 式和 (7.12) 式仍需要一些解释和计算. 首先是对符号的解释: 角标 “r” 代表辐射, 包括中微子和光子辐射. 这两类物质都对引力势 (本章所关心的) 有贡献且两者都源于相同的初始条件. 很难看出两者遵循相同的演化方程 ((4.100) 式中 t 项可以被忽略), 或者这些演化方程可以由 (7.11) 式和 (7.12) 式给出. 但至少在小的重子密度和只考虑物质演化的前提下, 这是正确的. 读者可在练习 1 中进行详细计算, 而我们将在下一章研究完整的光子演化方程.

为了使暗物质密度方程组封闭, 我们需要一个关于引力势 Φ 的方程. 读者也许已经注意到, 在 (7.11)~(7.14) 式中已经设定 $\Psi \to -\Phi$, 这在不存在四级矩的情况下是一个有效的近似. 由于爱因斯坦方程中有一些是不必要的, 我们可以通过多种方式将 Φ 与辐射和物质的密度扰动相联系. 我们可以使用时间–时间项, (5.27) 式为

$$k^2\Phi + 3\frac{\dot{a}}{a}\left(\dot{\Phi} + \frac{\dot{a}}{a}\Phi\right) = 4\pi Ga^2[\rho_{\mathrm{dm}}\delta + 4\rho_r\Theta_{r,0}]. \tag{7.15}$$

这里, 同样将 Ψ 设为 $-\Phi$, 并忽略重子[①]以及中微子和光子对引力势的贡献. 另一

① 因为对于大多数模型来说，重子物质的密度远小于暗物质密度，因此这是一个合理的近似。我们将在 7.6 节讨论重子物质的作用.

种方法是使用代数 (不含时间导数) 方程 (5.81) 式

$$k^2\Phi = 4\pi G a^2 \left[\rho_{\mathrm{dm}}\delta + 4\rho_r\Theta_{r,0} + \frac{3aH}{k}(\mathrm{i}\rho_{\mathrm{dm}}v + 4\rho_r\Theta_{r,1})\right]. \tag{7.16}$$

尽管这两个方程中仅需一个就可以使包含 $\delta, v, \Theta_{r,0}, \Theta_{r,1}, \Phi$ 五个变量的方程组封闭, 但在不同的时期它们都是有用的.

到此阶段, 最简单的事情是数值求解这五个耦合的方程 (练习 2). 如果 (7.15) 式被采用, 则不会存在数值计算的困难, 并且通过很少量的工作, 读者可以得到一个程序来快速计算转移方程 (不含重子物质).

暗物质密度的解析解是很难获得的. 没有一个解析解能够适用于所有尺度、所有阶段. 为了进一步继续, 我们将不得不加以限制使得五个方程简化为更便于操作的两个或三个方程. 这样做的代价是这些限制仅对特定尺度和时期是正确的. 将这些解析解拼凑起来而得到合理的辐射方程的做法正是科学的艺术.

本章之后的大部分内容将对这个解析解进行说明, 参见图 7.5. 实线表示随时间增加的共动视界, 在 a_{eq} 阶段约等于 30 h^{-1} Mpc[①]. 一个给定的共动尺度随时间变化保持常数. 例如, 10 h^{-1} Mpc 的共动距离对应于波数 $k = 0.1\ h\ \mathrm{Mpc}^{-1}$. 在早期 ($a < 10^{-5}$) 此距离大于视界, 因此 $k\eta \ll 1$. 我们可以消去演化方程中所有正比于 k 的项. 在 7.2.1 节, 我们将在超视界限制下导出势能的精确解. 然而, 图 7.5 说明, 超视界解只有在 $a \simeq 10^{-5}$ 之前是正确的. 在更晚期 ($a > 10^{-3}$) 此模式已经处于视界之内且辐射扰动已经无关紧要了 (由于宇宙是物质为主). 在 7.3.2 节将看到, 在这些条件下, 能够得到另一个解析解. 我们所面临的困难是将超视界解和亚视界解匹配起来.

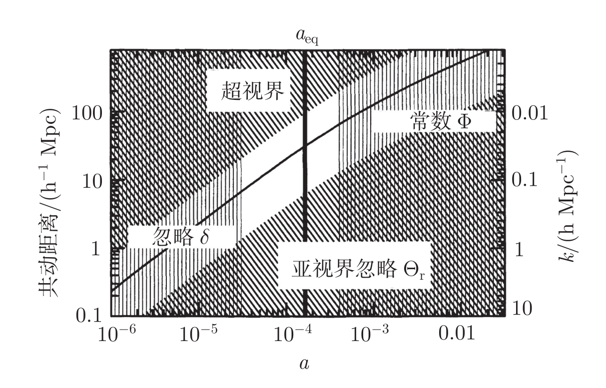


图 7.5　转移函数的物理性质. 阴影线区域有解析解. 中心空白表示没有得到中间尺度模式全部演化的解析解. 从左下方到右上方单调增加的曲线是共动视界

① 这个模型是独立的，图中给出的是 sCDM 模型，$h = 0.5$.

超视界解和亚视界解匹配的问题能够通过甚大尺度 ($k < 0.01\ h\ \mathrm{Mpc}^{-1}$) 和甚小尺度 ($k > 0.5\ h\ \mathrm{Mpc}^{-1}$) 模式求解. 在大尺度情况下, 我们将在 7.2.2 节看到一旦宇宙以物质为主,$\Phi =$ 常数都是演化方程的一个解，即使在模式穿越视界时. 这个事实可作为连接超视界和亚视界解的一座桥梁, 两者在物质为主阶段都有一个常数 Φ. 在小尺度情况下, 由于这些模式是在宇宙处于辐射阶段穿越的视界, 因此我们可以忽略它们穿过视界时的物质扰动. 然后, 当模式充分位于视界内时, 辐射扰动衰退殆尽, 我们可以匹配到亚视界以及 7.3.2 节的非辐射扰动解.

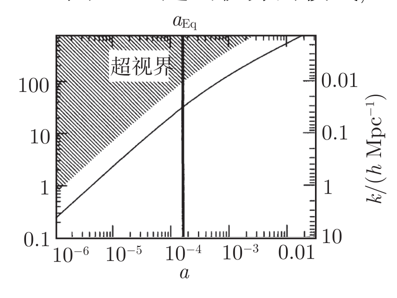
利用大尺度和小尺度的解析式, 我们能够通过样条插值两个解得到对转移函数很好的拟合. 7.4 节会见到这个计算, 主要因为转移函数太平滑，从大尺度阶段的 1 单调递减.

7.2　大尺度的非均匀性

在甚大尺度, 我们首先通过物质–辐射转移, 然后通过视界穿越得到势能的解析解. 我们以超视界解开始, 其在物质–辐射转移阶段是有效的. 7.2.1 节得到的结果是：随着宇宙由辐射到物质为主的演化, 势能下降的因子为 9/10.

7.2.1　大尺度的超视界解

对于远远超出视界的模式, $k\eta \ll 1$ 并且我们能够忽略掉演化方程中所有依赖 k 的项. 由 (7.11) 式和 (7.13) 式可见, 在此限制下, 速度 (v 和 $\Phi_{r,1}$) 将从演化方程中退耦. 这能够立刻使方程的数量从五个减少为三个, 并且我们注意到第三个方程 (7.16) 式存在反比于 k 的项. 这些将是很难处理的, 因此我们选择 (7.15) 式代替, 得到



$$\dot{\Theta}_{r,0} = -\dot{\Phi} \tag{7.17}$$

$$\dot{\delta} = -3\dot{\Phi} \tag{7.18}$$

$$3\frac{\dot{a}}{a}\left(\dot{\Phi} + \frac{\dot{a}}{a}\Phi\right) = 4\pi G a^2[\rho_{\mathrm{dm}}\delta + 4\rho_r\Theta_{r,0}]. \tag{7.19}$$

注意到前两个方程要求 $\delta - 3\Theta_{r,0}$ 为常数, 而且进一步的, 我们知道这个常数为零 (这些是初始条件). 因此我们使用暗物质方程 (7.18) 式和爱因斯坦方程, 并将 $\Theta_{r,0}$ 设为 $\delta/3$. 爱因斯坦方程变为

$$3\frac{\dot{a}}{a}\left(\dot{\Phi} + \frac{\dot{a}}{a}\Phi\right) = 4\pi G a^2\rho_{\mathrm{dm}}\delta\left[1 + \frac{4}{3y}\right]. \tag{7.20}$$

这里引入

$$y \equiv \frac{a}{a_{\rm eq}} = \frac{\rho_{\rm dm}}{\rho_r} \tag{7.21}$$

我们将使用它作为演化变量而代替 η 或 a. 再一次强调, 我们忽略重子物质, 因此 $a_{\rm eq}$ 仅由 $\rho_{\rm dm}$ 确定; 实际上当考虑重子物质在内的所有物质时, (7.21) 式最后一项的分子应该是 $\rho_{\rm m}$.

(7.18) 式和 (7.20) 式是关于 δ 和 φ 的两个一阶微分方程. 我们要将这两个一阶方程化为一个二阶微分方程, 然后求解. 首先, 将原式重写为关于变量 y 的方程. 利用 Jacobian 方程可以将对 y 求导与对 η 的求导相联系,

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\eta} &= \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}\eta}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y} \\ &= aHy\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y},\end{aligned} \tag{7.22}$$

第二行沿用 y 的定义, 且有 $\dot{a} = a^2 H$. 改写成 y 为变量的爱因斯坦方程为

$$\begin{aligned}y\Phi' + \Phi &= \frac{y}{2(y+1)}\delta\left[1 + \frac{4}{3y}\right] \\ &= \frac{3y+4}{6(y+1)}\delta\end{aligned} \tag{7.23}$$

其中撇号表示对 y 求导, 由于 $8\pi G\rho_{\rm dm}/3 = (8\pi G\rho/3)\,y/\,(y+1) = H^2 y/\,(y+1)$ 第一行右边成立.

一般来说, 将两个一阶方程转化为一个二阶方程的方法是对其中一个微分. 这里, 为了简化计算, 首先将 (7.23) 式重写为 δ 的表达式; 然后对 y 微分; 最后, 由暗物质方程 (7.18) 式将 δ' 变换为 $-3\Phi'$, 推出

$$-3\Phi' = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y}\left\{\frac{6(y+1)}{3y+4}[y\Phi' + \Phi]\right\}. \tag{7.24}$$

这样的求导虽然繁琐但很简单. 我们得到

$$\Phi'' + \frac{21y^2 + 54y + 32}{2y(y+1)(3y+4)}\Phi' + \frac{\Phi}{y(y+1)(3y+4)} = 0. \tag{7.25}$$

值得注意的是, Kodama 和 Sasaki (1984) 发现 (7.25) 式的一个解析解, 他们引入一个新变量:

$$u \equiv \frac{y^3}{\sqrt{1+y}}\Phi. \tag{7.26}$$

读者将计算 (练习 4) 引入该变量后, (7.25) 式变为

$$u'' + u'\left[\frac{-2}{y} + \frac{3/2}{1+y} - \frac{3}{3y+4}\right] = 0. \tag{7.27}$$

也就是说, 没有正比于 u 的项. 相比于得到 Φ 的二阶方程, 相反我们有关于 u' 的一阶方程. 幸运的是, 此一阶方程是可积的. 从

$$\frac{\mathrm{d}u'}{u'} = \mathrm{d}y\left[\frac{2}{y} - \frac{3/2}{1+y} + \frac{3}{3y+4}\right] \tag{7.28}$$

开始, 通过积分得到

$$\ln(u') = \text{constant} + 2\ln(y) - (3/2)\ln(1+y) + \ln(3y+4). \tag{7.29}$$

然后指数化得到

$$u' = A\frac{y^2(3y+4)}{(1+y)^{3/2}} \tag{7.30}$$

其中 A 为待定常数.

我们从引力势的解析表达式中分离一个积分. 记住 u 的定义 (7.26) 式, 积分 (7.30) 式能够得到

$$\frac{y^3}{\sqrt{1+y}}\Phi = A\int_0^y \mathrm{d}y'\frac{y'^2(3y'+4)}{(1+y')^{3/2}}. \tag{7.31}$$

注意这将出现另一个常数 $u(0)$. 然而, 由于早期 $y^3\Phi \to 0$, 此常数为零. 同样, 即便是在积分之前, 我们也能够确定常数 A. 对于小的 y, 被积函数变为 $4y'^2$, (7.31) 式变为 $\Phi = 4A/3$, 因此,$A = 3\Phi\,(0)\,/4$. 积分能够写为解析形式

$$\Phi = \frac{\Phi(0)}{10}\frac{1}{y^3}[16\sqrt{1+y} + 9y^3 + 2y^2 - 8y - 16]. \tag{7.32}$$

(7.32) 式是关于超视界尺度势能的最终表达式. 尽管 y 取较小值时表达式满足 $\Phi = \Phi\,(0)$ 为常数并不是显然的, 但由于我们选择的两个积分常数精确满足此条件, 故一定是这种情况. 对于大的 y 值, 一旦宇宙成为物质为主, 括号中的 y^3 项占主导, 使得 $\Phi \to (9/10)\,\Phi\,(0)$. 这是我们得到的精确结果：随着宇宙穿越辐射与物质相等时刻, 势能在大尺度上降低 10%.

我们将这个只在模式处于超视界时的解析结果与数值结果作比较. 图 7.6 表明在最大尺度上这个解符合得很好, 在尺度为 $k = 0.01h\ \mathrm{Mpc}^{-1}$ 时也相当吻合 (误差小于 10%). 这比起我们由超视界解存在条件而粗略估计下的预期好一些, 且这对我们以后使用样条插值大尺度和小尺度解很重要. 也许这个解析解会使你惊奇的一个特点是, 尽管在物质和辐射为主时期大尺度上的势能是常数, 但是其在纯物质和纯辐射阶段的过渡是十分漫长的. 例如, 举一个接下来的章节中我们将看到的 CMB 的重要例子：即使对于最大尺度模式, 势能仍然是在明显晚于 a_{eq} 的 $a \simeq 10^{-3}$ 阶段衰变. 在包含更少物质的模式中, a_{eq} 甚至接近 10^{-3}, 因此, 在再复合时期势能的衰变变得更为显著.

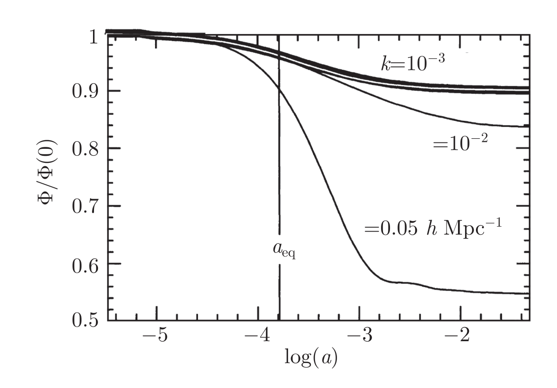
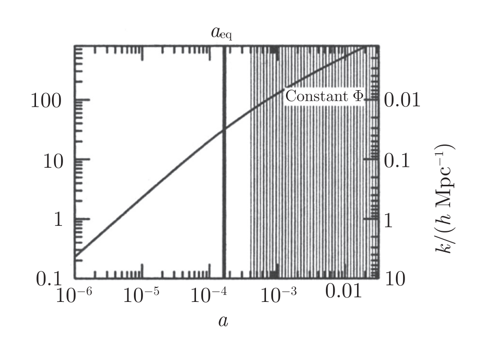


图 7.6 没有重子,$h = 0.5$,$\Omega_m = 1$ 情况下的 CDM 模型中势能的超视界演化. 粗实线显示了只在大尺度上成立的 (7.32) 式的解析结果. 其中粗线为模式 $k = 0.001\ h\ \mathrm{Mpc}^{-1}$. 两个其他的较小尺度的模式也展示出来

7.2.2 大尺度穿越视界



读者需要注意的图 7.6 中的一个有趣特征是大尺度势能 (数值解) 在很晚期 ($a \geqslant 10^{-2}$) 变为常数. 对于 $k = 10^{-3}\ h\ \mathrm{Mpc}^{-1}$, 模式在 $\eta \sim k^{-1} = 1000h^{-1}\mathrm{Mpc}$ 进入视界, 对应于如图 7.6 所示 $a \sim 0.03$ 的平坦、物质为主的宇宙. 当模式穿过视界时势能保持常数. 只要宇宙以物质为主, 这个结果就是可信的. 我们现在来证明它.

我们将兴趣转向对在辐射并不重要的限制下的五个方程. 势能仅依赖于物质的不均匀性, 因此我们能够忽略两个辐射方程 (7.11) 式和 (7.12) 式. 另外的两个物质方程, 我们采用第二个爱因斯坦方程 (7.16) 式. 这是一个代数方程, 意味着原则上我们可以消去 Φ 而留下一个包含两个一阶微分方程的系统. 一般而言, 这两个一阶方程有两个解. 我们可通过对初始条件的认识得到结果，而不是直接求解. 这个思路是：我们已经知道在物质绝对主要时期, 超视界势能为常数. 因此, 我们的问题的初始条件是势能是常数 ($\dot{\Phi} = 0$). 如果我们能够说明常数 Φ 是物质为主的方程的两个通解之一, 就可以不管其他的解是什么, 因为初始条件保证了常数 Φ 解是唯一解.

如果方程组

$$\dot{\delta} + \mathrm{i}kv = 0 \tag{7.33}$$

$$\dot{v} + aHv = \mathrm{i}k\Phi \tag{7.34}$$

$$k^2\Phi = \frac{3}{2}a^2H^2\left[\delta + \frac{3aH\mathrm{i}v}{k}\right] \tag{7.35}$$

允许不随时间变化的常数 Φ 解. 我们可使用代数方程 (7.35) 式消除另外两个方程的 δ. 在物质为主时期,$H \propto a^{-3/2}$, 因此 $\mathrm{d}\,(aH)\,/\mathrm{d}\eta = -a^2H^2/2$. 用 Φ 和 v 代替 (7.33) 式中的 δ 得到

$$\frac{2k^2\dot{\Phi}}{3a^2H^2} + \frac{2k^2\Phi}{3aH} - \frac{3aH\mathrm{i}\dot{v}}{k} + \frac{3a^2H^2\mathrm{i}v}{2k} + \mathrm{i}kv = 0. \tag{7.36}$$

我们现在有两个关于 Φ 和 v 的一阶方程, 下面将这两个方程变换为关于 Φ 的一个二阶方程. 首先, 利用速度方程消去 (7.36) 式中的 $\dot{v}$, 得到

$$\frac{2k^2\dot{\Phi}}{3a^2H^2} + \left[\frac{\mathrm{i}v}{k} + \frac{2\Phi}{3aH}\right]\left(\frac{9a^2H^2}{2} + k^2\right) = 0. \tag{7.37}$$

如果这个二阶方程的形式为 $\alpha\ddot{\Phi} + \beta\dot{\Phi} = 0$, 也就是, 如果没有正比于 Φ 的项, 那么 $\Phi=$ 常数是方程的解. 因此我们把 (7.37) 式对 η 求导, 忽略所有正比于 $\dot{\Phi}$ 的导数项，只考虑正比于 Φ 的项. 利用 $(\mathrm{d}/\mathrm{d}\eta)\,(aH)^{-1} = 1/2$, 我们看到留下来的项为

$$\begin{aligned}&\left[\frac{\mathrm{i}\dot{v}}{k} + \frac{\Phi}{3}\right]\left(\frac{9a^2H^2}{2} + k^2\right) + \left[\frac{\mathrm{i}v}{k} + \frac{2\Phi}{3aH}\right]\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\eta}\frac{9a^2H^2}{2}\\ &= -\left[\frac{\mathrm{i}aHv}{k} + \frac{2\Phi}{3}\right](9a^2H^2 + k^2)\end{aligned} \tag{7.38}$$

其中再一次利用速度方程消去了 $\dot{v}$. 但 (7.37) 式告诉我们右边方括号里的项正比于 $\dot{\Phi}$. 因此常数势能是物质主导时期的一个解. 由于初始条件的限制, 所以常数势能是物质主导时期的唯一解.

只要宇宙是物质为主，势能就是常数. 在更晚的时期 (a >1/10), 宇宙可能变为由其他形式的能量 — 例如暗能量 — 或者可能性比较小的曲率. 若如此, 势能将会衰变. 但势能由增长函数描述 (7.5 节), 不会影响转移函数. 本节的主要结果是由 (7.3) 式定义的转移函数在宇宙以物质主导后进入视界的所有尺度上都趋于 1. 也就是说, 对所有的模式 $k \ll a_{\mathrm{eq}}H\,(a_{\mathrm{eq}})$(在辐射和物质密度相等时刻共动 Hubble 半径的倒数)，它等于 1. 读者将在练习 5 得到对应的尺度是

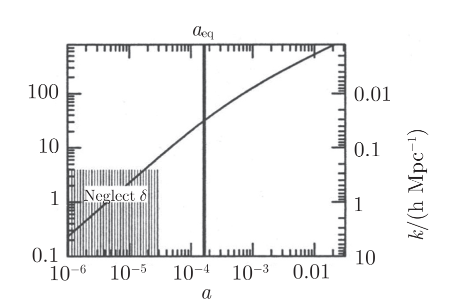
$$k_{\mathrm{eq}} = 0.073\mathrm{Mpc}^{-1}\Omega_m h^2. \tag{7.39}$$

在我们计算时的限制下, 重子物质和各向异性压力是忽略的, 转移函数仅依赖于 k/k_{eq}. 为了对本节的大尺度近似在什么时候是正确的有一个认识, 参见图 7.6, 其画出了 $\Omega_m = 1$ 和 $h = 0.5$ 的标准 CDM 模型. 对于标注为 10^{-2} 的曲线, 转移函

数比 1 (0.84/0.9) 低 7%. 对于那个模式, $k/k_{\mathrm{eq}} = 0.01/(0.073h) = 0.27$, 因此, 如果我们对转移函数达到 10%的精度感兴趣, 那么我们可以使用 $k \leqslant k_{\mathrm{eq}}/3$ 的大尺度近似.

7.3　小尺度的非均匀性

在上一节我们能够得到大尺度扰动的演化解是因为这些模式在辐射物质相等时刻之后很久才进入视界. 因此, 问题简单分为两部分: (i) 超视界模式穿越辐射物质相等时刻, 和 (ii) 物质主导时期的模式穿越视界. 相反的情况对应于本节中考虑的小尺度模式. 当宇宙处于绝对辐射时期时它们穿越视界. 因此, 问题分为 (i) 辐射阶段的模式穿越视界, 然后 (ii) 亚视界模式穿越辐射物质相等时刻. 在 7.3.1 节处理步骤 (i),7.3.2 节处理步骤 (ii). 注意我们不能够得到辐射物质相等时刻左右进入视界的模式的解析解.



7.3.1　小尺度穿越视界

当宇宙以辐射为主时, 势能由辐射的扰动决定. 暗物质扰动 — 本节我们感兴趣的扰动 – 会受势能影响, 而不是它们本身影响势能, 正如图 7.7 描述的情况. 因此, 为了解决这个时期的物质扰动存在两步困难. 第一, 我们必须求解关于 $\Theta_{r,0}, \Theta_{r,1}$, 和 Φ 的耦合方程. 然后, 将势能视为外部驱动力求解物质演化方程.

图 7.7　辐射时期扰动的耦合. 辐射扰动和引力势能相互影响. 物质扰动不影响势能, 但由它导出

为了求解辐射主导时的势能, 我们采用 (7.16) 式. 忽略物质项, 有

$$\Phi = \frac{6a^2H^2}{k^2}\left[\Theta_{r,0} + \frac{3aH}{k}\Theta_{r,1}\right] \tag{7.40}$$

由于辐射时期 $H^2 = 8\pi G\rho_r/3$, 同样辐射时期也有 $aH = 1/\eta$. 利用这个事实, 我们能够使用爱因斯坦方程 (7.40) 式将两个辐射方程 (7.11) 式和 (7.12) 式中的 $\Theta_{r,0}$ 消

掉. 这两个方程变为

$$-\frac{3}{k\eta}\dot{\Theta}_{r,1}+k\Theta_{r,1}\left[1+\frac{3}{k^2\eta^2}\right]=-\dot{\Phi}\left[1+\frac{k^2\eta^2}{6}\right]-\Phi\frac{k^2\eta^2}{3} \tag{7.41}$$

$$\dot{\Theta}_{r,1}+\frac{1}{\eta}\Theta_{r,1}=\frac{-k}{3}\Phi\left[1-\frac{k^2\eta^2}{6}\right] \tag{7.42}$$

我们可以将这两个关于 $\Theta_{r,1}$, 和 Φ 的一阶方程转换为一个关于势能的二阶方程. 利用 (7.42) 式消掉第一个方程的 $\dot{\Theta}_{r,1}$ 得到

$$\dot{\Phi}+\frac{1}{\eta}\Phi=\frac{-6}{k\eta^2}\Theta_{r,1}. \tag{7.43}$$

现在我们得到一个只含势能项及其一阶导数项的关于 $\Theta_{r,1}$ 的表达式. 我们通过微分得到关于 Φ 的一个二阶方程. 当我们计算时, 将遇到正比于 $\Theta_{r,1}$ 及其导数的项. 每一项都可以通过 (7.42) 式和 (7.43) 式消除. 最终的二阶方程是

$$\ddot{\Phi}+\frac{4}{\eta}\dot{\Phi}+\frac{k^2}{3}\Phi=0. \tag{7.44}$$

为了确定辐射主导时期势能的演化方式, 我们必须求解满足初始条件 Φ 为常数的方程 (7.44) 式. 通过定义 $u\equiv\Phi\eta$, 能够得到解析解. 因此,(7.44) 式变为

$$\ddot{u}+\frac{2}{\eta}\dot{u}+\left(\frac{k^2}{3}-\frac{2}{\eta^2}\right)u=0. \tag{7.45}$$

这是一阶球 Bessel 方程 (见 (C.13) 式), 解为 $j_1\left(k\eta/\sqrt{3}\right)$——球 Bessel 函数, 和 $n_1\left(k\eta/\sqrt{3}\right)$——球 Neumann 函数. 随着 η 变得很小, 后一项开始显著, 因此我们在初始条件的基础上忽略它. 一阶球 Bessel 函数能够表达为三角函数 ((C.14) 式) 的形式, 因此

$$\Phi=3\Phi_{\rm p}\left(\frac{\sin(k\eta/\sqrt{3})-(k\eta/\sqrt{3})\cos(k\eta/\sqrt{3})}{(k\eta/\sqrt{3})^3}\right) \tag{7.46}$$

其中 $\Phi_{\rm p}$ 是 Φ 的初始值. 前面因子 3 的出现是因为当 $\eta\to 0$ 圆括号中表达式的极限为 $1/3$.

(7.46) 式告诉我们, 只要在辐射主导时期的一个模式进入视界, 它的势能就开始衰减. 衰减之后, 势能开始振荡, 如图 7.8 所示. 定性地, 我们已经预期了许多. 从关于 (7.1) 式的定性讨论, 当在辐射主导时期压力很大的时候, 扰动将即时振荡. 如果主成分 (这里指辐射) 带来的扰动没有增长, 那么在一个指数膨胀的宇宙中, 势能将会简单地因为零阶密度稀释而衰减. 这是在 (7.40) 式中的证据, 它表明 (忽略位于视界内的偶极矩)$\Phi\simeq\Theta_0/\eta^2$. 由于 Θ_0 以固定的振幅振荡, 因此势能也会振荡,

但其振幅按 η^{-2} 衰减. 确实, 这是 (7.46) 式大 $k\eta$ 的精确极限. 势能的衰减与振荡如图 7.8 所示, 既包含 (7.46) 式的解析表达式, 也包含物质扰动的数值解. 注意这个近似的描述—其中物质对势能的影响忽略—只有当在绝对辐射阶段才成立. 对于 $k = 1\ h\ \mathrm{Mpc}^{-1}$ 模式的解析解已经开始在 $a \simeq 3 \times 10^{-5}$ 偏离精确解, 早在统一前 (这里, 采用 sCDM 模型作为说明, 在 $a \simeq 2 \times 10^{-4}$).

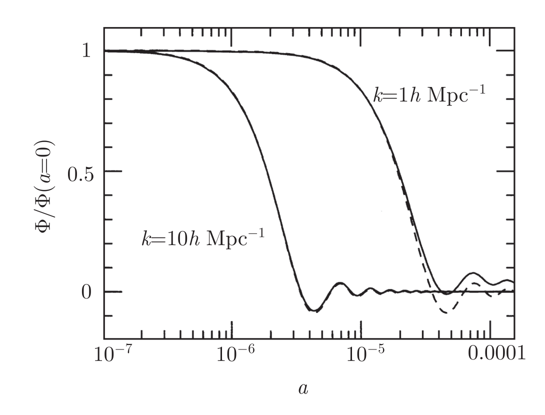


图 7.8 辐射主导时期势能的演化. 对于两个早在统一之前就进入视界的小尺度模式, 图中给出了精确解 (实线) 和 (7.46) 式的近似解析解 (虚线)

利用辐射主导时期势能的知识, 现在我们能够确定物质扰动的演化, 图 7.7 的第二半部分. 为此, 我们将两个物质演化方程—(7.13) 和 (7.14)—变换为一个以势能为外力的二阶方程. 对 (7.13) 式求微分，并用 (7.14) 式消去 $\dot{v}$

$$\ddot{\delta} + \mathrm{i}k\left(-\frac{\dot{a}}{a}v + \mathrm{i}k\Phi\right) = -3\ddot{\Phi}. \tag{7.47}$$

现在利用 (7.13) 式消去 v, 得到

$$\ddot{\delta} + \frac{1}{\eta}\dot{\delta} = S(k,\eta). \tag{7.48}$$

其中源函数项是

$$S(k,\eta) = -3\ddot{\Phi} + k^2\Phi - \frac{3}{\eta}\dot{\Phi}. \tag{7.49}$$

与 (7.48) 式相联系的齐次方程 ($S = 0$) 的两个解是 $\delta=$ 常数和 $\delta = \ln(a)$(或者, 等价地在辐射主导时期为 $\ln(\eta)$). 一般而言, 一个二阶方程的解是两个齐次方程的解的线性组合加一个特解. 在特解缺失的情况下, 可以通过两个齐次解 (称为 s_1 和 s_2) 和源函数项构建. 它是以 Green 函数 $[s_1(\eta)\,s_2(\eta') - s_1(\eta')\,s_2(\eta)]\,/\,[\dot{s}_1(\eta')\,s_2(\eta') -$

$s_1(\eta')\,\dot{s}_2(\eta')]$ 为权重的源函数项的积分. 因此这里我们得到

$$\delta(k,\eta) = C_1 + C_2\ln(\eta) - \int_0^\eta \mathrm{d}\eta' S(k,\eta')\eta'(\ln[k\eta'] - \ln[k\eta]). \tag{7.50}$$

在甚早期积分值很小, 因此我们的初始条件 (δ 常数) 要求 $\ln(\eta)$ 和 C_2 的系数为零且 $C_1 = \delta(k, \eta=0) = 3\Phi_p/2$. 现在考虑 (7.50) 式中的积分. 随着模式进入视界, 源函数将伴随着势能衰减到零, 因此, 对积分的主要贡献来自 $k\eta$ 为量级 1 的阶段. 故对 $S(\eta')\ln(k\eta')$ 的积分趋近为一些常数, 然而对 $S(\eta')\ln(k\eta)$ 的积分将得到一个正比于含有常数的 $\ln(k\eta)$ 项. 因此, 我们期望此模式进入视界后,

$$\delta(k,\eta) = A\Phi_{\mathrm{p}}\ln(Bk\eta), \tag{7.51}$$

即一个常数 ($A\Phi_p\ln(B)$) 加上一个对数增长模式 ($A\Phi_p\ln(k\eta)$).

通过参照 (7.50) 式的相关部分, 我们能够确定 (7.51) 式中的常数 A 和 B. 常数项 $A\Phi_p\ln(B)$ 等于 C_1 加上对 $\ln(\eta')$ 的积分, 或者

$$A\Phi_{\mathrm{p}}\ln(B) = \frac{3}{2}\Phi_p - \int_0^\infty \mathrm{d}\eta' S(k,\eta')\eta'\ln(k\eta'), \tag{7.52}$$

然而 $\ln(k\eta)$ 的系数由以下积分得到

$$A\Phi_{\mathrm{p}} = \int_0^\infty \mathrm{d}\eta' S(k,\eta')\eta'. \tag{7.53}$$

注意这里的两个积分, 已经设置积分上限为无穷以便与我们对 η 取很大值时积分趋近于常数的期望相一致. 利用源函数的表达式 (7.49) 和我们对势能的解析近似式 (7.46), 我们能够估计这里的积分并确定 A 和 B. 我得到 A=9.0 和 B=0.62. 曾经引入接下来对早期暗物质估计方法的 Hu 和 Sugiyama(1996) 发现对准确的势能 (代替 (7.46) 式的近似) 积分会得到一个略为不同的值,A=9.6 和 B=0.44.

图 7.9 画出了辐射时期 δ 的严格解和 (7.51) 式的近似解. 忽略力矩的详细信息, 我们看到物质扰动在辐射阶段确实增长了. 由于辐射压力, 物质时期 (7.2 节导出的常数势能表明 $\delta \propto a$) 的增长并不是主要的, 但它依旧存在. 对于图 7.9 所示的两种尺度, 一旦它们进入视界, 扰动确实会带来对数增长模式. 随着宇宙越来越接近物质主导, 辐射压力变得不是很重要了, 且扰动开始快速增长. 确实, 你也许会担心我们对于 $k = 1\ h\ \mathrm{Mpc}^{-1}$ 模式的近似并不是很有用的. 然而, 我们仅仅在设置亚视界时期增长的初始条件 (下一节) 时使用这些解, 因此仅需要对于一个非常有限的时间范围这个近似是正确的. 只要我们恰当地选择了匹配的时期, 对数近似将是非常好的.

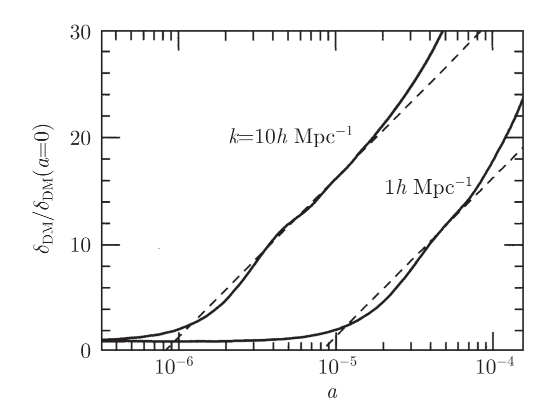
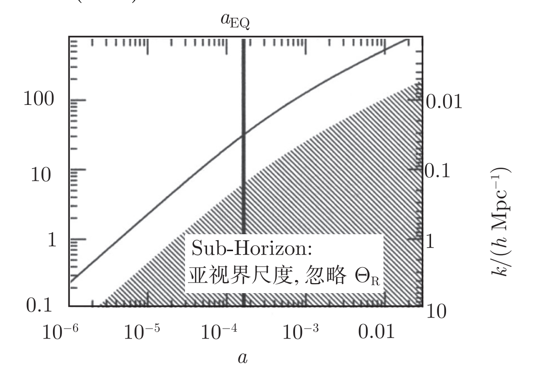


图 7.9 辐射主导时期的物质扰动. 两个尺度均为辐射时期进入视界，经过若干振荡后锁定在对数增长模式. 粗实线是精确解, 浅虚线是 (7.51) 式的对数模式. 利用它们的早期值, 这些扰动已经人为地归一化了：对于大尺度模式, 实际上暴胀预言了一个更大的初始振幅 (乘以一个因子 $10^{3/2}$)

7.3.2 小尺度亚视界的演化

上一节我们看到辐射时期随着模式进入视界, 辐射压引起引力势能衰减. 尽管我没有关注辐射本身的扰动 (我们将在下一章讨论), 读者也许会期望压力抑制了任何关于 $\Theta_{r,0}$ 的增长. 这是对的, 并且它与我们已看到的对数增长的物质扰动形成鲜明的对照. 尽管势能最初由辐射决定 (因为宇宙是辐射主导), 最终物质扰动的增长充分抵消了辐射多于物质的事实. 也就是, 即使 ρ_m 比 ρ_r 小, $\rho_{\rm dm}\delta$ 最终也比 $\rho_r\Theta_{r,0}$ 大. 一旦这种情况发生, 引力势能和暗物质扰动将一起演化, 并且不受辐射变化的影响. 本节我们想要求解支配物质和势能扰动的方程组, 并将它们与起源于势能衰减时期的对数解 (7.51) 相匹配.



我们的着手点依旧是支配暗物质演化的方程 (7.13) 式和 (7.14) 式, 以及关于引力势的代数方程 (7.16) 式. 我们再一次想将这三个方程 (其中两个是一阶微分方

程) 减少为一个二阶方程. 我们将要跟随亚视界的暗物质扰动穿越辐射与物质相等时刻, 因此使用 y—尺度因子与辐射物质相等时刻的比值—作为演化变量是较为方便的. 以 y 为变量, 三个方程变为

$$\delta' + \frac{\mathrm{i}kv}{aHy} = -3\Phi'\eta \tag{7.54}$$

$$v' + \frac{v}{y} = \frac{\mathrm{i}k\Phi}{aHy} \tag{7.55}$$

$$k^2\Phi = \frac{3y}{2(y+1)}a^2H^2\delta. \tag{7.56}$$

关于我们的基本方程的形式的一些评价顺次列于下. 第一, 注意前两个方程中的时间导数已经被对 y 的导数 (撇号表示) 替代, 并且这个变换得到位于未加撇号的分母中 $\dot{y} = aHy$ 的因子. 第二, 引力势仅仅表示为 δ 的函数: 由以上的讨论, 它与处于亚支配地位的辐射没有依赖关系, 由于扰动恰好位于视界内且 $aH/k \ll 1$, 故没有 aHv/k 的依赖. 第三, 由于我们对任何曲率或暗能量可忽略的早期阶段感兴趣, δ 源函数项的系数是 $4\pi G\rho_{\mathrm{dm}}a^2 \to (3/2)a^2H^2y/(y+1)$.

现在我们通过熟悉的方法将 (7.54) 式和 (7.55) 式转换为一个关于 δ 的二阶方程: 微分第一个方程得到

$$\delta'' - \frac{\mathrm{i}k(2+3y)v}{2aHy^2(1+y)} = -3\Phi'' + \frac{k^2\Phi}{a^2H^2y^2} \tag{7.57}$$

其中 v' 已通过速度方程消去, 同时使用了 $\mathrm{d}\left(1/aHy\right)/\mathrm{d}y = -\left(1+y\right)^{-1}\left(2aHy\right)^{-1}$. 方程右边的第一项远小于第二项, 由于后一项乘以了 $(k/aH)^2$, 并且我们关注的是亚视界模式. 利用 (7.56) 式, 我们得到第二项为 $3\delta/\left[2y\left(y+1\right)\right]$. 利用 (7.54) 式我们能改写左边的速度, 忽略在亚视界尺度上远小于 δ 的势能. 因此, $\mathrm{i}kv/\left(aHy\right)$ 可以很简单地由 $-\delta'$ 代替得到

$$\delta'' + \frac{2+3y}{2y(y+1)}\delta' - \frac{3}{2y(y+1)}\delta = 0. \tag{7.58}$$

这就是一旦辐射扰动变得可以忽略, 支配亚视界冷暗物质扰动演化的 Meszaros 方程.

为了理解暗物质扰动的增长, 我们需要得到 Meszaros 方程的两个独立解, 并将它们与前一节建立的对数模式相匹配. 为了求解这个微分方程, 我们可以使用处于绝对物质阶段的解的知识. 我们知道物质阶段亚视界的扰动随尺度因子增长, 因此 (7.58) 式的一个解是 y 的一阶多项式. 故至少对于一种模式, δ'' 被消去. 因此, 支

配这一个模式, 即增长模式[1]的方程是 $D_1'/D_1 = 3/(2+3y)$, 解是

$$D_1(y) = y + 2/3. \tag{7.59}$$

为找到第二个解, 注意 Meszaros 方程告诉我们 $u \equiv \delta/D_1$ 满足

$$(1+3y/2)u'' + \frac{u'}{y(y+1)}[(21/4)y^2 + 3y + 1] = 0. \tag{7.60}$$

由于没有正比于 u 的项,(7.60) 式实际上是关于 u' 的一阶方程[2]. 因此我们能够积分来获得 u' 的解, 然后再一次积分得到第二个 Meszaros 方程解. 第一次积分给出

$$u' \propto (y+2/3)^{-2}y^{-1}(y+1)^{-1/2}. \tag{7.61}$$

再一次积分得到 Meszaros 方程的第二个解

$$D_2(y) = D_1(y)\ln\left[\frac{\sqrt{1+y}+1}{\sqrt{1+y}-1}\right] - 2\sqrt{1+y}. \tag{7.62}$$

在晚期 $(y \gg 1)$, 增长解 D_1 随 y 增长, 而衰减模式 D_2 随 $y^{-3/2}$ 下降.

因此,Meszaros 方程的一般解是

$$\delta(k,y) = C_1D_1(y) + C_2D_2(y), \quad y \gg y_H. \tag{7.63}$$

其中 y_H 是模式进入视界时被在辐射和物质相等时刻尺度因子除后的尺度因子 (练习 6). 为了确定常数 C_1 和 C_2 我们可以与方程 (7.51) 的对数解相对照. 那个解在视界内但早于辐射物质相等时刻, 即 $y_H \ll y \ll 1$ 是正确的. 因此我们希望能获得一个仅当那些模式在辐射物质相等时刻之前进入视界的暗物质扰动演化的合理近似. 对于那些模式, 我们使这两个解和它们的一阶导数分别相等

$$\begin{aligned} A\Phi_{\mathrm{p}}\ln(By_m/y_H) &= C_1D_1(y_m) + C_2D_2(y_m) \\ \frac{A\Phi_{\mathrm{p}}}{y_m} &= C_1D_1'(y_m) + C_2D_2'(y_m) \end{aligned} \tag{7.64}$$

其中对应的时期 y_H 必须满足 $y_H \ll y \ll 1$. 注意我已经用 y/y_H 代替了 (7.51) 式中的对数 $k\eta$, 当处于绝对辐射阶段成立. 图 7.10 显示了两种模式对系数由 (7.64) 式得到的匹配条件确定的 Meszaros 方程解析解的演化. 这并不奇怪, 对于大的尺度模式而言，相比显示的结果此近似失效.

[1] D_1 是 7.1 节中提到的增长函数，注意在本节中，我们假设宇宙仅由物质主导，不含曲率或暗能量. 因此，增长函数的表达式仅当 $a \leqslant 0.1$ 时有效. 晚期一般化的结果参见 7.5 节.

[2] D_1 是已知微分方程的第一个解，求第二个解的一般方法. 在后面求解增长因子的时候我们还会用到这一方法.

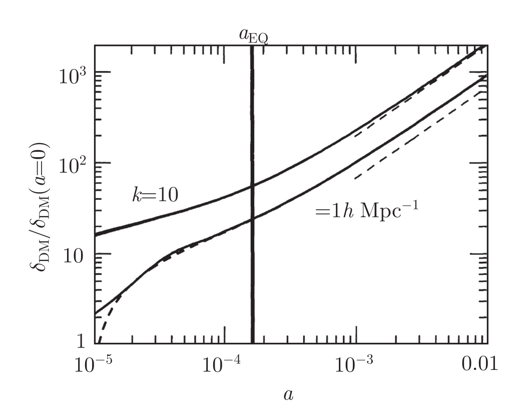


图 7.10 小尺度、亚视界、暗物质扰动的演化. 实线是精确解; 虚线 (在 $10h\text{Mpc}^{-1}$ 情况下拟合得好得令人难以置信) 是由匹配条件给定系数的 Meszaros 方程 (7.64) 式的解. 虚直线是 (7.67) 式在 $a > 10^{-3}$ 时的渐近解

7.4 数值解和拟合

在 7.2 节和 7.3 节中, 我们导出了满足处于绝对物质阶段暗物质扰动的解析解. 这里, 我们采用这些结果并对它们进行样条插值构建转移函数. 而且, 我将介绍一个关于转移函数的著名拟合函数.

首先, 我们需要将 (7.63) 式和描述小尺度物质密度的方程 (7.64) 式变换为转移函数的表达式. 转移函数由辐射物质相等后很久衰减模式已经消掉时的 δ 决定. 我们可以在 $a \gg a_{\rm eq}$ 的极限下选取形式更简单的 δ. 这种情况下的关键常数是增长模式的系数 C_1.(7.64) 式中的第一个匹配条件乘以 D_2', 第二个乘以 D_2, 然后相减得到

$$C_1 = \frac{D_2'(y_m)A\ln(By_m/y_H) - D_2(y_m)(A/y_m)}{D_1(y_m)D_2'(y_m) - D_1'(y_m)D_2(y_m)}\Phi_{\rm p}. \tag{7.65}$$

分母 $D_1D_2' - D_1'D_2 = -(4/9)\,y_m^{-1}\,(y_m+1)^{-1/2}$, 由于 $y_m \ll 1$, 其近似等于 $-4/9y_m$. 同样对于 y_m 取较小值的情况, $D_2 \to (2/3)\ln(4/y) - 2$ 且 $D_2' \to -2/3y$. 因此

$$C_1 \to \frac{-9A\Phi_{\rm p}}{4}\left[\frac{-2}{3}\ln(By_m/y_H) - (2/3)\ln(4/y_m) + 2\right], \tag{7.66}$$

意外的是它不依赖于 y_m. 因此, 在晚期我们得到一个小尺度暗物质扰动的近似解

$$\delta(\vec{k},a) = \frac{3A\Phi_{\rm p}(\vec{k})}{2}\ln\left[\frac{4Be^{-3}a_{\rm eq}}{a_H}\right]D_1(a), \quad a \gg a_{\rm eq}. \tag{7.67}$$

在非常小的尺度, 由于 $a_{\mathrm{eq}}/a_H = \sqrt{2}k/k_{\mathrm{eq}}$, 对数项可以简化 (练习 6). 为了将 (7.67) 式转换到转移函数, 我们需要知道 δ 与 Φ_p 的关系. 通过对比 (7.8) 式与 (7.67) 式得到一个小尺度上的转移函数的解析表达式

$$T(k) = \frac{5A\Omega_m H_0^2}{2k^2 a_{\mathrm{eq}}} \ln\left[\frac{4Be^{-3}\sqrt{2}k}{k_{\mathrm{eq}}}\right], \quad k \gg k_{\mathrm{eq}}. \tag{7.68}$$

回忆在物质与辐射相等时刻进入视界的波数, 定义为 $k_{\mathrm{eq}} \equiv a_{\mathrm{eq}} H\left(a_{\mathrm{eq}}\right) = \sqrt{2} H_0 a_{\mathrm{eq}}^{-1/2}$, 因此前面的因子也仅仅是 k/k_{eq} 的函数. 代入数值得到

$$T(k) = \frac{12k_{\mathrm{eq}}^2}{k^2} \ln\left[\frac{k}{8k_{\mathrm{eq}}}\right], \quad k \gg k_{\mathrm{eq}}. \tag{7.69}$$

图 7.11 展示了标准 CDM 模型 ($n = 1; h = 0.5$, 没有重子物质) 匹配大尺度转移函数 ($T = 1$) 和 (7.69) 式的小尺度转移函数的功率谱; 也画出了精确解 (同样是没有重子物质的情况), 或者等价地, Bardeen, Bond, Kaiser, 和 Szalay(1986,BBKS) 的拟合形式

$$T(x \equiv k/k_{\mathrm{eq}}) = \frac{\ln[1 + 0.171x]}{(0.171x)}[1 + 0.284x + (1.18x)^2 + (0.399x)^3 + (0.490x)^4]^{-0.25}. \tag{7.70}$$

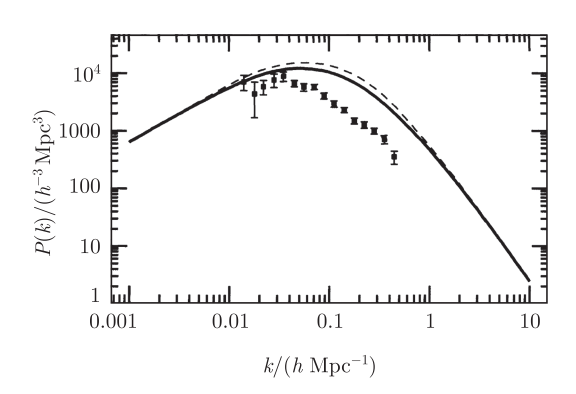


图 7.11 标准 CDM 模型的功率谱和 Harrison-Zel'dovich-Peebles 功率谱. 粗实线使用 BBKS 转移函数; 虚线是大尺度 (等于 1) 和小尺度 ((7.68) 式) 解析转移函数的插值. 数据点 (和插值点) 由 Peacock 和 Dodds(1994) 汇编

注意 BBKS 形式与小尺度的解析解吻合得很好, 即两者都以相同的系数渐近到 $\ln(k)/k^2$. 由于波数以 h Mpc^{-1} 为单位测量, k/k_{eq} 的比值依赖于 $\Omega_m h$. 故定义

$\Gamma \equiv \Omega_m h$, BBKS 转移函数也能够写为

$$T(q \equiv k/\Gamma h \text{ Mpc}^{-1}) = \frac{\ln[1+2.34q]}{(2.34q)}[1+3.89q+(16.2q)^2+(5.47q)^3+(6.71q)^4]^{-0.25}. \tag{7.71}$$

最后列出一些评论. 第一, 我们的解析计算是我们能够理解功率谱的渐近的、小尺度行为的起源. 辐射时期已经没有对数增长, 极早期进入的模式将不会从视界进入直到辐射与物质相等时刻经历增长. 相对于大尺度模式, 它们的振幅已经被一个 $(k_{\rm eq}/k)^2$ 量级的因子抑制. 而辐射时期的对数增长模式一定程度上改善了这个抑制. 第二, 尽管我们的解析表达式和 BBKS 是很好的近似, 但是意识到一些实际当中影响转移函数的小的效应是重要的. 我们已经假设没有各向异性压力 $(\Phi = -\Psi)$. 抛开这个假设会改变 9/10 的因子，大尺度模式的势能也因此而降至 0.86, 从而导致对应的小尺度转移函数的增长. 我们将在 7.6 节对其进行处理. 第三, 本节所有的计算是关于转移函数的, 即关于早期当宇宙的组成只有物质和辐射时的扰动的演化. 在极晚期, 增长函数依赖于其他的假设成分, 其中最可能的是暗能量. 最后, 图 7.11 中的理论功率谱已经归一化, 通过大尺度的 CMB 各向异性观测 (更多见第 8 章) 固定 (7.8) 式中的 δ. 我们看到 (i) 大尺度的归一化大致是正确的, 并且 (ii) 标准 CDM 功率谱的形状是错误的. 在相对小的尺度, sCDM 功率谱反转, 这与数据明显不吻合. 我们观测到的宇宙比 sCDM 表现出更小的 $k_{\rm eq}$. 这个观测激发了对 sCDM 变化的考虑; 我们将在 7.6 节考虑这些.

7.5 增长函数

晚期 $(z \lesssim 10)$ 所有感兴趣的模式已经进入视界. 你也许会想, 描述物质时期亚视界模式的 Meszaros 方程在 $y \gg 1$ 的限制下将得到应用. 如果 $\Omega_m = 1$ 这是正确的. 如果晚期宇宙的能量组成是另一项—暗能量或者曲率—我们必须重新推导 Meszaros 方程. 在此之前, 我想指出的是无论今天的能量组成是什么, 所有模式将共享相同的增长因子. 上一节已经看到, Meszaros 方程是独立于 k 的. 当我们生成考虑其他能量形式的 Meszaros 方程时很快将再次看到这种情况. 均匀的增长是冷暗物质压力为零的直接结果. 因此, 一旦一个模式进入视界, 没有压力来平滑掉不均匀性, 所有模式同样地演化.

我们想要导出一个像 Meszaros 方程一样的演化方程, 但允许除了物质和辐射以外的能量存在的可能. 我们可以利用 $y \gg 1$ 极限下的方程 (7.54)～(7.56), 但我们必须重新考虑 Poisson 方程中源函数的系数. 由于辐射可以忽略, 此系数乘以方程 (7.56) 中的 δ 是 $4\pi G\rho_{\rm dm} = (3/2)\, H_0^2 \Omega_m a^{-3}$. 之前微分方程 (7.54) 时, 我们也设定 $(1/aHy)' = -\,(1+y)^{-1}\,(2aHy)^{-1}$; 这里我们需要考虑对 H' 的其他贡献, 因此方程

(7.57) 变为

$$\delta'' + \mathrm{i}kv\left(\frac{\mathrm{d}(aHy)^{-1}}{\mathrm{d}y} - \frac{1}{aHy^2}\right) = \frac{3\Omega_m H_0^2}{2y^3a^2H^2a_{\mathrm{eq}}}\delta. \tag{7.72}$$

利用前面的连续性方程代替速度项导出

$$\frac{\mathrm{d}^2\delta}{\mathrm{d}a^2} + \left(\frac{\mathrm{d}\ln(H)}{\mathrm{d}a} + \frac{3}{a}\right)\frac{\mathrm{d}\delta}{\mathrm{d}a} - \frac{3\Omega_m H_0^2}{2a^5H^2}\delta = 0. \tag{7.73}$$

这里我除以了 a_{eq}^2, 并且我们现在使用 a 代替 y 作为变量. 在 y 取很大值的情况下, 所有 a_{eq} 的因子为零.

(7.73) 式有两个解. 一个解是 $\delta \propto H$. 如果所有的能量是非相对论性的, 这将很容易检验, 因此这个解正比于 $a^{-3/2}$. 然后所有三项随 $a^{-7/2}$ 变化, 第一个系数是 15/4, 第二个是 $-9/4$, 最后一个是 3/2. 它们的和确实抵消了. 在练习 7 中, 要求读者证明如果宇宙中存在其他能量成分，$\delta \propto H$ 是一个解. 这个结果很漂亮, 但由于几乎目前所有的宇宙学模型都有一个非增长的 Hubble 率, 因此它并不是我们想要的结果. 我们感兴趣的模式是那些视界过渡区后长期保持的增长模式. 所以我们对 (7.73) 式的另一个解感兴趣.

为了获得这个增长模式, 我们尝试 $u = \delta/H$ 的解的形式. 然后 u 的演化方程变为

$$\frac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}a^2} + 3\left[\frac{\mathrm{d}\ln(H)}{\mathrm{d}a} + \frac{1}{a}\right]\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}a} = 0. \tag{7.74}$$

这个 u' 的一阶方程能够由积分得到

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}a} \propto (aH)^{-3}. \tag{7.75}$$

再一次积分并记住第二个解, 即增长因子是 uH, 将得到增长因子的一个表达式

$$D_1(a) \propto H(a)\int^a \frac{\mathrm{d}a'}{(a'H(a'))^3}. \tag{7.76}$$

我忽略了比例常数. 这由方程 (7.4) 的定义确定, 也就是说, 早在物质仍主导 (比如说 $z \simeq 10$) 的时候, D_1 应等于 a. 在那些时期 $H = H_0\Omega_m^{1/2}a^{-3/2}$, 因此, 增长因子是

$$D_1(a) = \frac{5\Omega_m}{2}\frac{H(a)}{H_0}\int_0^a \frac{\mathrm{d}a'}{(a'H(a')/H_0)^3}. \tag{7.77}$$

在没有暗能量的开放宇宙中增长因子能够解析计算 (见练习 8).

图 7.12 展示了三种不同宇宙模型的增长因子. 如以上所说, 如果宇宙是平坦的、物质为主的, 增长因子简单地等于尺度因子. 然而, 在开放和暗能量的宇宙中, 增长在晚期受到抑制. 这导致一个重要的定性结论：在开放或暗能量宇宙中, 结构比平坦、物质主导的宇宙发展更早. 如果宇宙是开放或暗能量主导的, 目前时期的

演化相对较少. 因此, 无论今天观测到的结构如何, 它与极早期是极为相似的. 我们将在 9.5 节看到一些量化的影响.

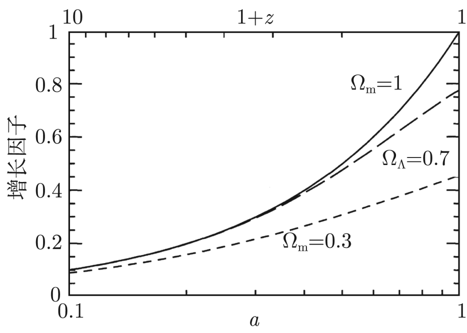


图 7.12　三种宇宙学模型的增长因子. 顶部的两条曲线分别是不包含和包含宇宙学常数的平坦宇宙. 底部的曲线代表开放的宇宙

7.6　冷暗物质之外

除了暗物质外宇宙有更多成分. 尽管大部分宇宙学模型中 CDM 是主要成分, 使得我们前面导出的转移函数对实际有很好的近似, 但仍有少量的其他组成. 为了完全精确我们需要考虑这些其他组成. 这里我们主要讨论三种额外成分. 第一, 我们考虑重子物质对转移函数的影响, 在大部分模型中它大致占总物质的 10%. 然后, 我们考虑中微子存在质量的可能并检验其对转移函数带来的影响. 最后, 考虑暗能量——宇宙学常数的一个模型.

图 7.13 展示了考虑这些成分的转移函数. 在小尺度实际的重子物质成分抑制

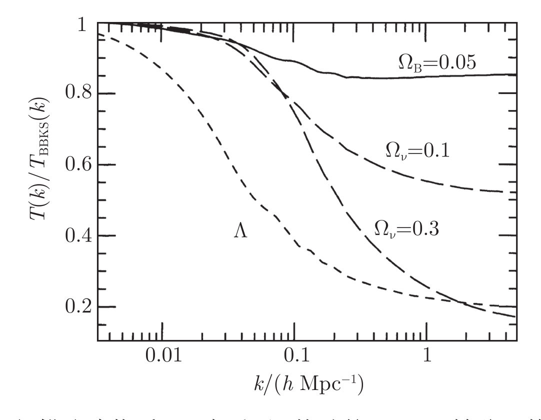


图 7.13　转移函数与仅描述暗物质 (没有重子) 扰动的 BBKS 转移函数 ((7.70) 式) 的比值. 顶部的曲线 (和其他曲线) 含有 5%的重子, 中间的两条曲线展示了大质量中微子取不同值的情况, 底部曲线的宇宙学常数 $\Omega_\Lambda = 0.7$

了转移函数. 大质量中微子同样如此, 抑制的本质和振幅依赖于中微子质量. 暗能量, 这里是宇宙学常数的形式, 从辐射与物质相等时刻运动到晚期, 因此减小了 $k_{\rm eq}$. 故比起标准 CDM, 转移函数的偏离来自更大的尺度, 显然与图 7.11 展示的数据吻合.

7.6.1 重子物质

重子物质大约占据了宇宙总能量密度的 4%. 正因为如此, 它们对物质功率谱的影响是很小的. 仔细检查图 7.13 揭露出非零重子物质密度的两个特征. 第一个是功率谱在小尺度上被抑制. 这并不奇怪: 在早期退耦之前, 重子与光子紧密耦合. 因此, 当进入视界时随着辐射扰动的衰减, 重子物质密度增大. 退耦之后, 重子从相对平滑的辐射场中释放出来, 并落入由暗物质引起的引力势中. 这些势阱的深度比我们在 7.3 节中估计的要小, 因为仅仅总物质的一小部分 $\Omega_{\rm cdm}/\Omega_m$ 包含在坍缩中.

图 7.13 中的第二个影响是不明显的, 且确实可能不能在实际中得到测量. 然而, 只要因为它暗含在辐射场的基本属性里, 就是极其重要的. 除了 $\Omega_\nu = 0.3$ 的情况, 在图 7.13 的所有曲线中, 你能看到转移函数围绕中心 $k \simeq 0.1\ h\ {\rm Mpc}^{-1}$ 小幅振荡. 这不是人为的数值影响, 而是退耦之前复合的重子/光子流碰撞的结果. 在 7.3.2 节当我们考虑辐射为主时期的势能时对此做了简单描述. 正是这个时期势能的振荡, 使得重子/光子流也产生振荡. 这些振荡的踪迹记录在了物质转移函数中. 由于重子是总物质中如此小的一部分, 它们几乎是 (可能完全) 不能探测的. 图 1.13 画出的仅含重子的模型, 振荡是更加显著的[①], 并且这些振荡在辐射扰动的功率中也是突出的, 正如我们下一章所见.

7.6.2 大质量中微子

已知中微子是存在的, 并且标准大爆炸模型对其在宇宙中的含量给出了明确的预言 ((2.77) 式). 大质量中微子可能在结构形成中扮演着重要角色. 相反, 功率谱的精确测量也许使我们能够推断出中微子的质量. 为认识这一点, 回忆零质量 ((2.78) 式) 和大质量 ((2.80) 式) 中微子能量密度的差异. 来自实验的最佳预测是最大质量中微子的质量约 0.05eV, 因而贡献的 $\Omega_\nu \simeq 10^{-3}$. 如果功率谱能足够精确的测量, 这个微小的量也许最终是可以探测的. 也存在一种或多种中微子有大质量 (见 46 页: 请编辑定稿后最后确定页码脚注) 的可能性. 目前从结构形成得到的上限在 2eV 左右 (Elgaroy et al, 2002).

即使有一小部分的大质量中微子—尤其当它们是光时—都会影响功率谱的原因是中微子的运动速度很快 (它们不是冷暗物质) 并流出高密度区. 因此比这个自

① 我们现在也知道了为什么图 1.13 中只有重子物质的宇宙的功率较低: 这是因为没有在再复合之前就可以成团的暗物质.

由流动尺度小的尺度的扰动是受到抑制的. 的确, 很久以前, 宇宙学家考虑过宇宙中所有的暗物质都是中微子的可能性. 若确实如此, 那么小尺度上将不会有能量, 结构将 "自上而下" 形成.

通过计算大质量中微子在辐射物质相等时刻运动一个 Hubble 时间的共动距离, 我们能够估计扰动在多大尺度上被抑制. 然而, 如果中微子的质量在 eV 的范围, 那么这个计算是不重要的. 如此, 平均速度 T_ν/m_ν 在辐射物质相等时刻是同量级. 因而中微子能够从在统一时期的视界尺度扰动自由流出. 这导致所有小于 $k_{\rm eq}$ 尺度的功率受到抑制.

图 7.13 展示了这种抑制. 然而注意到这个影响是很微小的. 一个更轻的中微子能够从大尺度自由流出, 因此相比于 $\Omega_\nu = 0.3$ 的情况, 对于 $\Omega_\nu = 0.1$ 抑制将始于更低的 k. 另一方面, 越大质量的中微子在总密度中组成越多, 因此它对小尺度功率的抑制大于轻的中微子的作用.

7.6.3　暗能量

除了本章中我们花费大量时间讨论的暗物质外, 宇宙学家目前已经积累了宇宙中暗能量的诱人证据. 如果暗能量存在, 那么它将怎样影响物质扰动?

暗能量的第一个影响是间接的. 由于理论结果和证据都表明宇宙是平坦的, $\Omega_{\rm de} \simeq 0.6 \sim 0.7$ 说明物质密度 Ω_m 小于 1. 这对功率谱有巨大影响, 因为我们已经看到功率谱在正比于 Ω_m 的 $k_{\rm eq}$ 处出现转折. 因此, 暗能量导致功率谱在远大于标准 CDM 预言的尺度上反转. 事实上, 如我们在图 7.11 所见, 这是暗能量存在的部分证据之一. 功率谱的反转没有出现在由标准 CDM 预言的尺度上.

第二个影响再次与大部分暗能量模型中的较小物质密度相关. 作为 Poisson 方程 (7.7) 式的一个结果, 对于固定的势能, 密度扰动反比于 Ω_m. 因此, 功率谱的振幅随物质减小而增加, 或者等价地在平坦宇宙中随暗能量增加而增加. 一些需要注意的地方将在第 8 章进行讨论, 大角度 CMB 各向异性固定了大尺度上的势能. 因此, 当归一化到这些大角度结果时, 会导致暗能量模型的功率谱比不含暗能量模型更高度归一化.

暗能量对密度不均匀性的第三个影响是更直接的且更加依赖模型. 在晚期, 扰动的振幅由 (7.77) 式的增长因子控制. Hubble 率的演化依赖暗能量模型, 因此不同的暗能量模型预言不同的增长因子. 如果我们通过状态方程 (2.84) 式参量化暗能量, 那么晚期平坦宇宙中的 Hubble 率的演化为

$$\frac{H(z)}{H_0} = \left[\frac{\Omega_m}{a^3} + \frac{\Omega_{\rm de}}{a^{3[1+w]}}\right]^{1/2} \tag{7.78}$$

利用这个时间依赖性, 可以直接计算 (7.77) 式的积分并得到给定状态方程的增长因子 (见练习 11).

总之, 暗能量通过改变 k_{eq} 和归一化 (这仅依赖于 Ω_{de}) 并通过改变晚期的增长因子 (依赖于 Ω_{de} 和 ω) 来影响功率谱. 因此, 对功率谱的仔细观测也许能够使我们了解暗能量.

推 荐 读 物

对本章来说*The Large Scale Structure of the Universe*仍是很有用的参考文献. 尽管由于它是在冷暗物质和暴胀被提出之前写的，所以它不像我们推导的那样包含转移函数或功率谱 (Peebles 在本书发表几年后也很擅长计算这些). 一本更新的书*Structure Formation in the Universe*(Padmanabhan) 特别介绍了大尺度结构.

最早关于 CDM 转移函数的文章是非常有启发性的，尤其是因为它们还关注系统理论的物理意义, 参见文献 (Blumenthal et al., 1984); (Peebles, 1982). 近期最重要的文章是 Seljak 和 Zaldarriaga(1996) 的作品, 不是因为它包含对需要求解的解耦合方程的简单描述，而是因为计算转移函数和 CMB 各向异性谱的代码 CMBFAST, 代码可以参见网站：http://physics.nyu.edu/matiasz/CMBFAST/cmbfast.html. 本章中介绍的方法最接近 Hu 和 Sugiyama (1996) 的小尺度解析解，这篇文章非常值得一读. Eisenstein 和 Hu (1998) 采用小尺度解来推导精确的拟合公式，将 Bardeen, Bond, Kaiser, 和 Szalay (1986, BBKS) 的工作更深入了一步.

练　　习

1. 推导 (7.11) 式和 (7.12) 式.

(a) 首先忽略 (4.100) 式中的散射项，即正比于 $\dot{\tau}$ 的项. 然后光子演化方程与中微子演化方程 (4.107) 式一致证明无碰撞的方程减少到两个单极矩和偶极矩的方程. 为了得到单极矩的方程，用 $\mathrm{d}\mu$ 乘以 (4.107) 式并从 $\mu=-1$ 积分到 1. 为了得到偶极矩的方程，用 $\mathrm{d}\mu$ 乘以 (4.107) 式并积分.

(b) 证明在重子密度很小的极限下，(4.100) 式中的散射项可以忽略. 证明散射项正比于 R，3/4 倍的重子光子比. 可以利用 (4.106) 式. 再次强调这一系列近似仅在我们对物质分布感兴趣时有效.

2. 数值求解 (7.11)~(7.15) 式组成的方程组来得到暗物质的转移函数. 利用第 6 章得到的初始条件. 在利用 (7.15) 式数值求解的过程中，当你想计算到现在的值时，在小尺度上可能会出现问题. 光子力矩会很难追踪，即使一个求解微分方程的好手在晚期也会遇到障碍. 然而，对此我们有几个简便方法：(i) 对于方程中的晚期情况，势能是常数，因此不需要演化到现在，或是 (ii) 在一个特定时间后，我们不需要再追踪光子力矩，它们对于晚期的物质分布没有任何影响. 画出 sCDM 的转移函数 (哈勃常数取 $h=0.5$) 和 λCDM ($\Omega_\lambda=0.7$, $h=0.7$). 将它们与 BBKS 转移函数 (7.70) 式进行对比.

3. 7.2 节和 7.3 节中的四个小节对应于爱因斯坦–玻尔兹曼方程的四种近似. 在下表中，填出哪些区域对各种近似有效：

	$a \ll a_{\rm eq}$	$a \sim a_{\rm eq}$	$a \gg a_{\rm eq}$
$k\eta \ll 1$			
$k\eta \sim 1$			
$k\eta \gg 1$			

例如，对于 7.2.1 节中的超视界解，对于最上面一行都有效，因为 $k \to 0$. 注意，时间的演化是从左上到右下，因此没有近似在中间的方格区域有效意味着只有在辐射物质相等时刻很久之前或很久之后进入视界才能得到解析解.

4. 补充 7.2.1 节的一些计算细节.

(a) 证明由微分 (7.24) 式可以推出 (7.25) 式.

(b) 证明当 u 由 (7.26) 式定义时，(7.25) 式与 (7.27) 式等价.

(c) 证明 (7.31) 式中的积分可以通过 (7.32) 式的结果解析的计算出来. 可以定义 $x \equiv \sqrt{1+y}$ 来求解积分.

5. 找出辐射与物质相等时刻，与共动哈勃半径的倒数相等的模式的波数. 定义 $k_{\rm eq}$ 等于 $a_{\rm eq}H(a_{\rm eq})$, 证明该定义意味着

$$k_{\rm eq} = \sqrt{\frac{2\Omega_m H_0^2}{a_{\rm eq}}} \tag{7.79}$$

然后利用 (2.87) 式证明 $k_{\rm eq}$ 等于 (7.39) 式. 证明如果定义 $k_{\rm eq}$ 为 $1/y_{\rm eq}$, 得到的结果降低 17%.

6. 定义 a_H，即波数 k 等于共动哈勃半径对应的尺度因子, $a_H H$. 将 $a_H/a_{\rm eq}$ 以 k 和 $k_{\rm eq}$ 的形式表达出来. 证明在 $k \ll k_{\rm eq}$ 的极限下，表达式变成

$$\lim_{k \gg k_{\rm eq}} \frac{a_H}{a_{\rm eq}} = \frac{k_{\rm eq}}{\sqrt{2}k}. \tag{7.80}$$

7. 证明如果宇宙是平坦且含有宇宙学常数的，那么 $\delta \propto H$ 是演化方程 (7.73) 式的一个解. 你将会用到 (1.2) 式. 还需要证明这个解当宇宙学常数为零时有效，但此时宇宙是开放的，且 $\Omega_m < 1$.

8. 推导 $\Omega_m < 1$ 的开放宇宙的增长因子:

$$D_1(a, \Omega_m) = \frac{5\Omega_m}{2(1-\Omega_m)}\left[3\frac{\sqrt{1+x}}{x^{3/2}}\ln(\sqrt{1+x}-\sqrt{x}) + 1 + \frac{3}{x}\right] \tag{7.81}$$

其中 $x \equiv (1-\Omega_m)a/\Omega_m$. 这个问题有简便算法 (参见 *The Large Scale Structure of the Universe*，第十一节), 但是我发现可以定义变量 $y \equiv \Omega_m/a$, 将 (7.77) 式改写为

$$\int_{\Omega_m/a}^{\infty} \frac{{\rm d}y}{y^2(y+1-\Omega_m)^{3/2}} = 2\left[\frac{\rm d}{{\rm d}\varepsilon}\frac{\rm d}{{\rm d}\lambda}\int_{\Omega_m/a}^{\infty}\frac{{\rm d}y}{(y+\varepsilon)\sqrt{y+\lambda}}\right]_{\varepsilon=0,\lambda=1-\Omega_m} \tag{7.82}$$

然后利用来自 Gradshteyn 和 Ryzhik 的 2.246.

9. 计算一个特定尺度上的功率的一个普遍方法是计算半径为 R 的球中期望的均方根密度扰动. 证

$$\delta_R^2 \equiv \langle \delta_R^2(x) \rangle. \tag{7.83}$$

其中

$$\delta_R(\overrightarrow{x}) \equiv \int \mathrm{d}^3 x' \delta(\overrightarrow{x'}) W_R(\overrightarrow{x} - \overrightarrow{x'}) \tag{7.84}$$

W_R 是 tophat 窗函数，对于 $x < R$ 等于 1, 其他情况下等于 0; 尖括号表示对全空间求平均.

(a) 利用傅里叶变换，用功率谱的积分项表示 R.

(b) 利用 BBKS 转移函数计算标准 CDM 模型 ($h = 0.5, n = 1$, Ω_m=1) 下的 $\sigma_8(R = 8h^{-1}\mathrm{MPC})$. 在第 8 章中我们会看到，COBE 对这个模型的归一化结果是

$$\delta_H = 1.9 \times 10^{-5}. \tag{7.85}$$

得到的 σ_8 的值是模型的又一弊端. 对于星系来说,σ_8 是 1(或更小, 依赖于星系的类型). 对于 $\sigma_8 > 1$ 的模型，要求星系没有暗物质成团. 目前的星系形成模型认为这是不可能的. 有更直接的测量 σ_8 的方法 (如 9.5 节), 同样得到 σ_8 小于 1.

(c) 在相同的模型中, 画出 σ_R 随 R 变化的函数. 因为 σ_R 单调递增, 小尺度倾向于在大尺度之前变得非线性, 是分层模型的信号.

10. 将练习 9 的 σ 重新定义为

$$\sigma_R^2 = \int_0^\infty \frac{\mathrm{d}k}{k} \Delta^2(k) \tilde{W}_R^2(k), \tag{7.86}$$

其中,$\tilde{W}_R$ 是 tophat 窗函数的傅里叶变换,$\Delta^2 = \dfrac{\mathrm{d}\sigma^2}{\mathrm{d}\ln(k)}$ 是每 $\ln(k)$ 贡献的方差. 这么变换有用的地方是 Δ 大于 1 时的 k 值. 比这个尺度大的是线性，比这个尺度小的是非线性. 找出练习 9 中 sCDM 模型中的 k_{nl}.

11. 计算 $\Omega_{\mathrm{de}} = 0.7, \Omega_m = 0.3, w = 0.5$ 的宇宙的增长因子. 画出以 a 为函数的增长因子的图, 与宇宙学常数模型 ($w = -1$, 其他参量不变) 进行对比.

第8章　各向异性

暴胀期间的原初扰动不仅表现在辐射上, 在物质分布上也有所体现. 通过理解光子扰动的演化, 我们可以预言现在时刻 CMB 的各向异性的功率谱. 这种演化完全由爱因斯坦–玻尔兹曼方程 (详见 4、5 章) 决定, 一个可行的方法就是将前几章涉及的相关的公式在计算机上进行数值求解. 从历史角度而言，这是一个相当好的关于什么宇宙结构产生的“漫画”。远在我们试图深入了解各向异性的物理性质之前, 不同小组编写了计算不同模型功率谱的代码. 直到很晚我们才既定性又定量地理解各向异性功率谱为什们是这个样子①. 在本章中, 我将要简单地解释一下我们所学到的关于各向异性的物理知识.

再复合时期 (红移 z 约是 1100) 前后, 光子扰动的演化完全不同. 再复合之前, 光子和电子、质子耦合在一起, 可以用单流体 (被称作 “重子–光子” 流体) 描述它们. 再复合之后, 光子从 “最后散射面” 自由穿梭到现在被我们观测到. 本章第一部分 (8.1 节) 定性地解释各向异性的光谱. 8.2 节 ~8.4 节研究再复合之前的重子 - 光子流体的物理性质. 接着在 8.5 节和 8.6 节中分析了再复合之后的时期. 最后在 8.7 节讨论光谱是如何随着宇宙学参数的改变而改变的.

8.1　概　　要

让我们像上一章一样, 先来看一下结果. 图 8.1 描绘了光子扰动的演化, 展示了四个傅里叶模式在不同尺度上的扰动. 定性的说, 图 8.1 的最大特点是光子扰动一点儿也不随着时间增长. 这意味着和物质扰动完全不同. 这种对立不同是我们本应预料到的：光子的压力很大，可以抵抗坍缩的趋势. 这意味着暴胀期间产生的小扰动会维持在很小的尺度, 并且一直保持着线性, 直到现在.

在详细的研究不同模型演化之前, 应注意一个技术性的问题：我画出的不只是简单的光子的扰动，而是 $k^{3/2}(\Theta_0+\Psi)$. $k^{3/2}$ 因子用以平衡扰动振幅 (在简单的暴胀模型中)$k^{-3/2}$(乘以 $k^{3/2}$ 因子变为尺度无关). 引入引力势能 Ψ 是因为我们今天所看到的光子已经逃逸出了再复合时期的势阱. 当它们从这些势阱中逃出时, 它们的波长被延长 (如果这个区域密度过高并且引力势 $\Psi<0$) 导致能量降低. 因此我们今天所观测到的温度实际上是再复合时期的 Θ_0 加上 Ψ.

① 对各向异性的理解实际上有助于代码的编写. 最重要的例子就是很流行的 CMBFAST(Seljak and Zaldarriaga, 1996), 其中的一部分就是基于本章的解析解.

图 8.1 中的大尺度模式几乎不演化. 这并不奇怪：没有任何物理机制可以影响波长大于视界的扰动. 因此超视界的模式演化非常小. 这意味着当我们观测大尺度各向异性时, 这些各向异性敏感于其波长比再复合时期的视界更大的模型，我们其实是在观测最原始形式的扰动, 正如它们在暴胀时刻那样.

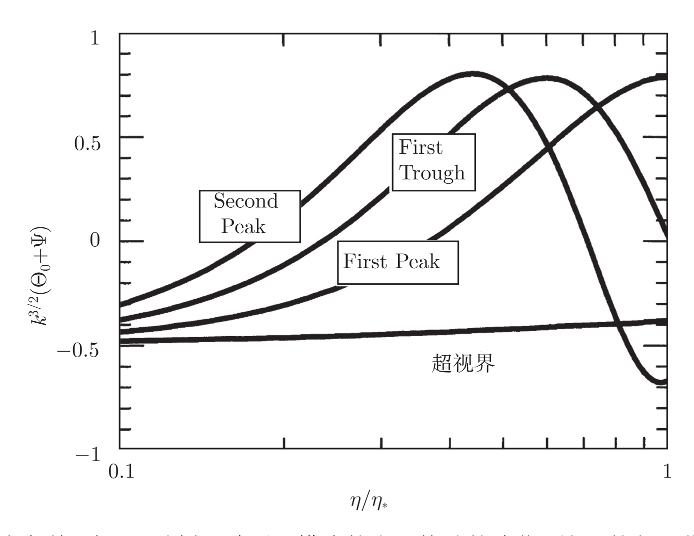


图 8.1　再复合之前, 在 η_* 时刻四种不同模式的光子扰动的演化. 这里的归一化是任意的, 但是四条曲线的相对归一满足 Harrison-Zel'dovich-Peebles 谱 $(n=1)$ 的扰动. 模型是标准 CDM 模型, $h=0.5, \Omega_m=1, \Omega_b=0.06$. 图中从左下向上, 波数依次是 $k=(7\times10^{-4}, 0.022, 0.034, 0.045)\mathrm{Mpc}^{-1}$ 或 $(8, 260, 400, 540)/\eta_0$

图 8.1 显示了小尺度模式比超视界模式的演化更加复杂. 首先看标着 “First Peak” 的曲线. 当这个模式进入视界后, 扰动开始增长直到在再复合时期达到最大值. 如果在这个模式上观测各向异性, 我们将期望看到很大的波动起伏. 因此图中标记：各向异性功率谱将会在对应于在再复合时期刚到达其峰值的模式的角尺度上有一个峰值.

图 8.1 中越早进入视界的模式越早到达峰值，也就越早地呈现下降趋势，因此在再复合时期的振幅为零. 到再复合之时, 它已经经历了半次振荡; 因此由于相对论性的光子压力, 我们会看到第一个重子声学振荡的清晰的信号. 这个模式的相位在再复合时期振幅为零. 因此, 当我们今天观测相对于这些尺度的各向异性时, 我们期望看到很小的波动. 在这些角尺度上, 各向异性谱会有一个波谷出现.

继续往下看. 标有 “Second Peak” 的曲线很早就进入视界并在再复合时期经历了一个完整的振荡. 正如这样, 这个模式将会有一个很大的扰动并会在各向异性谱中导致第二个峰值出现. 对于那些很早就进入视界线的模式, 你可能会期望在各向

异性谱中会有无穷多的波峰和波谷，而事实也的确如此.

在再复合时期, 从扰动谱上我们可以看得更清楚. 图 8.2 展示了两种不同模型的谱. 我们务必仔细地看看波峰和波谷的模式. 这个振动里有两个很重要的量化特点. 首先, 应注意到, 至少在重子含量较高的模型中, 峰值的高度看起来有所不同：奇数峰值看起来会比偶数峰值要高. 其次, 在重子含量较低的模型中, 小尺度 ($k\eta_0 \gtrsim 500$) 上的扰动是衰减的.

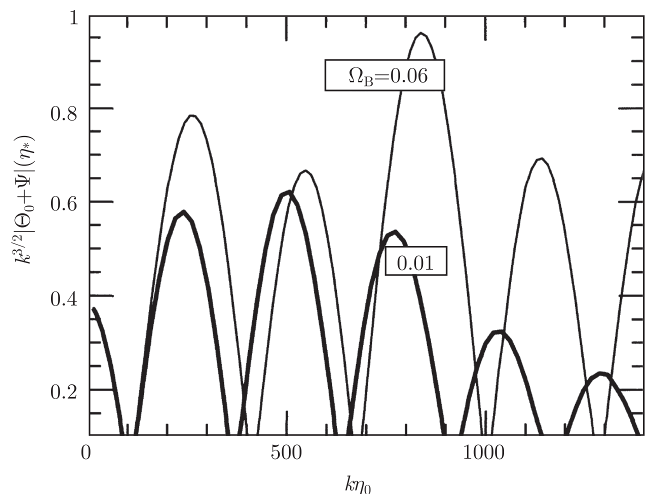


图 8.2　再复合时期两种模型中光子分布的扰动. 模式 $k > 500/\eta_0$ 的扰动的抑制显然证明了低重子密度模型在较大尺度上的衰减

为了理解第一个特点, 我们可以写出扰动方程. 可以写作

$$\ddot{\Theta}_0 + k^2 c_s^2 \Theta_0 = F \tag{8.1}$$

其中 F 是由引力引起的推动力, c_s 是在重子–光子混合流体中的声速. 这是一个强谐振子方程 (详见下页的 box). 定性的说, 它反映了我们上面所见的振动, 但它也解释了关于峰值高度的问题. 当我们往宇宙中添加更多的重子物质时, 声速将会下降 (重子很重所以它可以降低速度), 因此振荡频率也会降低. 在 $n\pi/\omega$ 处的峰值也被转移到更大的 k 处 (详见后面的 box), 所以峰值之间的空间也会相应变大. 另外, 当频率降低时, 奇数峰值和偶数峰值高度之间的不同也会变大. 这些特点可以清楚地在图 8.2 中看出. 另一个理解相互交替峰值高度的方法是要注意到第一峰值模式的扰动在进入视界时就开始增长了. 通过降低压力 (或是平等的增长引力的重要性) 这些模式将会增长得更多. 另一方面, 第二峰值模式相当于势阱中的低密度光子. 降低压力使得光子很难逃出势阱，因此会降低扰动的量级 (使它的密度更低).

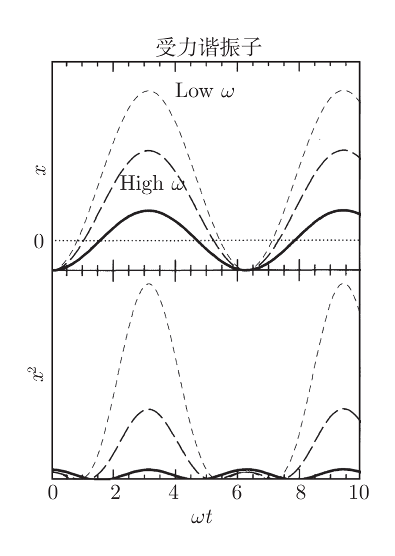
分析一个质量为 m，弹性系数为 k 的简谐振子. 除了回复力之外, 振子还受一个额外力 F_0. 因此总的阻力是 $F_0 - kx$, 其中 x 是振子的位置. 因此运动方程是

$$\ddot{x} + \frac{k}{m}x = \frac{F_0}{m}. \tag{8.2}$$

等式右边这一项—代表外力, 可以使得振子移动到 x 位置. 左边的回复力则使振子有向起始点靠近的趋势. 因此作用的结果是在零点附近有一个振动，振幅为 x.

(8.2) 式的解是齐次方程 ((8.2) 式右侧为 0) 的通解加上一个特解. 通解有两种形式, 可以用 ωt 的正弦和余弦很好地表示, 其中频率 ω 被定义为 $\omega \equiv \sqrt{k/m}$. (8.2) 式的特解是常数 $x = F_0/m\omega^2$, 因此全解是正弦和余弦加一个常数项. 让我们假设振子的初始条件是静止的. 因为 $\dot{x}(0)$ 正比于正弦项的系数, 所以此系数为零, 于是得到

$$x = A\cos(\omega t) + \frac{F_0}{m\omega^2}. \tag{8.3}$$



这个解在右图中被画出来. 实线是没有外力作用的解: 最原始的振动. 虚线是有外力时在两个不同频率上的解. 在这两种情况下, 振子不会像不受外力时那样在 $x = 0$ 附近振动. 一旦引入外力, 振子的零点位置将会在力的方向上发生移动. 画出的两条曲线显示出这个移动在低频率处会更加明显. 图中的下半部分显示了以时间为函数的振子位置的平方. 这三个振子都在 $t = n\pi/\omega$ 处经历了一系列的峰值, 对应着余弦的最大或最小值 (注意, 如果是正弦, 这些峰值将会出现在 $t = (2n+1)\pi/\omega$). 在不受外力的振动中, 这些峰值的高度都一样, 大小等于在 $t = 0$ 时刻的高度. 然而, 在有外力作用的情况下, 奇数峰的高度—在 $t = (2n+1)\pi/\omega$ 时刻—大于偶数峰的高度. 这个作用在低频时最明显. 如果频率很低, 外力会有更大的影响, 就会导致较大的零点偏离, 因此, 就会增大奇/偶峰间的差距. 这个例子的另一个特点是偶数峰对应着振子的负位置：指向外力作用的反方向.

为了理解图 8.2 中的衰减证据, 我们需要记住，光子、电子和重子被看作单流体仅仅是一个近似. 这种近似只有在电子对光子的散射率为无穷大时才成立. 当然这种条件是达不到的：光子在散射中穿行的距离是有限的. 图 8.3 描绘了单个光子在电子中穿行时的轨迹.$\lambda_{\rm MFP}$ 是每次散射间走过的平均距离. 在本书中, 这个距离

是 $(n_e\sigma_T)^{-1}$. 如果电子密度非常大, 则光子平均自由程就会很小. 在哈勃时间 H^{-1} 内，光子散射了 $n_e\sigma_T H^{-1}$ 次 (散射率和时间的乘积). 正如图 8.3 所描述的那样, 每次散射都会影响光子的随机运动. 我们知道在一次随机运动中, 总的穿行距离是平均自由程和总步数平方根的乘积. 因此, 一个宇宙学光子在一个哈勃时间内移动的平均距离是

$$\begin{aligned}\lambda_D &\sim \lambda_{\mathrm{MFP}}\sqrt{n_e\sigma_T H^{-1}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{n_e\sigma_T H}}\end{aligned} \tag{8.4}$$

小于 λ_D 尺度的任何扰动都会被抹平. 在傅里叶空间中, 这对应着所有较高 k 值的模式的衰减. 注意这个粗略的估计使得 Ω_b 依赖性正确. 重子物质密度小的模型的 λ_D 比较大 (因为当宇宙被电离时, n_e 正比于 Ω_b). 因此，衰减开始于大尺度上，对应于较小的 k 值, 正如我们在图 8.2 中所看到的.

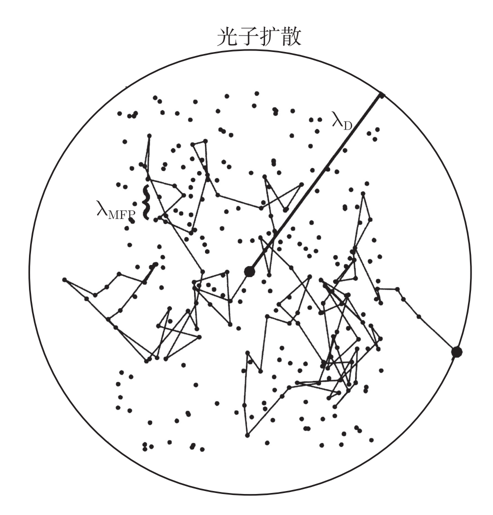


图 8.3　穿过电子气体的光子扩散. 每个点表示一个电子. 图中描绘的是典型的光子遇到电子散射后的轨迹. 平均自由程是 λ_{MFP}. 一个哈勃时间之后, 光子被散射很多次, 因此它会移动 λ_{D} 的距离

最后一步将再复合时期的扰动与我们今天所观测到的各向异性联系起来, 正如图 8.2 所描绘的那样. 这里的数学有一点复杂, 但是从物理角度非常直接. 考虑一个傅里叶模式, 一个平面波扰动. 图 8.4 展示了再复合时期一种模式的温度变化. 光子从相距 k^{-1} 的冷和热的地方传播到我们这里, 对应的张角为 $\theta \simeq k^{-1}/(\eta_0-\eta_*)$, 其中 $\eta_0-\eta_*$ 是我们与最后散射面的共动距离①. 如果我们把这个温度场分解成多

① 这仅仅在平坦的宇宙中成立. 在开放的宇宙中, 到最后散射面的距离较大, 因此同样的物理距离会投影到一个较小的角尺度.

极矩, 那么一个角尺度大约相当于 $1/l$. 因此, 基于 $\eta_* \ll \eta_0$ 的事实, 我们可以将 k 尺度上的不均匀性投影到角尺度 $l \simeq k\eta_0$ 上的各向异性.

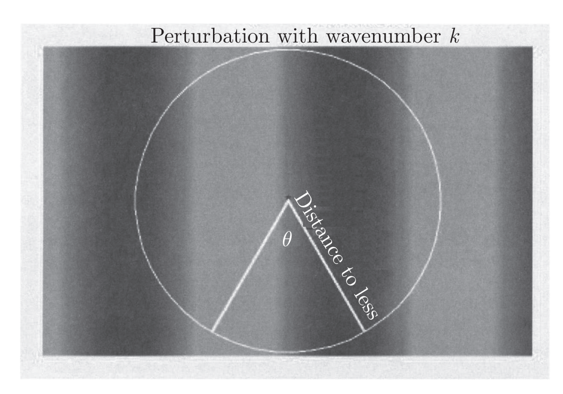


图 8.4 自由束. 再复合时期一个波数为 k 的平面波上温度的扰动. 图中的浅色和深色分别表示热和冷的区域. 再复合之后, 光子从热和冷区域自由传播到观测者, 中心用星号表示. 这个模式在尺度 θ 上对各向异性有影响, 尺度大小是 $\theta \sim k^{-1}/$(到最后散射面的距离)

对于这个自由束的图片有一点要注意. 我们一直假设在光子从最后散射面传播到地球表面的过程中是畅通无阻的. 实际上, 如果宇宙自始至终是平坦和物质主导的, 那么引力势将是一个常数, 这个假设就是正确的. 然而, 再复合并不比平衡时期晚多少, 因此严格的说残余的辐射密度导致引力势在再复合之后并不是常数; 并且, 在后来的时期, 暗能量也不像物质那样, 它会导致势能衰减. 你还可以想象到其他影响物质主导的因素. 所有的这些所谓 "integrated Sachs-Wolfe" 效应将会对光子产生新的扰动, 导致会有一个 10%幅度的变化.

我们现在理解了原初扰动是怎么进化成现在的各向异性谱. 下面让我们再一次定量地研究一下.

8.2 大尺度的各向异性

为了在大尺度上得到光子扰动的结果, 我们利用超视界方程 (7.17) 式. 这立刻告诉我们 $\Theta_0 = -\Phi$ 加上一个常数. 初始条件是 $\Theta_0 = \Phi/2$, 因此这个常数是 $3\Phi_p/2$, Φ_p 是大爆炸期间的初始势能. (7.32) 式是我们对于 Φ 的大尺度演化的精确描述. 如果再复合过程发生在物质密度与辐射密度相等时刻很久之后, 那么我们将取这个表达式的 $y \gg 1$ 极限, 那么 $\Phi \to 9\Phi_p/10$. 因此, 在再复合时期, 大尺度光子扰动满足

$$\begin{aligned}\Theta_0(k,\eta_*) &= -\Phi(k,\eta_*) + \frac{3\Phi_p(k)}{2} \\ &= \frac{2\Phi(k,\eta_*)}{3}.\end{aligned} \tag{8.5}$$

观测的各向异性是 $\Theta_0 + \Psi$, 由于 $\Psi \simeq -\Phi$, 它近似于 $\Theta_0 - \Phi$. 因此有

$$(\Theta_0 + \Psi)(k, \eta_*) = \frac{1}{3}\Psi(k, \eta_*). \tag{8.6}$$

另一个解释再复合时期大尺度扰动的方法是通过密度场. 从第 6 章推导出来的初始条件是 $\delta = 3\Phi/2$, 对大尺度演化方程 $\dot{\delta} = -3\dot{\Phi}$ 进行积分, 使得

$$\begin{aligned}\delta(\eta_*) &= \frac{3}{2}\Phi_{\mathrm{p}} - 3[\Phi(\eta_*) - \Phi_{\mathrm{p}}] \\ &= 2\Phi(\eta_*).\end{aligned} \tag{8.7}$$

因此, 用暗物质扰动对各向异性描述是

$$(\Theta_0 + \Psi)(k, \eta_*) = -\frac{1}{6}\delta(\eta_*). \tag{8.8}$$

在计算大尺度各向异性谱的时候，(8.6) 式和 (8.8) 式将会非常有用. 然而, 即使是现在, 它们也包含着一个有趣的信息, 从 (8.8) 式的傅里叶变换我们可以看出致密区的各向异性是负值. 这是一个值得重复的令人惊奇的结果. 对于大尺度扰动, 在再复合时期, 致密区的确包含比低密度区更热的光子, 即当 $\Theta_0 > 0$ 时, $\Psi < 0$. 然而, 这些光子为了到达我们这, 它们必须逃离它们的势阱. 如此一来, 它们将会损失能量, 损失的能量抵消了光子在初始时期比平均温度热的事实, 即当 $\Psi < 0$ 时, $\Theta_0 + \Psi$ 是负的. 概括来说, 当我们今天观测大尺度热斑时, 实际上是在观测在再复合时期的低密度区域.

(8.8) 式中的另外一个重要特征是相关系数 1/6, 它使我们将 $\delta T/T$(等式左边) 和 $\delta\rho/\rho$(等式右边) 联系在一起. 粗略的说, 各向异性的大小 10^{-5} 对应着 6×10^{-5} 的密度扰动. 其中一个很重要的问题是观测到的各向异性是否和今天结构形成所需的密度扰动一致. 这个系数因子 6 是非常有帮助的. 在除暴胀模型之外的几乎所有的结构形成模型中, 因子 6 都被一个接近 1 的值代替 (见习题一). 因此, 它们都在与各向异性的观测值太小以至于不能导致宇宙中的物质成团这一事实斗争. 相当于说, 当归一到大角度的各向异性时, 物质功率谱就变得太小①.

8.3 声学振荡

8.3.1 强耦合极限下的玻尔兹曼方程

当所有的电子被电离后, 在 η_* 之前, 光子的平均自由程远小于宇宙的视界. 康

① 这曾经是结构是通过宇宙弦产生的理论的重要观测事实. 有几篇文章在 COBE 探测结果后指出了该问题, 包括 Albrecht & Stebbins (1992), Perivolaropoulos & Vachaspati (1994), 和 Pen & Spergel (1995) 的文章.

普顿散射导致电子–质子流紧紧地与光子耦合在一起. 我们现在开始用玻尔兹曼方程定量地进行研究.

耦合极限对应着散射率, 远大于膨胀率, $\tau \gg 1$, τ 是 (4.61) 式中定义的光学深度. 我想要说明在 $\tau \gg 1$ 的极限中,Θ_l 的单极矩 $(l = 0)$ 和偶极矩 $(l = 1)$ 不能被忽略, 其他的都可被忽略掉. 在这种情况下, 光子的运动正如流体一样, 流体可以仅仅用两个变量描述：密度 ρ 和速度 $\vec{v}$. 为了证明, 让我们回到光子玻尔兹曼方程 (4.100) 式. 我们想要将 $\Theta(\eta, \mu)$ 的微分方程转换成 $\Theta_l(\eta)$ 耦合方程的无限集. 正如我们所看到的一样, 这样做的优势在于, 越高阶的部分越小, 因此可以被忽略掉. 方法是乘以 $P_l(\mu)$, 然后再积分掉 μ. 利用 (4.99) 式, 对于 $l > 2$ 的玻尔兹曼方程变成

$$\dot{\Theta}_l + \frac{k}{(-\mathrm{i})^{l+1}} \int_{-1}^{1} \frac{\mathrm{d}\mu}{2} \mu \mathcal{P}_l(\mu) \Theta(\mu) = \dot{\tau} \Theta_l. \tag{8.9}$$

注意到所有的其他项 (如 $-\dot{\Phi}$) 简单地依赖于 μ(如 μ^0 或 μ^1), 因此所有的 $l > 2$ 项为零. 为了作这个积分, 我们利用勒让得多项式的递归关系 (见式 (C.3)) 可以得到

$$\dot{\Theta}_l - \frac{kl}{2l+1} \Theta_{l-1} + \frac{k(l+1)}{2l+1} \Theta_{l+1} = \dot{\tau} \Theta_l. \tag{8.10}$$

让我们看一下 (8.10) 式各项的阶数. 左边第一项的阶数是 Θ_l/η, 它远小于右边的项, 其阶数是 $\tau\Theta_l/\eta$. 忽略掉 Θ_{l+1} 项, 在强耦合条件下可以得到

$$\Theta_l \sim \frac{k\eta}{2\tau} \Theta_{l-1}. \tag{8.11}$$

对于视界尺度的模式有 $k\eta \sim 1$, 这意味着 $\Theta_l \ll \Theta_{l-1}$(顺便提一句, 这也是为什么要忽略掉 Θ_{l+1} 的一个依据). 这个估计对于所有的高于偶极的模式都是有效的, 因为所有的这些模式比起单极和偶极模式都非常得小.

在利用这个事实推导仅仅单极和偶极是非零项 (流体近似) 的耦合方程极限之前, 我想解释一下为什么在强耦合的环境下高阶矩会衰减. 实际上, 这个发现尤其重要, 不仅在宇宙学中, 在所有涉及流体近似中都是. 为了理解流体近似, 先考虑一个如图 8.5 描述的平面波扰动. 观测者位于扰动中心看到光子从一个平均自由程 η/τ 的距离传播过来. 视界 η 尺度的波长远远大于这个距离, 因此光子到达观测者时有着相同的温度, 几乎没有各向异性. 你可以试想一下一个有着非常小波长 $(k\eta \sim \tau)$ 的扰动会导致各向异性. 虽然, 事实上, 这个模式的波长远远小于衰减尺度. 因此所有的在这个小尺度上的扰动都被平滑掉, 也不会导致各向异性. 结果是在强耦合情况下单极矩和偶极矩之外基本上没有各向异性.

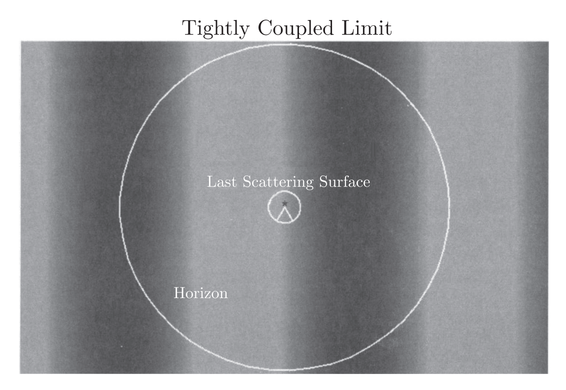


图 8.5 强耦合时期的各向异性. 视界尺度上的扰动不能被观测到, 因为可观测到的光子来自距离为 η/τ 的最后散射面. 这个最后散射面很近以至于来自各个方向上的光子都带有相同的温度

基于这些知识, 我们可以转到头两个矩方程，方程消去 Θ_2 化为

$$\dot{\Theta}_0 + k\Theta_1 = -\dot{\Phi} \tag{8.12}$$

$$\dot{\Theta}_1 - \frac{k\Theta_0}{3} = \frac{k\Psi}{3} + \dot{\tau}\left[\Theta_1 - \frac{\mathrm{i}v_\mathrm{b}}{3}\right]. \tag{8.13}$$

然后将 (4.100) 式乘以 $\mathcal{P}P_0(\mu)$ 和 $\mathcal{P}_1(\mu)$, 再将 μ 积分掉. 用电子–重子流体方程 (4.105) 式和 (4.106) 式加以补充. 首先将速度方程 (4.106) 式改写为

$$v_\mathrm{b} = -3\mathrm{i}\Theta_1 + \frac{R}{\dot{\tau}}\left[\dot{v}_\mathrm{b} + \frac{\dot{a}}{a}v_\mathrm{b} + \mathrm{i}k\Psi\right]. \tag{8.14}$$

等号右边的第二项远远小于第一项, 因为它多了一个相关因子 τ^{-1}. 因此, 保留至最低阶, $v_b = -3\mathrm{i}\Theta_1$. 然后, 一个系统的展开方式是在第二项用最低阶表达式, 可以得到

$$v_\mathrm{b} \simeq -3\mathrm{i}\Theta_1 + \frac{R}{\dot{\tau}}\left[-3\mathrm{i}\dot{\Theta}_1 - 3\mathrm{i}\frac{\dot{a}}{a}\Theta_i + \mathrm{i}k\Psi\right]. \tag{8.15}$$

现在让我们把这个表达式代入 (8.13) 式, 消去 v_b. 合并同类项, 可以得到

$$\dot{\Theta}_1 + \frac{\dot{a}}{a}\frac{R}{1+R}\Theta_1 - \frac{k}{3[1+R]}\Theta_0 = \frac{k\Psi}{3}. \tag{8.16}$$

我们现在得到了关于头两个光子矩的两个一阶耦合方程,(8.12) 式和 (8.16) 式. 对 (8.12) 式作微分, 再用 (8.16) 式消去 $\dot{\Theta}_1$, 我们可以将它们转换成一个二阶微分方程:

$$\ddot{\Theta}_0 + k\left[\frac{k\Psi}{3} - \frac{\dot{a}}{a}\frac{R}{1+R}\Theta_1 + \frac{k}{3[1+R]}\Theta_0\right] = -\ddot{\Phi}. \tag{8.17}$$

最后, 我们用 (8.12) 式消去 Θ_1, 得到

$$\ddot{\Theta}_0 + \frac{\dot{a}}{a}\frac{R}{1+R}\dot{\Theta}_0 + k^2 c_s^2 \Theta_0 = -\frac{k^2}{3}\Psi - \frac{\dot{a}}{a}\frac{R}{1+R}\dot{\Phi} - \ddot{\Phi} \equiv F(k,\eta) \tag{8.18}$$

这里我们把方程的右边定义为力函数, F, 流体声速定义为

$$c_s \equiv \sqrt{\frac{1}{3(1+R)}}. \tag{8.19}$$

声速依赖于宇宙中的重子密度. 没有重子物质的话, 对于相对论性流体, 声速有一个标准值: $c_s = 1/\sqrt{3}$. 当有重子物质时, 流体变重, 因此会降低声速. 我们马上就会看到一个时期中的重子在时空中的振荡, 这个时期由声速 (或重子密度) 决定. 注意到 (8.18) 式是 (8.1) 式的 "升级版"; 它们的不同仅仅在于 $\dot{\Theta}_0$ 这一衰减项① (见练习 2). 这一项的出现不会改变我们在 8.1 节里得到的定性结果. 最后, 注意进入到方程右侧的 Φ 和左侧的 Θ_0 有着相似的方式. (8.18) 式的另一个表达方式是

$$\left\{\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}\eta^2} + \frac{\dot{R}}{1+R}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\eta} + k^2 c_s^2\right\}[\Theta_0 + \Phi] = \frac{k^2}{3}\left[\frac{1}{1+R}\Phi - \Psi\right]. \tag{8.20}$$

8.3.2 强耦合极限的解

我们已经推导出的反映光子–重子流体重子声学振荡的方程 (8.20) 式，是一个普通的二阶微分方程. 为了解这个方程, 我们将要再一次利用格林方法 (参考 7.3.1 节) 求出完整解. 首先我们要找出齐次方程的两个解, 然后再用这两个解构造出特解.

原则上, 为了得到齐次方程的解, 首先令 (8.20) 式右侧为零. 实际上, 当压力项非常大时, 约为 $k^2 c_s^2(\Theta_0 + \Phi)$(至少当模式在视界内或是 R 很小时此项较大), 衰减项大约是 $R(\Theta_0 + \Phi)/\eta^2$. 从物理角度考虑, 我们期望压力会诱导光子温度的振荡; 对于这些振荡来说, 时间尺度小于由宇宙膨胀引起的衰减. 首次作近似, 让我们忽略衰减项从而得到简单的振荡方程解②. 这两个齐次方程的解分别是

$$S_1(k,\eta) = \sin[kr_s(\eta)], \quad S_2(k,\eta) = \cos[kr_s(\eta)] \tag{8.21}$$

其中我们定义声界线为

$$r_s(\eta) \equiv \int_0^\eta \mathrm{d}\eta' c_s(\eta'). \tag{8.22}$$

因为 c_s 是声速, 声界线就是声波在时间 η 内传播的共动距离.

① 不要把这里的衰减与后面提到的小尺度上的扰动衰减混淆, 它们的作用完全不同.

② 可以利用练习 5 中的 WKB 近似进行修正.

光子温度的强耦合解可以通过 (8.21) 式的两个齐次方程的解构造出来

$$\Theta_0(\eta)+\Phi(\eta)=C_1S_1(\eta)+C_2S_2(\eta) + \frac{k^2}{3}\int_0^\eta \mathrm{d}\eta'[\Phi(\eta')-\Psi(\eta')]\frac{S_1(\eta')S_2(\eta)-S_1(\eta)S_2(\eta')}{S_1(\eta')\dot{S}_2(\eta')-\dot{S}_1(\eta')S_2(\eta')}. \quad (8.23)$$

这里我们还是避免了 R 的出现, 除非在 sin 和 cos 的快速变化情况下. 也就是说, 例如, S_1 被看作是 kr_s 带有非零值 R. 当 Θ_0 和 Φ 都为常数时, 在 (8.23) 式中, 我们可以通过初始条件来固定常数项 C_1C_2. 因此,sin 项的系数 C_1 必须消失, $C_2=\Theta_0(0)+\Phi(0)$. 分母项变为 $-kc_s(\eta')\to -k/\sqrt{3}$. 最后, 积分项的分子简化为 $-\sin[k(r_s-r'_s)]$, 因此有

$$\Theta_0(\eta)+\Phi(\eta)=[\Theta_0(0)+\Phi(0)]\cos(kr_s) + \frac{k}{\sqrt{3}}\int_0^\eta \mathrm{d}\eta'[\Phi(\eta')-\Psi(\eta')]\sin[k(r_s(\eta)-r_s(\eta'))]. \quad (8.24)$$

(8.24) 式是描述紧致耦合极限下各向异性的表达式, 首先由 Hu 和 Sugiyama 在 1995 年推导出来. 如果你还是对此解没印象，这是因为它还包含了一个对引力势的积分项. 建议你重新考虑一下. 首先, 看图 8.6, 它将 (8.24) 式的解与精确解做比较, 精确解是通过对耦合爱因斯坦–玻尔兹曼方程求积分得到的. 近似解峰值位置十分精确, 峰值高度在一定程度上吻合较好. 但是 $k\eta_0>500$ 时, 后面的波峰比精确解偏高, 但是我们在下面的章节会对此将由散射造成的衰减考虑进去加以改正.

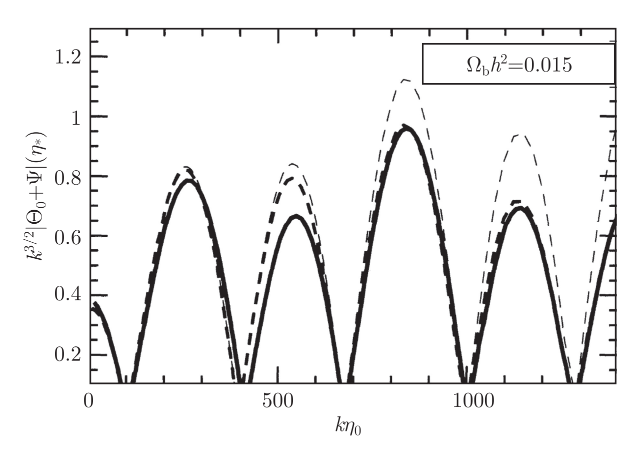


图 8.6　再复合时期标准 CDM 模型的单极矩. 粗的实线表示精确解. 细虚线是 8.3 节中 (8.24) 式的不含衰减项的解; 中间的粗线是 8.4 节中考虑了衰减效应后的结果

第二个值得我们欣赏这个近似解的原因是它将问题分成了两部分, 首先是对有暗物质产生的额外引力势的计算; 其次是引力势对各向异性的影响. 第三, 该近似

解清晰地阐述了 cosine 模式是由暴胀模型激发的. 这是很重要的一点, 因为很难想象的到这个模型被其他任何机制激发. 如果考虑因果关系, 那么当 $k\eta \ll 1$ 时将不应该有扰动存在. 我们知道暴胀理论通过改变真实的视界来逃避这种限制. 一旦这个模式被观测到, 那我们就观测到了暴胀的证据. 第四, 我们现在对振荡频率有一个精确的表达, 也就是对声波峰值位置有精确解. 从 (8.24) 式的第一项可知, 峰值应该出现在 $\cos(kr_s)$ 的极值处, 如

$$k_{\mathrm{p}} = n\pi/r_s, \quad n = 1, 2, \cdots . \tag{8.25}$$

最后一个说明 (8.24) 式很重要的原因是完整的爱因斯坦–玻尔兹曼方程引入了数以千记的耦合变量 (如 Θ_l). 将这么多的微分方程减少到一个的确是一个巨大的飞跃.

除了单极矩以外, 在再复合时期, 光子分布还有一个不能忽略的偶极矩. 用 (8.12) 式我们可以通过对 (8.24) 式作微分得到偶极矩的一个解析解

$$\begin{aligned}\Theta_1(\eta) = &\frac{1}{\sqrt{3}}[\Theta_0(0) + \Phi(0)]\sin(kr_s)\\ &- \frac{k}{3}\int_0^{\eta} \mathrm{d}\eta'[\Phi(\eta') - \Psi(\eta')]\cos[k(r_s(\eta) - r_s(\eta'))].\end{aligned} \tag{8.26}$$

由于 sine 项变成了 cosine 项，导致第一项的相位变得完全不同了. 如图 8.7 所示，即使考虑了积分项，我们仍然可以看到相位的变化. 这个相位不符对最后的各向异性谱有着重要的影响.

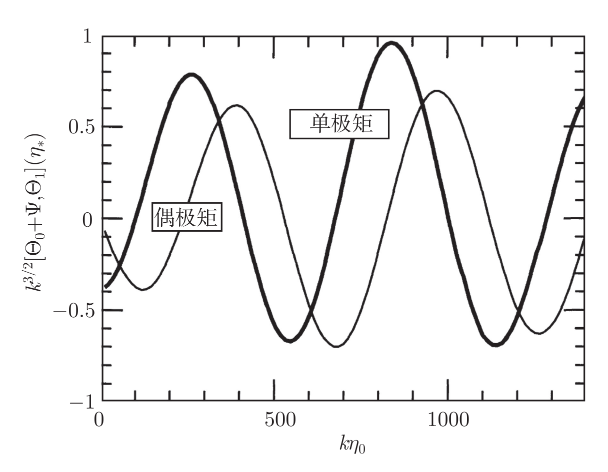


图 8.7　再复合时期标准 CDM 模型下的单极矩和偶极矩. 偶极矩为零是因为最长波长模式在再复合时期还未进入视界. 它与单极矩的相位完全不同

8.4 扩散阻尼

从 8.6 图可以看出, 要得到精确的 CMB 角功率谱必须考虑扩散效应. 要定性地分析扩散, 我们必须回到光子分布方程 (8.12)、(8.13) 和 (8.10) 式. 到现在为止, 我们已经忽略掉了 Θ_2 以及更高阶项. 扩散效应虽小但却是不能被忽略的四极矩.

因此, 我们必须要用带有四极矩 Θ_2 的方程补充在上一章节中的方程组. 我们的任务是要基于仅发生在小尺度上的现象进行简化. 在这些尺度上, 由第 7 章 (图 7.8) 可知由于辐射压力使得势能很小, 因此我们可以不考虑 Φ 和 Ψ. 还有, 我们将会看到扩散效应的特点是使得各阶矩都与 $1/\dot{\tau}$ 成比例. 因此我们仅仅需要保留 $l=2$ 的模式, 所有的高阶矩都可被忽略. 基于这个近似, 我们会得到

$$\dot{\Theta}_0 + k\Theta_1 = 0 \tag{8.27}$$

$$\dot{\Theta}_1 + k\left(\frac{2}{3}\Theta_2 - \frac{1}{3}\Theta_0\right) = \dot{\tau}\left(\Theta_1 - \frac{\mathrm{i}v_\mathrm{b}}{3}\right) \tag{8.28}$$

$$\dot{\Theta}_2 - \frac{2k}{5}\Theta_1 = \frac{9}{10}\dot{\tau}\Theta_2. \tag{8.29}$$

这三个方程需要关于 v_b 的方程进行补充. 对 (8.14) 式稍作修改可以得到如下的最好表达式

$$3\mathrm{i}\Theta_1 + v_\mathrm{b} = \frac{R}{\dot{\tau}}\left[\dot{v}_\mathrm{b} + \frac{\dot{a}}{a}v_\mathrm{b}\right], \tag{8.30}$$

其中引力势被忽略.

为了解这个方程组, 我们利用了阻尼的高频特性. 让我们写出速度与时间的表达式

$$v_\mathrm{b} \propto \mathrm{e}^{\mathrm{i}\int \omega \mathrm{d}\eta} \tag{8.31}$$

这里简化了其他所有的变量. 我们已经知道在紧密耦合极限中有 $\omega \simeq kc_s$. 现在我们寻找阻尼项, 一个关于 ω 的假想部分. 因为阻尼发生在小尺度上, 或是说高频处,

$$\dot{v}_\mathrm{b} = \mathrm{i}\omega v_\mathrm{b} \gg \frac{\dot{a}}{a}v_\mathrm{b}; \tag{8.32}$$

$\dot{a}/a$ 的量级是 η^{-1} 而 ω 的量级是 k. 因此我们可以忽略 (8.30) 式右边第二项, 此时速度为

$$\begin{aligned} v_\mathrm{b} &= -3\mathrm{i}\Theta_1\left[1 - \frac{\mathrm{i}\omega R}{\dot{\tau}}\right]^{-1} \\ &\simeq -3\mathrm{i}\Theta_1\left[1 + \frac{\mathrm{i}\omega R}{\dot{\tau}} - \left(\frac{\omega R}{\dot{\tau}}\right)^2\right] \end{aligned} \tag{8.33}$$

此式已经展开到 $\dot{\tau}^{-2}$, 因为 $v_b + 3\mathrm{i}\Theta_1$ 在 (8.28) 式中乘以了 $\dot{\tau}$.

光子场的二阶矩方程 (8.29) 式可以被简化. 首先消去 $\dot{\Theta}_2$ 项，因为它远远小于 $\dot{\tau}\Theta_2$. 简化结果为

$$\Theta_2 = -\frac{4k}{9\dot{\tau}}\Theta_1 \tag{8.34}$$

从此式中可以看出近似受到了控制: 高阶矩受到了额外因子 $k/\dot{\tau}$ 的抑制. 这个单极矩方程则变成了

$$\mathrm{i}\omega\Theta_0 = -k\Theta_1. \tag{8.35}$$

将这些方程代入 (8.28) 式可以得到如下关系

$$\mathrm{i}\omega - \frac{8k^2}{27\dot{\tau}} + (k^2/3\mathrm{i}\omega) = \dot{\tau}\left(1 - \left[1 + \frac{\mathrm{i}\omega R}{\dot{\tau}} - \left(\frac{\omega R}{\dot{\tau}}\right)^2\right]\right). \tag{8.36}$$

合并同类项得到

$$\omega^2(1+R) - \frac{k^2}{3} + \frac{\mathrm{i}\omega}{\dot{\tau}}\left[\omega^2 R^2 + \frac{8k^2}{27}\right] = 0. \tag{8.37}$$

等式左边前两项, $1/\dot{\tau}$ 展开的主导项, 重新得到了前面一节的结果, 那就是频率是声速的波数倍. 我们可以将频率写成零阶项加上一阶修正 $\delta\omega$. 然后, 将零阶部分代入反比于 $\dot{\tau}$ 的项得到

$$\delta\omega = -\frac{\mathrm{i}k^2}{2(1+R)\dot{\tau}}\left[c_s^2 R^2 + \frac{8}{27}\right]. \tag{8.38}$$

因此, 扰动的时间依赖性是

$$\Theta_0, \Theta_1 \sim \exp\left\{\mathrm{i}k\int \mathrm{d}\eta c_s\right\}\exp\{-\frac{k^2}{k_D^2}\} \tag{8.39}$$

其中, 阻尼波数由下式决定

$$\frac{1}{k_D^2(\eta)} \equiv \int_0^\eta \frac{\mathrm{d}\eta'}{6(1+R)n_e\sigma_T a(\eta')}\left[\frac{R^2}{(1+R)} + \frac{8}{9}\right]. \tag{8.40}$$

暂且将阶数单位因子放在一边, 这个方程表明 $1/k_D \sim [\eta/n_e\sigma_T a]^{1/2}$ 与我们在本章开始的估计相符.

作为阻尼尺度的首次估计, 我们可以研究再复合之前的时期, 在这一时期, 所有的电子 (氦中的电子除外) 都是自由电子. 在第 3 章中我们已经估计了在这一极限处的光学深度, 但是忽略了氦. 氦的质量分数通常用 Y_p 表示, 大约是 0.24. 因为每一个氦核包含有四个核子, 氦与原子核总数的比是 $Y_b/4$. 每个氦核带有两个电子 (每个质子一个), 所以当我们计算氢再复合之前的自由电子数时, 必须用 (3.46) 式的估计值乘以 $1 - Y_p/2$. $H_0 = 3.3 \times 10^{-4}h\mathrm{Mpc}^{-1}$, 于是可以得到

$$n_e\sigma_T a = 2.3 \times 10^{-5}\mathrm{Mpc}^{-1}\Omega_b h^2 a^{-2}\left(1 - \frac{Y_p}{2}\right). \tag{8.41}$$

基于此式, 可以得到阻尼尺度的近似值为 (练习 8)

$$k_D^{-2} = 3.1 \times 10^6 \mathrm{Mpc}^2 a^{5/2} f_D(a/a_{\mathrm{eq}})(\Omega_b h^2)^{-1} \left(1 - \frac{Y_p}{2}\right)^{-1} (\Omega_m h^2)^{-1/2} \tag{8.42}$$

其中 f_D 在 (8.88) 式中有定义, 它随着 a/a_{eq} 的增大趋近于 1.

图 8.8 描述了再复合之前阻尼尺度的演化. 在宇宙早期忽略再复合是个很好的近似, 但是, 正如所期望的, 利用自由电子密度方程 (8.41) 式不能精确地考虑电子被卷入中性氢, 会在 η_* 处引入误差. 不考虑再复合的情况下, k_D 尺度为 $\Omega_b^{1/2}$. 注意到图 8.8 中, 在晚期, 演化变得有些凌乱：$\Omega_b = 0.06$ 时的 k_D 比 $\Omega_b = 0.03$ 时的要小 $2^{0.5}$.

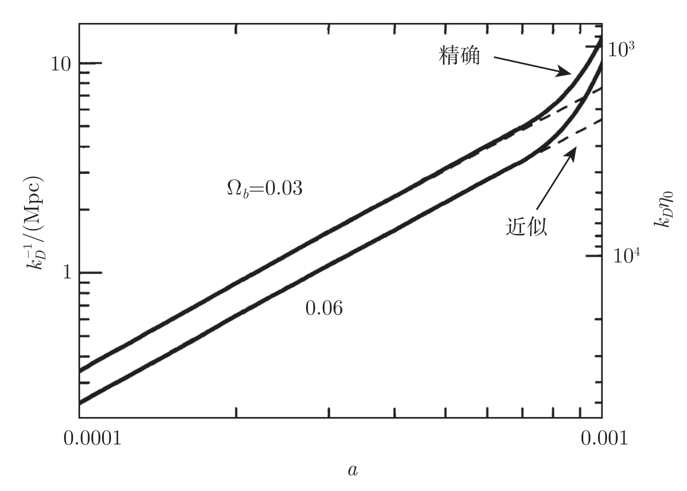


图 8.8　两个不同 $\Omega_b(h = 0.5)$ 值下的以尺度因子为函数的阻尼尺度. 粗线对整个标准再复合历史作了数值积分, 而细线用了 (8.42) 式中的近似, 它假设电子处于电离状态. 右边轴线描绘的是等效的 $k_D\eta_0$; 阻尼发生在 $l > k_D\eta_0$ 处

图 8.8 还有一点值得注意. 由光子扩散引起的各向异性的阻尼效应有时被认为是由于最后散射面有一定的厚度导致的. 也就是说, 如果再复合是在 η_* 瞬间发生, 将不会有阻尼效应的存在. 从图 8.8 可以看出显然这是错误的. 即使再复合是以这种方式发生的, 再复合之前的宇宙的光学深度也不会是无穷大. 光子将会传播一个合理的距离, 因此使得各向异性受到阻尼. 在已经举过的例子中, 如果再复合是瞬间发生的, 阻尼尺度将会以小于因子 2 减小. 另一方面, 在接下来的部分我们将会看到今天的各向异性是由积分后的可见函数决定的, 它的本质相当于过滤器, 在再复合时期集中于中心, 由于最后散射面的有限光深逐渐向两边扩展. 当包括阻尼效应后 (Selijak,1994;Hu and Sugiyama,1995), 我们必须要考虑到通过对由可见函数加权的阻尼函数 e^{-k^2/f_D^2} 积分得到的有限的厚度. 因此最后散射面的有限厚度对最后

各向异性谱在量和质上都有影响.

8.5 从非均匀性到各向异性

对于再复合时期的光子扰动我们有了较好的理解. 接下来将要将它转变成对今天各向异性谱的预测. 首先, 在下面的一节中将要介绍如何求解 Θ_l. 然后, 再花一点时间将它和观测联系起来. 因此, 本节主要是推导 (8.56) 式和 (8.68) 式, 前者将今天的各向异性与再复合时的单极矩和偶极矩联系起来, 后者则描述了 CMB 的功率谱.

8.5.1 自由流动 (free streaming)

我们想要通过再复合时期的单极矩和偶极矩推导出今天光子力矩 $\Theta_l(\eta_0)$ 的形式解. 形式解可以通过 (4.100) 式得到. 等式两边同时减去 $\dot{\tau}\Theta$ 得到

$$\dot{\Theta} + (\mathrm{i}k\mu - \dot{\tau})\Theta = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}k\mu\eta+\tau}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\eta}[\Theta\mathrm{e}^{\mathrm{i}k\mu\eta-\tau}] = \tilde{S} \tag{8.43}$$

其中源函数被定义为

$$\tilde{S} \equiv -\dot{\Phi} - \mathrm{i}k\mu\Psi - \dot{\tau}\left[\Theta_0 + \mu v_b - \frac{1}{2}\mathcal{P}_2(\mu)\Pi\right]. \tag{8.44}$$

保持对定义中 "~" 的好奇, (8.43) 式两边同时乘以指数项再对 η 求积分可以得到

$$\Theta(\eta_0) = \Theta(\eta_{\mathrm{init}})\mathrm{e}^{\mathrm{i}k\mu(\eta_{\mathrm{init}}-\eta_0)}\mathrm{e}^{-\tau(\eta_{\mathrm{init}})} + \int_{\eta_{\mathrm{init}}}^{\eta_0}\mathrm{d}\eta\tilde{S}(\eta)\mathrm{e}^{\mathrm{i}k\mu(\eta-\eta_0)-\tau(\eta)} \tag{8.45}$$

其中用到了 $\tau(\eta=\eta_0)=0$, 因为 τ 被定义为散射率从 η 积分到 η_0. 我们也知道, 如果初始时间 η_{init} 足够早, 那么光学深度 $\tau(\eta_{\mathrm{init}})$ 将非常大. 因此,(8.45) 式右侧第一项为零. 这与任何初始各向异性都完全会被康谱顿散射摸平这一事实相符. 同理, 我们可以设定积分下限为 0：积分范围在 $\eta < \eta_{\mathrm{init}}$ 的都被忽略掉. 因此, 扰动解可以写成

$$\Theta(k,\mu,\eta_0) = \int_0^{\eta_0}\mathrm{d}\eta\tilde{S}(k,\mu,\eta)\mathrm{e}^{\mathrm{i}k\mu(\eta-\eta_0)-\tau(\eta)}. \tag{8.46}$$

(8.46) 式看起来很简单, 其中所有的复杂项都包含在源函数 $\tilde{S}$ 中. 要注意 $\tilde{S}$ 在一定程度上依赖于角度 μ. 如果它不依赖 μ 的话, 我们可以立刻将 (8.46) 式改写成对每一个 Θ_l 的方程. 因为我们可以对两边同时乘以勒让德多项式 $\mathcal{P}_l(\mu)$ 然后再积分掉 μ. (4.99) 式左边给出 $(-\mathrm{i})^l\Theta_l$, 右边包含积分项

$$\int_{-1}^{1}\frac{\mathrm{d}\mu}{2}\mathcal{P}_l(\mu)\mathrm{e}^{\mathrm{i}k\mu(\eta-\eta_0)} = \frac{1}{(-\mathrm{i})^l}j_l[k(\eta-\eta_0)] \tag{8.47}$$

其中 j_l 是球贝塞尔函数. 这个方法很有效, 我们将一直采用它, 另外, 不要考虑 $\tilde{S}$ 对 μ 的依赖. 此时关于 Θ_l 的表达式为

$$\Theta_l(k,\eta_0)=(-1)^l\int_0^{\eta_0}\mathrm{d}\eta\tilde{S}(k,\eta)\mathrm{e}^{-\tau(\eta)}j_l[k(\eta-\eta_0)]. \tag{8.48}$$

但是, $\tilde{S}$ 中的 μ 怎么办? 我们应注意到 (8.46) 式中的 $\tilde{S}$ 指数项 $\mathrm{e}^{\mathrm{i}k\mu(\eta-\eta_0)}$. 因此, 不管在什么地方遇到 $\tilde{S}$ 中的 μ, 我们都可以用时间微分代替它

$$\mu\rightarrow\frac{1}{\mathrm{i}k}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\eta}. \tag{8.49}$$

让我用 $\tilde{S}$ 中的 $-\mathrm{i}k\mu\Psi$ 项进行证明, 此时积分变为

$$\begin{aligned}-\mathrm{i}k\int_0^{\eta_0}\mathrm{d}\eta\mu\Psi\mathrm{e}^{\mathrm{i}k\mu(\eta-\eta_0)-r(\eta)}&=-\int_0^{\eta_0}\mathrm{d}\eta\Psi\mathrm{e}^{-\tau(\eta)}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\eta}\mathrm{e}^{\mathrm{i}k\mu(\eta-\eta_0)}\\&=\int_0^{\eta_0}\mathrm{d}\eta\mathrm{e}^{\mathrm{i}k\mu(\eta-\eta_0)}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\eta}[\Psi\mathrm{e}^{-\tau(\eta)}]\end{aligned} \tag{8.50}$$

最后一行通过分部积分得到. 注意，表面项可以被消掉: 在 $\eta=0$ 它们受到 $\mathrm{e}^{-\tau(0)}$ 因子的衰减. 在 $\eta=\eta_0$ 处这些项并不小, 但是由于不依赖于角度所以不相关. 它们改变了单极矩, 这种改变不能被探测到. 因此, 考虑到分部积分通过一个负号改变了 (8.49) 式的代换规则, 微分不作用在指数的振荡项上,$\mathrm{e}^{\mathrm{i}k\mu(\eta-\eta_0)}$。因此 (8.48) 式的解变为

$$\Theta_l(k,\eta_0)=\int_0^{\eta_0}\mathrm{d}\eta S(k,\eta)j_l[k(\eta_0-\eta)] \tag{8.51}$$

这里的源函数被定义成

$$\begin{aligned}S(k,\eta)\equiv\mathrm{e}^{-\tau}&\left[-\dot{\Phi}-\dot{\tau}\left(\Theta_0+\frac{1}{4}\Pi\right)\right]\\&+\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\eta}\left[\mathrm{e}^{-\tau}\left(\Psi-\frac{\mathrm{i}v_\mathrm{b}\dot{\tau}}{k}\right)\right]-\frac{3}{4k^2}\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}\eta^2}[\mathrm{e}^{-\tau}\dot{\tau}\Pi].\end{aligned} \tag{8.52}$$

在 (8.51) 式中, 我们已经利用了球贝塞尔函数的特性:$j_l(x)=(-\mathrm{i})^l j_l(-x)$.

在这里, 有必要介绍一下可见函数

$$g(\eta)\equiv-\dot{\tau}\mathrm{e}^{-\tau}. \tag{8.53}$$

可见函数有一些有趣的特性. 积分 $\int_0^{\eta_0}\mathrm{d}\eta g(\eta)=1$, 因此我们可以将其看成是概率密度. 它表示一个光子在 η 时最后散射的概率. 在标准的再复合模型中, 因为早期 τ 很大以至于 η 早于再复合时期的概率基本为 0. 在再复合之后, 它还迅速下降, 这是因为散射率 $-\dot{\tau}$ 非常小. 图 8.9 描述了两种重子密度的可见函数分布图.

(8.52) 式中的源函数可以通过可见函数来表示. 如果消去源里的极化张量 Π, 因为它的值很小, 此时源函数变为

$$
\begin{aligned}
S(k,\eta) \simeq\ & g(\eta)[\Theta_0(k,\eta)+\Psi(k,\eta)] \\
& +\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\eta}\left(\frac{\mathrm{i}v_{\mathrm{b}}(k,\eta)g(\eta)}{k}\right) \\
& +\mathrm{e}^{-\tau}[\dot{\Psi}(k,\eta)-\dot{\Phi}(k,\eta)]. \qquad (8.54)
\end{aligned}
$$

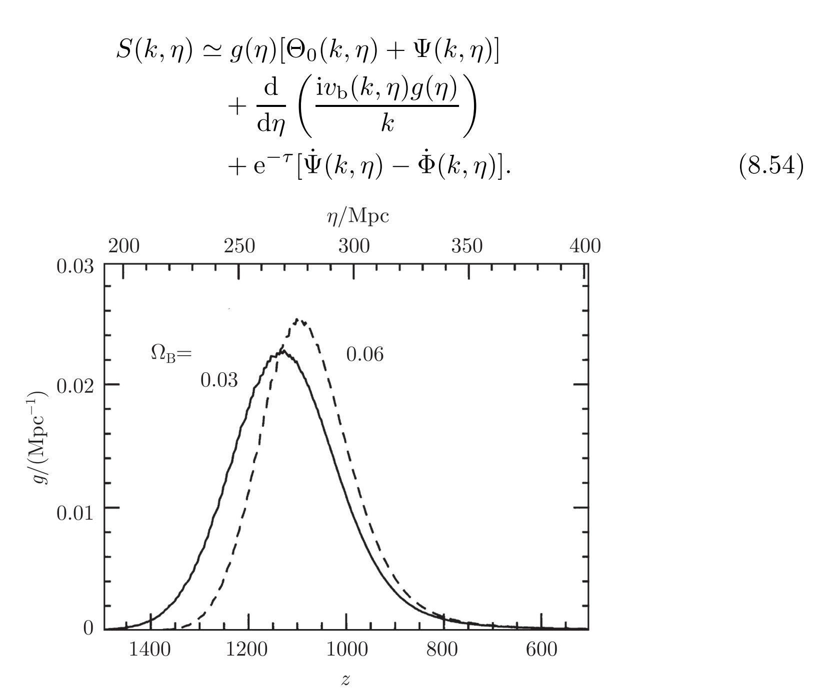


图 8.9 可见函数 (the visibility function). 大部分电子的最后散射发生在 $z \simeq 1100$, 并且对重子密度的依赖很小.

注意, g 对整个共形时间的积分结果是 1. 这里的 $h=0.5$

通过对 (8.51) 式中的时间积分可以使得解析解更近一步. 正比于 v_b 的源一项可以利用分部积分处理, 于是得到

$$
\begin{aligned}
\Theta_l(k,\eta_0) =\ & \int_0^{\eta_0}\mathrm{d}\eta g(\eta)[\Theta_0(k,\eta)+\Psi(k,\eta)]j_l[k(\eta_0-\eta)] \\
& -\int_0^{\eta_0}\mathrm{d}\eta g(\eta)\frac{\mathrm{i}v_{\mathrm{b}}(k,\eta)}{k}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\eta}j_l[k(\eta_0-\eta)] \\
& +\int_0^{\eta_0}\mathrm{d}\eta \mathrm{e}^{-\tau}[\dot{\Psi}(k,\eta)-\dot{\Phi}(k,\eta)]j_l[k(\eta_0-\eta)]. \qquad (8.55)
\end{aligned}
$$

(8.55) 式中的项可分为两类. 首先是权重为 $\mathrm{e}^{-\tau}$ 的积分项. 这些项只要 $\tau \lesssim 1$ 就产生贡献, 即在再复合之后的所有时间内都有贡献. 注意到它还与势能微分成正比. 如果再复合之后的势能是常数的话, 那这一项为零. 在第 7 章里看到的许多理论中, 这正是所发生的: 再复合之后, 宇宙是由纯物质主导的, 并且在这样的环境中, 势能通常保持为常数. 由于势能改变引起的修正对于正确的定量分析非常重要, 但是不

能在性质上影响各向异性谱的结构. 另外,(8.55) 式的主导项是以可见函数为权重的积分项.

由于可见函数的峰值非常陡, 所以前两项的积分变得很简单. 图 8.10 展示了其原因. 它描绘 (8.55) 式三部分. 因为可见函数比起其他两个函数变化得更快, 我们可以估计下当可见函数达到峰值时另外两个函数的值,如当 $\eta = \eta_*$ 时, 另外两项都可以在积分中被移除. 此时积分仅为 $\displaystyle\int \mathrm{d}\eta g(\eta) = 1$. 因此剩下

$$\begin{aligned}\Theta_l(k, \eta_0) \simeq & [\Theta_0(k, \eta_*) + \Psi(k, \eta_*)] j_l[k(\eta_0 - \eta_*)] \\ & + 3\Theta_1(k, \eta_*) \left(j_{l-1}[k(\eta_0 - \eta_*)] - \frac{(l+1) j_l[k(\eta_0 - \eta_*)]}{k(\eta_0 - \eta_*)} \right) \\ & + \int_0^{\eta_0} \mathrm{d}\eta \mathrm{e}^{-\tau} [\dot{\Psi}(k, \eta) - \dot{\Phi}(k, \eta)] j_l[k(\eta_0 - \eta)]. \end{aligned} \tag{8.56}$$

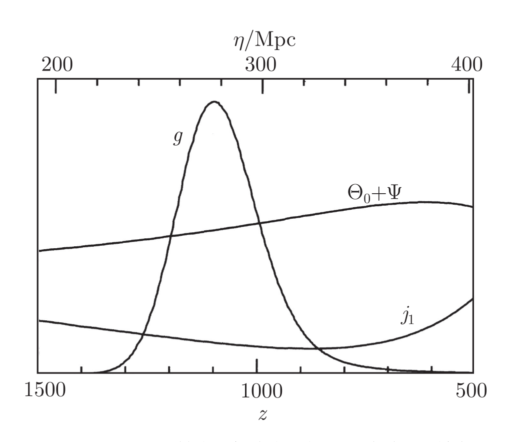


图 8.10　(8.55) 式中的三部分. 可见函数的峰值很陡, 因此它比单极矩 $\Theta_0 + \Psi$ 和贝塞尔函数 $j_l(k[\eta - \eta_0])$ 变化得要快. 图中的参量满足 $l = 100, k = 0.013h\ \mathrm{Mpc}^{-1}$

这里采用了 (C.18) 式的球贝塞尔函数的特性重写了速度项的贝塞尔函数的微分, 还有在 η_* 处有 $v_b \simeq -3\mathrm{i}\Theta_1$. 在小于图 8.10 描述的尺度上, 由于再复合时期附近的阻尼尺度变化很快, $\Theta_0 + \Psi$ 变化也更加迅速. 尽管如此, 通过修改下式的阻尼函数这个效应可以被合并

$$\mathrm{e}^{-k^2/k_D(\eta_*)^2} \to \int \mathrm{d}\eta g(\eta) \mathrm{e}^{-k^2/k_D(\eta)^2}. \tag{8.57}$$

(8.56) 式是半解析计算 (Seljak, 1994; Hu and Sugiyama, 1995)C_l 谱的基础, 它与精确解 (数值法) 的误差小于 10%. 从 (8.56) 式可以看出, 要想求解今天所看到的各向异性, 必须要先知道在再复合时期的单极 Θ_0, 偶极 Θ_1 和势能 Ψ. 另外, 如

果势能依赖于时间, 那么将会有一个小的但是不可忽略的改正. 这些体现在 (8.56) 式最后一行的改正, 通常被称作积分的 Sachs-Wolfe(ISW) 项.

单极矩项—(8.56) 式的第一项—正是我们在 8.1 节所期望的. 特别是球贝塞尔函数 $j_l[k(\eta_0-\eta_*)]$ 决定了在角尺度 l^{-1} 上有多少各向异性是由波数为 k 的平面波贡献的. 在非常小的角尺度上,

$$\lim_{l\to\infty} j_l(x)=\frac{1}{l}\left(\frac{x}{l}\right)^{l-1/2}. \tag{8.58}$$

那就是说, 当 $x<l$ 时, $j_l(x)$ 对于大的 l 非常之小. 在这里, 它意味着对于 $l>k\eta_0$, $\Theta_l(k,\eta_0)$ 非常接近 0. 这很有物理意义. 再回到图 8.4, 可以看到在很小的角尺度上几乎看不到来自长波长扰动的各向异性. 反之也正确：这样的扰动对大于 $1/(k\eta_0)$ 的角尺度没有贡献. 总之, 带有波数 k 的扰动主要对量级为 $l\sim k\eta_0$ 的角尺度有贡献. 关于单极矩项的最后一点：今天看到的各向异性不仅依赖于 Θ_0, 还依赖于 $\Theta_0+\Psi$, 因为光子必须要逃离势阱到达观测者.

8.5.2　C_l

如何将今天观测到的各向异性和抽象的 $\Theta_l(k,\eta_0)$ 联系起来呢? 为了回答这个问题, 我们必须首先描绘温度场的特性, 然后将这个特性与 Θ_l 联系起来.

回忆一下 (4.34) 式, 宇宙中的温度场为

$$T(\vec{x},\hat{p},\eta)=T(\eta)[1+\Theta(\vec{x},\hat{p},\eta)]. \tag{8.59}$$

虽然这个温度场在时空的任意一点都有定义, 但是我们仅能在 $\vec{x}_0$ 处和 η_0 时① 观测到. 我们要处理的各向异性仅是光子方向 $\hat{p}$ 上的. 因此所有的我们观测到的温度的变化都来自于方向 $\hat{p}$ 的变化. 观测者通常要成图, 其中记录的温度都来自于天空各个方向, 或称作 “天空上的斑点”. 这些点不是以 $\hat{p}$ 的分量 $\hat{p}_x$, $\hat{p}_y$, $\hat{p}_z$ 标注, 而是以极坐标 θ,ϕ 标注. 尽管如此, 向量 $\hat{p}$ 和极坐标② 之间的转换还是比较简单. 在随后的推导中都采用 $\hat{p}$.

对温度场进行球谐展开可以得到

$$\Theta(\vec{x},\hat{p},\eta)=\sum_{l=0}^{\infty}\sum_{m=-l}^{l}a_{lm}(\vec{x},\eta)Y_{lm}(\hat{p}). \tag{8.60}$$

下标 l,m 与实空间中的单位向量 $\hat{p}$ 是共轭的, 正如变量 $\vec{k}$ 与傅里叶转换变量 $\vec{x}$ 共轭一样. 我们对傅里叶变换都很熟悉, 因此将球谐展开看成一种傅里叶变换是很有用

① 我想对时空中的这一点说远一些. 例如, 卫星不在地球上, 对各向异性的测量我们已经开展了 30 多年. 这在温度变化的尺度上微不足道, 这个尺度的量级是哈勃时间 (或哈勃距离).

② $\hat{p}_z=\cos\theta$, $\hat{p}_x=\sin\theta\cos\phi$, $\hat{p}_y=\sin\theta\sin\phi$.

的. 而完整的傅里叶变换特征函数是 $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\vec{k}\cdot\vec{x}}$, 这里在球表面展开的完整的特征函数是 $Y_{lm}(\hat{p})$. 所有的包含在温度场 T 中的信息也包含在依赖于 a_{lm} 的时空中. 比如, 考虑这样一个实验, 在实验中对全天成图, 角分辨率是 7°. 全天是 4π 弧度 $^2 \simeq 41000$ 平方度, 因此在 $(7^{\mathrm{o}})^2$ 的区域有 840 个像素. 因此, 这样的实验将有 840 个独立信息块. 确定 $l_{\max}$ 的方法之一是将 a_{lm} 的总数设定为 $\sum_{l=0}^{l_{\max}}(2l+1) = (l_{\max}+1)^2 = 840$. 因此这个信息可以通过指定 a_{lm} 到 $l_{\max} = 28$ 来很好地表征. 顺便说一句, 这是对 COBE 实验 (Smooth et al., 1992; Bennett et al.,1996) 的一个很好的刻画. 他们将温度数据表现在许多个像素上, 但是许多像素都是重叠的. 因此, 独立的信息被包含在多极矩 $(l \sim 30)$ 中. 目前正在进行的实验或是计划中的实验可以观测到 $l \sim 10^4$.

我们想要将观测的 a_{lm} 与 Θ_l 联系起来. 为了做这件事情, 我们利用球谐函数的正交特性. Y_{lm} 可以通过 (C.11) 式进行归一化

$$\int \mathrm{d}\Omega Y_{lm}(\hat{p}) Y^*_{l'm'}(\hat{p}) = \delta_{ll'}\delta_{mm'}, \tag{8.61}$$

其中 Ω 是由 $\hat{p}$ 张成的立体角. 因此, 利用球谐函数 (8.60) 式的 Θ 的展开式可以通过两边同乘 $Y^*_{lm}(\hat{p})$ 并积分得以转化

$$a_{lm}(\vec{x},\eta) = \int \frac{\mathrm{d}^3 k}{(2\pi)^3} \mathrm{e}^{\mathrm{i}\vec{k}\cdot\vec{x}} \int \mathrm{d}\Omega Y^*_{lm}(\hat{p}) \Theta(\vec{k},\hat{p},\eta). \tag{8.62}$$

这里右侧的 $\Theta(\vec{x})$ 用傅里叶转换后的 $\Theta(\vec{k})$ 来代替, 因为这正是我们得到的解.

随着密度的扰动, 我们不能对任何特定的 a_{lm} 作出预测, 而仅仅是画出它们的分布图, 一个描述大暴胀期间从起源到量子扰动的分布. 图 8.11 画出了这种分布. a_{lm} 的平均值是 0, 但是也有一些非零变量, a_{lm} 中的非零变量被称作 C_l. 因此

$$\langle a_{lm} \rangle = 0, \quad \langle a_{lm} a^*_{l'm'} \rangle = \delta_{ll'}\delta_{mm'} C_l. \tag{8.63}$$

注意到对于一个给定的 l, 每一个 a_{lm} 有相同的变量, 这是非常重要的一点. 比如说, 对于 $l = 100$, 所有的 201 个 $a_{100,m}$ 来自相同的分布图. 当测量这 201 个相关系数时, 我们是在简化这个分布. 这些信息可以帮助我们很好地处理分布变量. 另一方面, 如果我们测量了四极矩 $(l = 2)$ 的 5 个组成部分, 我们并没有获得关于 C_2 的足够多的信息. 因此, 在获得 C_l 上有一个基本的不确定性. 这个不确定性被称作宇宙方差 (cosmic variance), 它在 l 低的情况下很有意义. 定量的说, 这个不确定尺度可以简化为样本数的平方根的倒数,

$$\left(\frac{\Delta C_l}{C_l}\right)_{\text{cosmic variance}} = \sqrt{\frac{2}{2l+1}}. \tag{8.64}$$

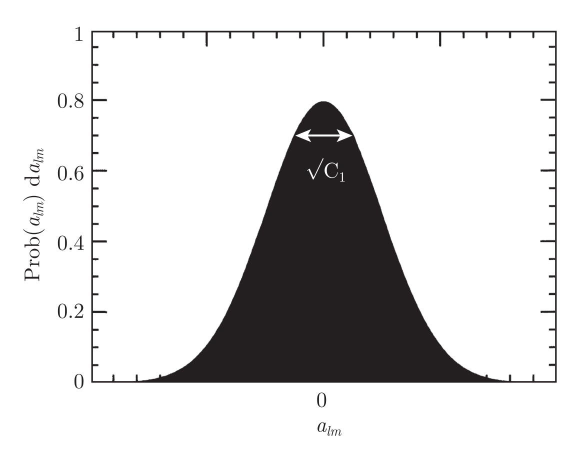


图 8.11 a_{lm} 的函数分布图. 这个分布的期望值是 0, 宽度是 $C_l^{1/2}$

现在我们可以得到 C_l 关于 $\Theta_l(k)$ 的表达式. 首先对 (8.62) 式中的 a_{lm} 开平方, 然后取分布的数学期望. 对此我们需要 $\langle\Theta(\vec{k},\hat{p})\Theta^*(\vec{k}',\hat{p}')\rangle$, 从现在开始我们保持对 η 的隐含依赖. 这个期望值很复杂因为它依赖于两个独立的现象：(i) 扰动的初始振幅和相位在暴胀期间从高斯分布被选出来，以及 (ii) 我们在本章研究的演化将初始扰动转变成各向异性, 即产生对 $\hat{p}$ 的依赖. 为了简单起见, 将这两种现象分开是很有意义的, 将光子的分布写成 $\delta\times(\Theta/\delta)$, 其中暗物质密度扰动 δ 不依赖于任何方向向量. Θ/δ 正是我们在最后两章中的解: 给定一个模式的初始振幅, 我们已经知道了如何随着时间演化. 这个比例不依赖于初始振幅, 因此它可以从分布的平均值中去掉, 有

$$\begin{aligned}\langle\Theta(\vec{k},\hat{p})\Theta(\vec{k}',\hat{p}')\rangle &= \langle\delta(\vec{k})\delta^*(\vec{k}')\rangle\frac{\Theta(\vec{k},\hat{p})}{\delta(\vec{k})}\frac{\Theta^*(\vec{k}',\hat{p})}{\delta^*(\vec{k}')}\\ &= (2\pi)^3\delta^3(\vec{k}-\vec{k}')P(k)\frac{\Theta(k,\hat{k},\hat{p})}{\delta(k)}\frac{\Theta^*(k,\hat{k}\cdot\hat{p}')}{\delta^*(k)},\end{aligned} \tag{8.65}$$

其中第二个等式应用了物质功率谱 $P(k)$ 的定义, 但是在 Θ/δ 中也有所包含. 这个比例是由 δ 和 Θ 的演化共同决定的, 它仅仅依赖于 $\vec{k}$ 和 $\hat{k}\cdot\hat{p}$. 尽管它们的初始振幅和相位不同, 但有相同 k 和 $\hat{k}\cdot\hat{p}$ 的两个模式的演化是相同的.

(8.62) 式开方后, 我们看到各向异性谱是

$$C_l = \int\frac{\mathrm{d}^3k}{(2\pi)^3}P(k)\int\mathrm{d}\Omega Y_{lm}^*(\hat{p})\frac{\Theta(k,\hat{k}\cdot\hat{p})}{\delta(k)}\int\mathrm{d}\Omega' Y_{lm}(\hat{p}')\frac{\Theta^*(k,\hat{k}\cdot\hat{p}')}{\delta^*(k)}. \tag{8.66}$$

现在我们可以用 (4.99) 式的倒数 $\Theta(k,\hat{k}\cdot\hat{p}) = \sum_l(-\mathrm{i})^l(2l+1)P_l(\hat{k}\cdot\hat{p})\Theta_l(k)$ 对

$\Theta(k, \hat{k}\cdot\hat{p}')$ 球谐展开. 于是得到

$$C_l = \int \frac{\mathrm{d}^3k}{(2k)^3} P(k) \sum_{l'l''} (-\mathrm{i})^{l'} (\mathrm{i})^{l''} (2l+1)(2l''+1) \frac{\Theta_{l'}(k)\Theta^*_{l''}(k)}{|\delta(k)|^2}$$
$$\times \int \mathrm{d}\Omega \mathcal{P}_{l'}(\hat{k}\cdot\hat{p}) Y^*_{lm}(\hat{p}) \int \mathrm{d}\Omega' \mathcal{P}_{l''}(\hat{k}\cdot\hat{p}') Y_{lm}(\hat{p}'). \tag{8.67}$$

这里的两个角积分 (练习 9) 是一样的. 它们仅当 $l' = l$ 和 $l” = l$ 时非零, 在这种情况下它们等于 $4\pi Y_{lm}(\hat{k})/(2l+1)$(或其复共轭).$\mathrm{d}^3k$ 积分的角部分变成了对 $|Y_{lm}|^2$ 的积分, 积分值为 1. 于是得到

$$C_l = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \mathrm{d}k k^2 P(k) \left| \frac{\Theta_l(k)^2}{\delta(k)} \right|^2. \tag{8.68}$$

对于一个给定的 l, 变量 a_{lm} 和 C_l 是一个对所有以 $\Theta_l(\vec{k})$ 为变量的傅里叶模式的积分. 现在我们可以用 (8.56) 式和 (8.68) 式画出今天的功率谱.

8.6　各向异性谱

8.6.1　Sachs-Wolfe 效应

大尺度的各向异性不受任何微观物理的影响: 在再复合时期, 对各向异性有影响的扰动在尺度上远远大于那些可以通过因果关系联系起来的尺度. 在这些最大的尺度中, 仅仅单极矩对各向异性有作用. 这就是 (8.56) 式中的第一项. 因此, 再复合时期的大角度的各向异性是由 $\Theta_0 + \Phi$ 决定的. (8.56) 式中大尺度的解说明了复合等于 $\Psi(\eta_*)/3$. 在大多数的宇宙学模型里, 再复合发生在物质辐射相等之后很久，我们可以认为当时的引力势等于现在的引力势除以增长因子. 因此,

$$\Theta_0(\eta_*) + \Psi(\eta_*) \simeq \frac{1}{3D_1(a=1)} \Psi(\eta_0) = -\frac{1}{3D_1(a=1)} \Phi(\eta_0). \tag{8.69}$$

最后的等号是因为在非常晚的时期, 没有可估计的各向异性压力, $\Phi = -\Psi$.

我们可以用 (7.7) 式以暗物质分布的形式表示今天的势能 Φ, 因此有

$$\Theta_0(\eta_*) + \Psi(\eta_*) \simeq -\frac{\Omega_m H_0^2}{2k^2 D_1(a=1)} \delta(\eta_0). \tag{8.70}$$

它给出了我们所需要的: 在再复合时期的 $\Phi_0 + \ \Psi$ 的和的表达式, 我们可以把它加到 (8.56) 式中的单极矩项. 为了得到今天的各向异性谱, 我们像在 (8.68) 式里一样作积分, 得到

$$C_l^{\mathrm{SW}} \simeq \frac{\Omega_m^2 H_0^4}{2\pi D_1^2(a=1)} \int_0^\infty \frac{\mathrm{d}k}{k^2} j_l^2[k(\eta_0 - \eta_*)] P(k) \tag{8.71}$$

其中上标代表 Sachs-Wolfe, 为了纪念计算大尺度各向异性的鼻祖 (Sachs and Wolfe, 1967). 功率谱由 (7.9) 式给出, 其中的转移函数为 1(因为我们考虑的是很大的尺度). 因此

$$C_l^{\mathrm{SW}} \simeq \pi H_0^{1-n}\left(\frac{\Omega_m}{D_1(a=1)}\right)^2 \delta_H^2 \int_0^\infty \frac{\mathrm{d}k}{k^{2-n}} j_l^2[k(\eta_0-\eta_*)]. \tag{8.72}$$

(8.72) 式中的大尺度各向异性可以被解析地计算出来. 首先, 我们利用 $\eta_* \ll \eta_0$, 然后定义 $x \equiv k\eta_0$. 因此功率谱可以被写成

$$C_l^{\mathrm{SW}} \simeq \pi(\eta_0 H_0)^{1-n}\left(\frac{\Omega_m}{D_1(a=1)}\right)^2 \delta_H^2 \int_0^\infty \frac{\mathrm{d}x}{x^{2-n}} j_l^2(x). \tag{8.73}$$

对球贝塞尔函数的积分可以通过伽马函数被解析地表达出来 ((C.17) 式), 于是得到

$$C_l^{\mathrm{SW}} \simeq 2^{n-4}\pi^2(\eta_0 H_0)^{1-n}\left(\frac{\Omega_m}{D_1(a=1)}\right)^2 \delta_H^2 \frac{\Gamma\left(l+\frac{n}{2}-\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(l+\frac{5}{2}-\frac{n}{2}\right)} \frac{\Gamma(3-n)}{\Gamma^2\left(2-\frac{n}{2}\right)}. \tag{8.74}$$

如果功率谱是 Harrison-Zel'dovich-Peebles, $n=1$, 那么伽马函数的第一个比值 $\Gamma(l)/\Gamma(l+2)$ 等于 $[l(l+1)]^{-1}$(参考 (C.24) 式). 余下的伽马函数的比值 $\Gamma(2)/\Gamma^2(3/2) = 4/\pi$(参考 (C.25) 式), 因此

$$l(l+1)C_l^{\mathrm{SW}} = \frac{\pi}{2}\left(\frac{\Omega_m}{D_1(a=1)}\right)^2 \delta_H^2 \tag{8.75}$$

是一个常数. 实际上, 这就是天文学家画 $l(l+1)C_l$ 图的原因: 在 l 值很小时,Sachs-Wolfe 效应近似得很好.

图 8.12 描绘了 COBE 对三个 CDM 模型的玻尔兹曼解的大角尺度的测量结果. 注意到, 即使当 $n=1$ 时, 真实的功率谱都不像 (8.75) 式描述的那样完全是平的. 再复合时期的偶极矩 (在 (8.74) 式中被忽略) 贡献不大. 积分的 Sachs-Wolfe 效应也不完全可以忽略, 尤其是在 Λ 模型中, 一旦宇宙到晚期由 Λ 主导, 势能就开始衰减. 对于一个 $n=1$ 的功率谱, 来自 COBE 的 δ 的最佳拟合值是

$$\begin{aligned} &\delta_H = 1.9\times10^{-5}, \quad \Omega_m = 1 \\ &\delta_H = 4.6\times10^{-5}, \quad \Omega_m = 0.3; \Omega_\Lambda = 0.7. \end{aligned} \tag{8.76}$$

图 8.12 还描绘了一个翘动模型, 其中 n 不等于 1. 在这样的一个模型中, 对比 Harrison-Zel'dovich-Peebles 中 $n=1$ 的谱, 各向异性的尺度为 l^{n-1}. 你可以从 (8.74) 式看到这个尺度, 或是更直接地从 (8.73) 式的积分项看. 这个积分在 $x \sim l$

处达到极值, 因此 x 可以粗略地被 l 代替. 因此, 从 x^{-1} 到 x^{n-2} 的积分可以使得尺度为 l^{n-1} 功率谱有所变化. 正如图 8.12 描绘的,COBE 的数据在 $l \sim 10$ 处有最大的权重, 但是 l 的范围跨越一个量级. 因此, 翘动的极值被 COBE 排除掉了. 但是, 为了得到对翘动进行更好的限制, 对一个更宽的角尺度的测量还是有必要的.

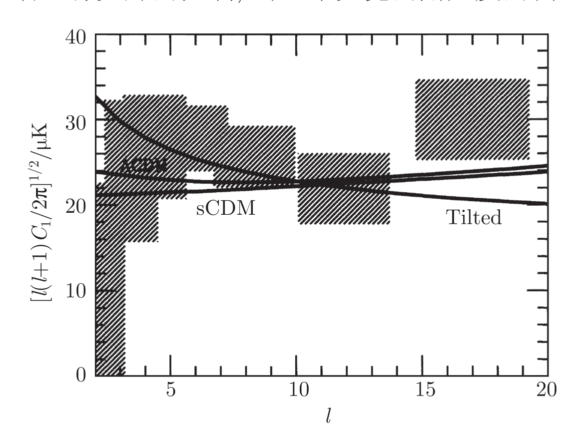


图 8.12　大尺度各向异性. 阴影区域是 COBE 卫星观测的结果 (Bennett et al.,1996). 曲线描绘的是标准 CDM 和 ΛCDM(n 都等于 1) 的谱线. 翘动模型和标准 CDM 一样, 只是 $n = 0.5$. 在 ΛCDM 模型中, 晚期的 ISW 效应在大尺度对各向异性的影响增强. 注意, 在随后的 C_l 图中, 画出的都是各向异性的均方根, 正比于 $C_l^{1/2}$. C_l 是无量纲的, 因此 μK 来自与背景温度 $T = 2.73$K 的乘积项

8.6.2　小尺度的各向异性谱

小尺度各向异性谱不仅仅依赖于单极矩, 也依赖于偶极矩和积分的 Sachs-Wolfe 效应. 图 8.13 展示了它们对功率谱的影响. 让我们按顺序分别考虑一下.

在再复合时期的单极矩 $(\Theta_0 + \Psi)(k, \eta_*)$ 自由传播到现在时刻, 引起了角尺度 $l \sim k\eta_0$ 上的各向异性. 这正是我们在图 8.4 中所期望的,(8.56) 式对其进行了证明, 现在可以直接从图 8.13 的上图看出. 在定量研究自由流动方面有两个有趣的特点. 第一, 注意到在单极矩谱的零点, 图上的 400,650 和 970 处, 由于在一个给定角尺度上的许多模式的作用而被平滑掉. 如果仅仅是 $k = 400/\eta_0$ 的模式对 $l = 400$ 的各向异性有影响, 那么 C_{400} 将真的是 0. 但是还有许多的波数大于 $400/\eta_0$ 的非零模式在起作用. 这些将 0 点变成 C_l 谱上的一个波谷.

第二个值得注意的自由流动的特点是我们对峰值位置的初始估计不够准确. 尺度 k 上的不均匀性并不能精确地反映尺度 $l = k\eta_*$ 上的各向异性. 而是在图 8.13 上图有一个可观测到的移动, 这意味着一个给定的 k 模式影响的尺度比我们期望的 l 要小. 这个移动来自于 (8.56) 式中的球贝塞尔函数. 正如图 8.14 描绘的那样,

在贝塞尔函数中的峰值并不在 $l = k\eta_0$ 处, 而是在更小的 l 值处. 另外, 我们对于 k 空间 ((8.25) 式) 峰值位置的初始估计也有一些偏高.

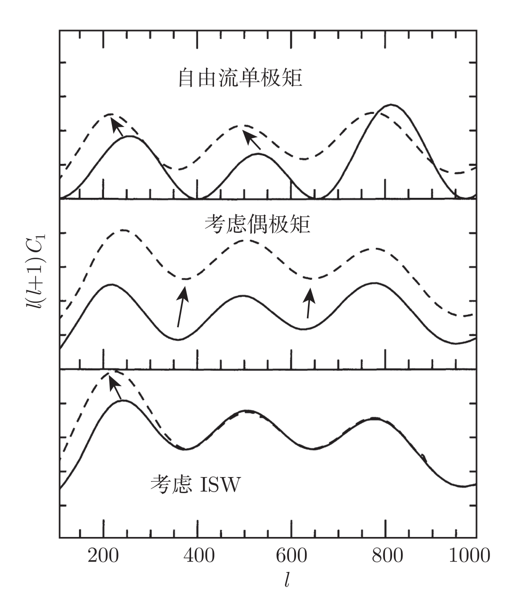


图 8.13 小尺度各向异性.上图: 再复合时期的单极矩 $(\Theta_0 + \Psi)(k = l/\eta_0, \eta_*)$ 包含了最后各向异性谱的大部分结构. 当通过 (8.56) 式积分自由流动时, 谱线略微向低 l 处偏移.中间图: 考虑偶极矩后提升了各向异性谱. 因为偶极矩与单极矩的相位不同, 因此会使得波谷的作用减小. 下图: ISW 效应在视界线的尺度上增强了各向异性. 在这种条件下, 再复合附近的势能发生变化, 因为那个时候的宇宙不是纯物质主导的. 因此第一峰值获得了最多的额外能量. 在整个图中, $h = 0.5, \Omega_m = 0.06, \Omega_m = 1$

例如, 对于图 8.13 中的模型描绘的第一峰值的期望位置 $\pi\eta_0/r_s$ 比 280 稍高. 然而, 在 k 空间里的单极矩中, 第一峰值出现在 $k\eta_0 \sim 260$. 这两个效应使得预测的峰值位置向低 l 处移动, 峰值比 (8.25) 式预期的要大，这使得峰值预期的位置移动到低 l 处. 一个较好的第一峰值位置估计是 $l_p \simeq 0.75\pi\eta_0/r_s$.

如果不考虑相位的话, 再复合时期的偶极矩比单极矩小. 在图 8.13 的中图中展示了加入了偶极矩后提升了各向异性的整体水平, 尤其是在波谷处. 没有偶极矩的话 (在这个模型中) 第一峰值高度 (在 $l \sim 200$ 处) 和第一波谷高度 (在 $l \sim 400$) 的比大约是 2.5:1, 偶极矩的存在使得这个比例降低到 1.5:1. 这是单极矩和偶极矩在不考虑相位的情况下的直接表现. 也就是说, 在单极矩对各向异性影响最小的地方, 即波谷处, 偶极矩的贡献最大. 另一个关于单极矩和偶极矩两者关系的评注是: 它们非相干叠加. 以此方式，为了得到 C_l, 当对所有的 k 模式积分时, 交叉项将会消失. 这可以在数学的角度上, 从球贝塞尔函数的特性看出 (练习 12). 任意意味着

偶极矩对功率谱的重要性不是人们想的那么简单. 如果在再复合时期偶极矩的振幅是单极矩振幅的 30%, 偶极矩对 C_l 的作用仅为 10%$(1^2+0.3^2=1.1)$.

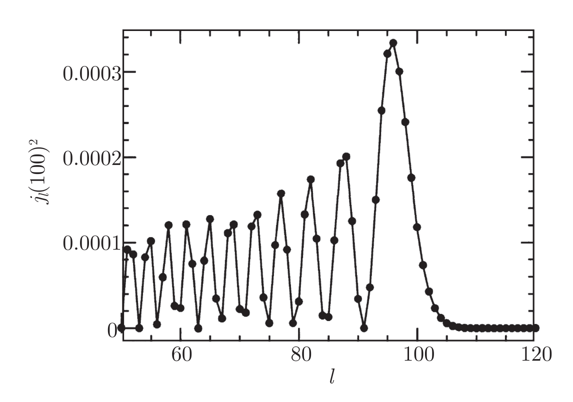


图 8.14　球贝塞尔函数, $j_l(100)$. 注意, 峰值在 $l\simeq 90$ 处, 比讨论值稍小

如果势能在再复合之后发生变化的话, 那么积分的 Sachs-Wolfe 效应也很重要. 为了看出在什么尺度上会受到 ISW 效应的影响, 考虑 (8.56) 式中的积分项. 假定势能在 η_c 时刻发生变化, 那么所有亚视界尺度 $(k\eta_c>1)$ 上都会受到影响. 贝塞尔函数的峰值在 $l\sim k(\eta_0-\eta_c)$ 处; 因此所有的角尺度 $l>(\eta_0-\eta_c)/\eta_c$ 都会受到影响. 最大的影响通常是视界尺度上的.

最好的、最流行的 ISW 效应的例子是再复合时期的剩余辐射. 如果宇宙是由纯物质主导的, 将不会有这种效应. 但是, 向纯物质主导的转移不是突然发生的, 即使对于 $a_{\rm eq}\sim 10^{-4}$, ISW 效应是在再复合时发生的. 这个早期的 ISW 效应尤其重要, 因为它是相干地加到单极矩上. 为了理解这一点, 对 (8.56) 式的最后一项作分部积分. 那么, 这个主导作用来自 $\eta\simeq\eta_*$, 因此在此处可以估计贝塞尔函数, 只剩下零散的积分

$$\Theta_l(k,\eta_0)^{\text{early ISW}}=[\Psi(k,\eta_0)-\Psi(k,\eta_*)-\Phi(k,\eta_0)+\Phi(k,\eta_*)]j_l[k(\eta_0-\eta_*)]. \quad (8.77)$$

这种相位相加使得和单极矩 (和相同的贝塞尔函数成比例) 相位一致, 因此尽管在大小上对 Θ_l 的影响比偶极矩小很多, 但是对各向异性谱的影响却是不相称的. 30% 的偶极矩使得 C_l 上有 10% 的变化, 而 5% 的 ISW 效应同样会导致 C_l10% 的变化. 最下面一幅图展示了大尺度 $l\sim\eta_0/\eta_*$ 上, 由于早期 ISW 效应有了一个很大的提高.

8.7　宇宙学参量

各向异性谱依赖于宇宙学参量. 这个基本的事实在最初引起了巨大的轰动 (由

于有太多的简并我们将无法测量任何一个参数). 随着越来越多的定量研究的开展, 这种摇摆摆向了另一边 (我们可以解开这种简并, 并能在一定精度上测量宇宙学参量). 最近, 公众对此持谨慎而乐观的态度. 确实, 仅在 COBE 发现大尺度各向异性的 10 年后, 就有了一系列的试验合作, 试图通过测量第一峰值的位置来确定一个参量 (总的能量密度). 其中的一些已经测量到了接下来的二个峰值, 由此可以推出重子密度, 这个参量对这些峰值的位置和高度都有很大影响.

我们已经发展了用来测量宇宙学参量的理论工具. 在这一节中, 我们会利用这些工具来理解各向异性谱是如何随着宇宙学参量的变化而变化的.

必须明确的一点是, 哪些参量是可以变化的, 这很重要. 在这里我将要考虑 8 个参量:

- 曲率密度, $\Omega_k \equiv 1 - \Omega_m - \Omega_\Lambda$
- 归一化参量, C_{10}
- 原初翘动, n
- 张量模式, r(精确的定义参考练习 18)
- 再电离参数, τ
- 重子密度, $\Omega_b h^2$
- 物质密度, $\Omega_m h^2$
- 宇宙学常数能量密度, Ω_Λ

这个列表中有两点值得注意. 第一就是很明显它没有包含所有可能的宇宙学参量. 例如, 没涉及中微子质量 (在后面的章节中, 它的质量都将设为 0), 暗能量状态方程 ω(设为 -1, 对应宇宙学常数), 以及翘动张量 n_T(设为 0). 第二点是我选出特定参量的组合, 如 $\Omega_b h^2$, 而不是分开的 Ω_b 和 h. 这是很好解释的 (例如, 相互交替的峰值依赖于 $\Omega_b h^2$), 但也容易引起混淆. 常见的争议是, 在平坦的宇宙中 (第一参量曲率密度等于 0), 为什么宇宙学常数和物质密度可以改变? 它们加起来不一定等于 1 吗? 在平坦的宇宙中, $\Omega_m + \Omega_\Lambda$ 等于 1 是正确的, 但是这不妨碍我们改变 $\Omega_m h^2$ 和 Ω_Λ, 因为当两个密度之和为 1 时, h 还可以变化.

为了反复强调这一点, 考虑两个分析人员. 分析员 A 工作在平坦的宇宙中用 $\Omega_m h^2$ 和 Ω_Λ 作为她的两个自由参量. 分析员 B 也假定宇宙是平坦的, 但是以 h 和 Ω_Λ 作为他的参量. 当 A 提高 Ω_Λ 时, 物质密度 ($\Omega_m h^2$) 保持固定, 因此辐射与物质相等时刻也保持固定. 然而, 当 B 提高他的 Ω_Λ 时, 为了保持宇宙是平坦的, 他必须降低 Ω_m. 因此他也降低了物质密度 (因为 h 保持不变), 由此导致 $a_{\rm eq}$ 更加靠近现在. $a_{\rm eq}$ 的改变将会导致 ISW 效应增强, 因此会有一个更大的峰值. 分析员 A 很有远见地将 $\Omega_m h^2$ 看作一个整体作为参量, 就不会有这种结果. 实际上, 这种增大仅仅是间接地由 Ω_Λ 导致, 而不是较小的 $\Omega_m h^2$ 直接引起的结果.

现在让我们依次考虑每一个参量的影响.

8.7.1　曲率

如果宇宙不是平坦的, 图 8.4 就不再精确, 因为零质量粒子的测地线使得光子路径不再平行. 考虑一下这种情况下的各向异性. 假设在一个平坦宇宙和一个开放的宇宙中, 在再复合时期, 有相同的不均匀模型. 如图 8.15 所示, 带有最大各向异性的 (第一峰值处) 物理尺度在开放的宇宙中的投影的角度较小, 因此峰值向较高的 l 移动. 这恰恰是图 8.16 所描绘的情形.

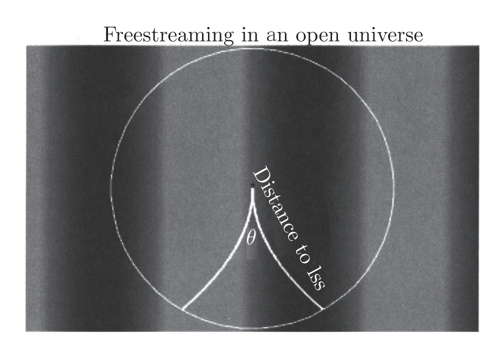


图 8.15　开放的宇宙中光子的轨迹是发散的. 比起平坦宇宙, 开放的宇宙中的最后散射的扰动发生在更小的尺度上

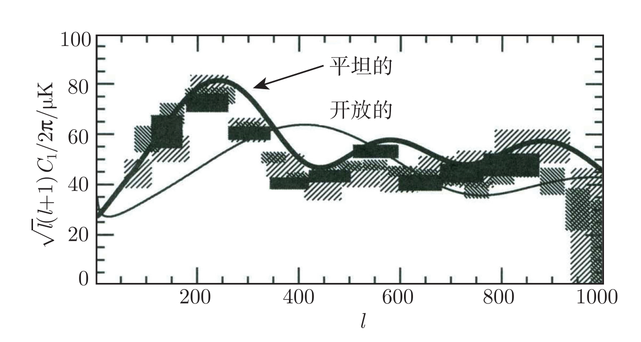


图 8.16　平坦宇宙和开放的宇宙中的各向异性谱. 阴影区域的数据来自于三个小尺度的观测：DASI (黑色部分; Halverson et al., 2002), Boomerang (灰色部分; Netterfield et al., 2002), 和 Maxima (浅色部分; Lee et al., 2001). 在开放的宇宙中的波动起伏依然存在只是向较小尺度移动. 观测数据与平坦宇宙符合较好. 两条曲线相同的参数为 $n = 1$, $\Omega_m h^2 = 0.15$, $\Omega_b h^2 = 0.02$, 并且没有再电离、张量或宇宙学常数. 开放的宇宙中有 $\Omega_k = 1 - \Omega_m = 0.7$; 平坦宇宙中除了 $\Omega_k = 0$, 其他参数与开放的宇宙一致

这个影响的大小是由到达最后散射面的共动角直径距离决定的, 在平坦宇宙中它等于 $\eta_0 - \eta_*$, 在一个由 (2.46) 式决定的带有曲率的宇宙中等于 z_*. 图 8.17 描绘了这个以曲率密度为变量的距离函数, 其他参量保持不变. 角直径距离的尺度大小

是 $(1-\Omega_k)^{-0.45}$, 因此它在 $\Omega_k=0.7$ 的开放宇宙中比在平坦宇宙中要大 1.7 倍. 从图 8.16 中注意到第一峰值从一个模型移到另一个模型的大小正是这个值. 结合所有的参量来考虑, 曲率是至今对峰值位置影响最大的.

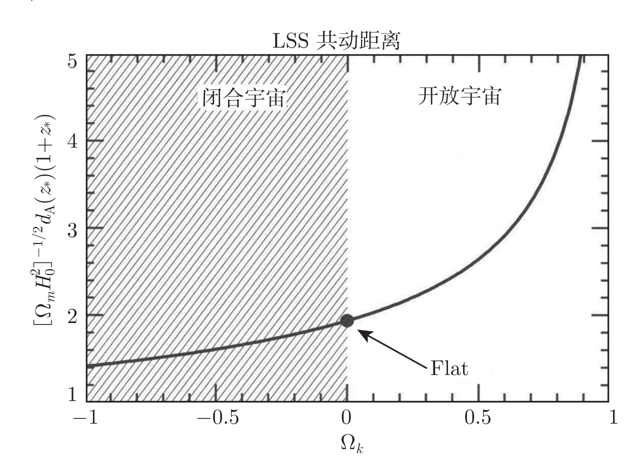


图 8.17 在 $z_*\simeq 1100$ 处, 以曲率为函数的到最后散射面的共动角直径距离. 开放宇宙中的距离比闭合宇宙的要大

图 8.16 描绘的是 2002 年的数据. 在 $l\sim 200$ 处的第一峰值有一个很明显的提高之后又有一个明显的下降. 当刚刚获得第一批数据时 (大约是 1998 年), 有人怀疑不会有任何数据可以跨越整个峰值, 把这些数据整合到一起是非常困难的. 但是在一到两年内, 随着含有足够信息能排除开放的宇宙的大量数据的出现, 这种反对声也随之消失. 这些大量的数据来自 TOCO(Miller et al.,1999), Boomerang(de Bernardis et al.,2000) 和 Maxima(Hanany et al.,2000). DASI(Halverson et al.,2002) 探测, 结合重新分析过的 Boomerang 和 Maxima 数据, 有力地支持了平坦宇宙理论.

当然, 一个真正意义上的平坦宇宙仅仅是参数空间中的一点, 在这一点上能量密度总和等于临界密度, 除了这一点没有任何数据可以排除所有的值. 而现在的数据表明总的密度与临界密度之间有大约 5%的误差. 而曾经被天文学家宠爱的经典开放的宇宙与临界密度的误差是 30%, 因此由于太高的置信区间而被排除.

8.7.2 参数的简并

图 8.18 描绘了四个参数变化的结果. 在依次讨论每一个参量之前, 很有必要说明一点, 所有的这些参量对功率谱的改变都是相似的. 谱的形状几乎不会变化, 仅仅是使得谱线上下移动而已.

归一化.参量 C_{10} 使得谱线上下移动变化. 应注意, 在图 8.18 中的四个参量的

变化中, 它是唯一一个使振幅升高的参量.

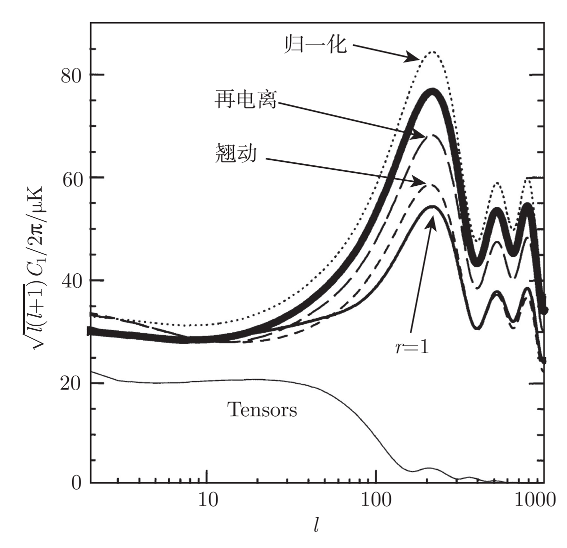


图 8.18 各向异性谱随着 C_{10}, τ, r, n 变化而发生的变化. 基本模型 (粗线) 是平坦宇宙, 其中没有再电离或张量, $n=1, \Omega_m h^2 = 0.16, \Omega_b h^2 = 0.021$ 以及 $\Omega_\Lambda = 0.7$. 每个细线表示的是只改变其中一个参量.再电离使得最后散射面的光深等于 0.2 而不是 0; 翘动的原初谱有 $n = 0.8$, $r = 1$ 表示张量和标量对四极矩的影响相同; 归一化使得 C_{10} 比基本模型高 10%. 标有张量的曲线仅仅是张量对各向异性的影响. 只有 $r = 1$ 的曲线包括这种影响; 所有其他的都假定没有来自张量的各向异性

翘动.我们已经研究了翘动谱 ($n \neq 1$) 的大角度效应. 如果 $n < 1$, 那么小尺度的各向异性比 $n = 1$ 模型的要小. 从图 8.18 中可以看出, 尺度越小, 这个效应越明显. 因此在这四个被考虑的参量中, 翘动有着最与众不同的形状—它不是一个简单的上下变化—或许将可以很容易地被提取出来. 定量的说, 谱尺度为

$$\frac{C_l(n)}{C_l(n=1)} \simeq \left(\frac{l}{l_{\text{pivot}}}\right)^{n-1} \tag{8.78}$$

其中 $l_{\text{pivot}} = 10$, 因为我们考虑的是 C_{10}. 基于这些, $\sqrt{C_l}$ 在图 8.18 中被描绘出来, 从中可以看出在 $l = 1000$ 处, 这个尺度表现得非常好.

再电离.到了晚期, 宇宙是几乎被完全电离的. 我们可以通过高红移类星体的吸收谱来观测它, 目前还没有任何证据表明我们能观测到一个均匀的中性背景, 直至追溯到 $z \sim 6$ 时 (Becker et al.,2001;Fan et al.,2002). 再电离使得 CMB 和电子发生作用. 如果有足够的散射发生, 也就是说, 如果到最后散射面的光深足够高, 各向同性将被恢复; 同理, 原处各向异性也就消失.

有几种方式可以定量地观测再电离效应. 一个是假想一个光子在我们的方向上

以温度 $T[1+\Theta]$ 传播, 其中 T 是背景温度, Θ 是扰动. 如果光子到达一个光深为 τ 的区域, 那么仅仅有 $\mathrm{e}^{-\tau}$ 比例的光子逃离继续传播到我们这里. 加上这个影响, 我们还可以得到来自电离区 $1-\mathrm{e}^{-\tau}$ 比例的光子. 所有的这些光子都带有相同的温度 T. 因此我们今天看的温度是

$$T[1+\Theta]\mathrm{e}^{-\tau}+T(1-\mathrm{e}^{-\tau})=T[1+\Theta\mathrm{e}^{-\tau}]. \tag{8.79}$$

从平均温度 T 中减去的部分告诉我们部分的各向异性将会是 Θ, 这个原初部分发生在 $z\simeq 1100$, 还要乘以一项 $\mathrm{e}^{-\tau}$. 当然这个结论仅仅会影响再电离时期视界之内的尺度, 因此大于 $\eta_0/\eta_{\mathrm{reion}}$ 的多极矩 l 将受到 $\mathrm{e}^{-\tau}$ 的压制作用, 小的 l 则不会受影响. 这可以从图 8.18 中看出, 其中的再电离曲线在大尺度上在标准曲线之上, 而在小尺度上受到了压制.

张量.从第 5 章我们看到一旦它们进入了视界线, 引力波的振幅就会消失. 因此, 引力波仅仅在再复合时期在比视界线大的尺度上对各向异性谱有影响. 通常地, 转换成角尺度即为 $l<100$. 实际上在图 8.18 中的张量曲线显示出在 $l>100$ 之后张量就会消失. 我们仅仅可以观测到由张量和标量综合作用的各向异性. 因此, 如果张量扰动是在大暴胀期间产生的, 并且如果总的 (张量加标量) 各向异性谱与大尺度数据 (COBE) 一致, 那么小尺度张量振幅将比大尺度的振幅要小. 因此, 在尺度 $l>100$ 时, 仅有标量存在, 此时各向异性谱将会与图 8.18 中的标准模型一样, 只是有一个较低的振幅.

8.7.3 独特的印记

我们要考虑的最后一组变量是重子密度 $\Omega_b h^2$、物质密度 $\Omega_m h^2$ 和宇宙学常数. 正如从图 8.19 中看到的, 这些变化都会使得各向异性谱有一个较大的变化. 在一定程度来说它们比前面提到的几个参数更难理解 (但是比较容易从数据中提取出来).

这些参量的任何一个都引起了功率谱波峰和波谷位置的小小的移动. 为了理解这些移动, 很有必要回忆一下在平坦宇宙中, 尺度为 k 上的不均匀性出现在 $l=k\eta_0$ 上, 而峰值出现在 $l_p\simeq k_p\eta_0\simeq n\pi\eta_0/r_s(\eta_*)$((8.25) 式, 另外 207 页中的讨论结果是 l_p 的实际值要低 25%). 图 8.20 中描绘了这个以物质和重子密度为函数的比值. 它对物质密度的依赖更敏感一些, 因此, 当物质密度下降时峰值间距会增加. 但是对重子密度也有一定程度的依赖. 随着密度的固定, 引入宇宙学常数不能改变声视界, 但是它对 η_0 有些影响, 因此峰值也会移动.

重子密度.除了由于声视界导致的功率谱侧移, 重子密度的改变也会影响峰值高度. 我们已经接触了各向异性谱以何种方式依赖重子密度. 从图 8.19 中可以清楚地看到, 最主要的是当重子密度大时, 奇数峰 (图中的第一个和第三个) 比偶数峰

高. 这是重子物质低频振荡的衍生物. 这种改变几乎是独一无二的, 它使得重子密度成为最容易从 CMB 中提取出的其中一个. 2001 年观测 (如,Pryke et al.,2001) 的结果给出 $\Omega_b h^2 = 0.022 \pm 0.04$, 这个限制毫无疑问将会被 WMAP 和 Plank 卫星的数据限制得更加精确. 由于 $\Omega_b h^2$ 带来的第二个变化是重子密度的增加降低了扩散长度. 因此, 一个较大的重子密度意味着阻尼向着小角度移动, 因此在高重子密度 $\Omega_b h^2$ 的模型中, 尺度 $l > 1000$ 上的各向异性谱会更大.

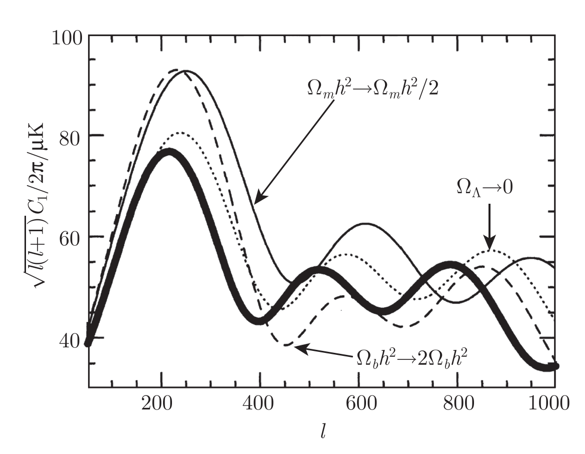


图 8.19　随着重子密度、物质密度和宇宙学常数变化而变化的各向异性谱. 基本模型与图 8.18 中的相同

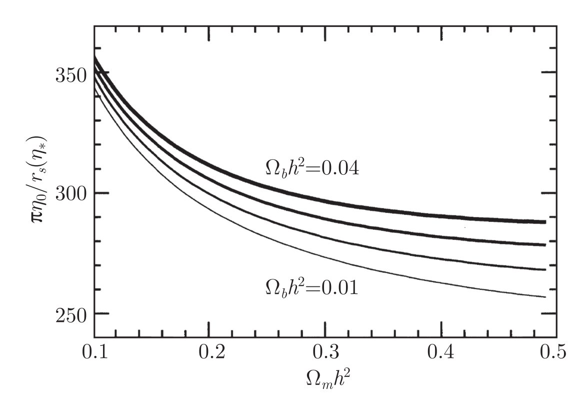


图 8.20　再复合时期的逆声视界. 在平坦宇宙中, CMB 中的声波峰值间距等于 $\pi\eta_0/r_s(\eta_*)$

宇宙学常数.宇宙学常数是一个较晚时期的现象. 它不在再复合时期附近, 因此不会对那个时候的扰动有影响. 因此, 宇宙学常数唯一可能的影响是对刚进入视界线的自由流动和最大角尺度的影响. 由于自由流动导致的变化在图 8.19 中可以看出. 如果没有宇宙学常数功率谱将会向小的角尺度移动. 在练习 13 中, 你将要通过

比较 Λ 宇宙和物质主导宇宙中的共形时间来解释这个小的移动. 图 8.19 也说明了在 Λ 宇宙中各向异性谱在小尺度上偏低. 这是大角度归一化的直接结果. 在 Λ 宇宙中, 有晚期的 ISW 效应, 它使得大角度上的各向异性有所增强. 如果我们在这些尺度上作归一化, 那么小尺度上的各向异性将会相应地变小.

物质密度.如果物质密度较低, 辐射与物质发生的时刻则离再复合更近, 因此在计算再复合时期的不均匀性时必须要考虑辐射密度. 尤其是, 由于辐射没有能力到达星系团导致的势能衰减为振荡提供了一个很强的动力. 因此, 此时的 $\Theta_0(\eta_*)$ 比一个纯物质主导的宇宙要大. 进一步说, 再复合之后, 因为势能不是常数,ISW 效应对最后的各向异性谱也有很大的影响. 因此, 如果物质密度低的话, 小尺度各向异性就会增加. 这个效应也已经被探测到, Pryke 等 (2001) 的观测有 $\Omega_m h^2 = 0.16 \pm 0.04$.

推 荐 读 物

仅在发现 CMB 之后的几年内, 大尺度的 Sachs-Wolfe 效应首次被 Sachs 和 Wolfe 于 1967 年预测到. 随后有几个小组开始从事紧密耦合极限处的各向异性的研究：Doroshkevich,Zel'dovich 和 Sunyaev(1978), Atrio-Barandela 和 Doroshkevich (1994), Jorgenson 等 (1995). 这部分的研究由 Seljak (1994) 及 Hu 和 Sugiyama (1995) 完善, 后者是本章中半解析方法的基础. 另外,Seljak 和 Zaldarriaga (1996) 介绍的 CMBFAST 是一个很重要的工具, 尤其在快速、精确的数据工作中. 扩散阻尼有时被称作 Silk 阻尼, 是由于 Silk (1968) 一文中认识到了它的重要性. 另外两个感兴趣的文章是 Zaldarriaga & Harari (1995)——它讨论了在阻尼尺度上的极化效应 (参考练习 7) 和 Hu & White (1997a)——它介于其他工作之间, 给出了适用于很宽范围参数的阻尼尺度.

过去的十年中有数百篇论文对各向异性谱是如何依赖宇宙学参数的问题给出解释. 我记得这个领域里的一个先驱 Dick Bond, 曾在 1992 年的一个关于早期 COBE 数据的会议上做了一个报告, 在报告中他挥动他的手穿过一个多维的参数空间, 并解释我们现在的目的是为通过这个空间找到方向. 在这些文献中最重要的是对曲率的依赖 (Kamionkowski, Spergel and Sugiyama, 1994), 第一峰值高度的简并 (Bond et al., 1994), 以及在小尺度信息上对简并的突破 (Jungman et al., 1995). 最近的文章中,Hu 等 (2000) 的文章是一篇很好的参考文献.

我已经忽略了一些重要的参量. 关于暗能量对 CMB 的影响还没有得到很好地研究：首先由 Coble, Dodelson 和 Frieman (1997) 接着由 Caldwell, Dave 和 Steinhardt (1998) 在更一般化的条件下研究. 文献 (Ma and Bertschinger, 1995; Dodelson, Gates and Stebbins, 1996) 中研究了大量中微子在 5% ~10% 的水平上对各向异性谱的影响. 由于张量造成的各向异性在被 COBE 观测到之后变成了一个热门

话题. 关于半解析的方法和许多关于将张量各向异性与参量联系起来的文献请参考文献 (Turner, White and Lidsey, 1993). 虽然再电离对于再复合之前的原初各向异性的作用已经得到了很好的理解, 但是出现了另一个关于次级各向异性的热门话题, 这个各向异性是在再电离之后产生的. 这些将会在下一代的实验中得到证明.

3k: *The Cosmic Microwave Background* (Partridge) 对本书中忽略的一些实验有很好的介绍. COBE 的发现性文章是 (Smoot et al., 1992),4 年的观测在 (Bennett et al., 1996) 一文中. 还有许多关于 COBE 数据分析的好文章. 我参考过的文献有 (Bunn and White, 1997), 它在利用 COBE 对物质功率谱归一化上用处很大, 还有 (Tegmark, 1997), 图 8.12 中的点就是来自这篇文章. 两个卫星试验是 Map(WMAP) (http:// map.gsfc.nasa.gov) 和 Planck (http:// sci.esa.int/planck/). 其中 Map 是 2001 年发射的, 而 Planck 将会在 2007 年发射.

练 习

1. 这本书的大部分都在致力于理解带有初始条件的绝热扰动, 第 6 章有对这个初始条件的推导. 另一类的扰动是带有初始条件 $\Theta_0 = \Psi = \Phi = 0$ 的等曲率扰动, 请说明这些初始条件意味着

$$\Theta_0(\eta_*) + \Psi(\eta_*) = 2\Psi(\eta_*). \tag{8.80}$$

2. 阻尼简谐振动方程是

$$m\ddot{x} + b\dot{x} + kx = 0. \tag{8.81}$$

如果 $k/m > (b/2m)^2$, 请求解此方程. 振动的频率是什么? 它与非阻尼 ($b = 0$) 的解的不同在哪儿? 除了对频率有所改变外非零的 b 还有什么其他的影响?

3. 当 $\Omega_b h^2 = 0.01, 0.02$ 时, $R(\eta_*)$ 是多少? 对于两个 $\Omega_b h^2$ 的值, 请画出以尺度因子为函数的声速.

4. 请说明声视界可以表达为共形时间的形式

$$r_s(\eta) = \frac{2}{3k_{\rm eq}}\sqrt{\frac{6}{R(\eta_{\rm eq})}}\ln\left\{\frac{\sqrt{1+R}+\sqrt{R+R(\eta_{\rm eq})}}{1+\sqrt{R(\eta_{\rm eq})}}\right\}, \tag{8.82}$$

其中 $k_{\rm eq}$ 在 (7.39) 式中给出.

5. 求解 (8.18) 式的 WKB 解.

$$\Theta_0 = A\mathrm{e}^{\mathrm{i}B} \tag{8.83}$$

其中 A 和 B 是实数. 说明 (8.18) 式的均匀部分可以分成两个方程, 分别是实数部分和虚数部分:

$$\text{Real}: \ -(\dot{B})^2 + \frac{\ddot{A}}{A} + \frac{\dot{R}}{1+R}\frac{\dot{A}}{A} + k^2c_s^2 = 0, \tag{8.84}$$

$$\text{Imaginary}: 2\dot{B}\frac{\dot{A}}{A} + \ddot{B} + \frac{\dot{R}}{1+R}\dot{B} = 0. \tag{8.85}$$

用实数部分以及 B 变化远远快于 A 的事实求解 B, 然后用虚数方程确定 A. 说明用这种方法得到的均匀解与 (8.21) 式中的简单振动解的不同在于有个因子 $(1+R)^{1/4}$.

6. 通过计算 (8.24) 式和 (8.26) 式中的积分求解再复合时期的关于 $\Theta_0+\Psi$ 和 Θ_1 的半解析解. 在求解中你需要引力势的表达式. Hu 和 Sugiyama(1995) 提供下面的表达式:

$$\Phi(k,y) = \bar{\Phi}(k,y)\{[1-T(k)]\exp[-0.11(ky/k_{\text{eq}})^{1.6}] + T(k)\}$$
$$\Psi(k,y) = \bar{\Psi}(k,y)\{[1-T(k)]\exp[-0.097(ky/k_{\text{eq}})^{1.6}] + T(k)\}$$

其中 $y \equiv a/a_{\text{eq}}$, $T(k)$ 是 BBKS 转移函数, 大尺度势能为

$$\bar{\Phi}(k,y) = \frac{3}{4}\left(\frac{k_{\text{eq}}}{k}\right)^2 \frac{y+1}{y^2}\bar{\Delta}_T(y),$$
$$\bar{\Psi}(k,y) = \frac{3}{4}\left(\frac{k_{\text{eq}}}{k}\right)^2 \frac{y+1}{y^2}(\Delta_T(y) + 0.65N_2/(1+y)). \tag{8.86}$$

最后, 两个函数 N_2 和 Δ_T 是

$$N_2(y) = -0.1\frac{20y+19}{3y+4}\frac{y^2}{y+1}\Phi_{ls} - \frac{8}{3}\frac{y}{3y+4} + \frac{8}{9}\ln[3y/4+1],$$
$$\Delta_T = \left[1.16 - \frac{0.48y}{y+1}\right]\Phi_{ls}\frac{y^2}{y+1}. \tag{8.87}$$

在这里, Φ_{ls} 是 (7.32) 式的大尺度解.

7. 我们在解决扩散阻尼的方法上忽略了极化的影响. 同样应用 8.4 节推导的 $\dot{\tau}^{-1}$ 展开, 这次考虑极化作用. 证明 (8.40) 式中的 8/9 变成了 16/15. 这个漂亮的结果是由 Zaldarriaga 和 Harari (1996) 得到的, 当时 Zaldarriaga 还是本科生.

8. 假定所有的与氢原子相关的电子都处于电离状态, 并设 $R=0$. 请估计一下 (8.40) 式中定义的阻尼尺度 k_D. 证明在这个极限条件下, 阻尼尺度由 (8.42) 式给出, 其中

$$f_D(y) = 5\sqrt{1+1/y} - \frac{20}{3}(1+1/y)^{3/2} + \frac{8}{3}\left[(1+1/y)^{5/2} - 1/y^{5/2}\right]. \tag{8.88}$$

9. 请证明

$$\int \mathrm{d}\Omega Y_{lm}(\hat{p})\mathcal{P}_l(\hat{p}\cdot\hat{k}) = \frac{4\pi}{2l+1}. \tag{8.89}$$

10. 从再复合时期的不均匀温度场 $\Theta_0(\vec{x},\eta_*)$ 或者 $\Theta_0(\vec{k},\eta_*)$, 到今天的各向异性 a_{lm}, 还有一个不同的方法可行.

(a) 假定我们从方向 $\hat{p}$ 上, 看到来自最后散射面的光子: $\Theta(\vec{x}_0,\hat{p},\eta_0) = (\Theta_0+\Psi)(\vec{x} = \chi_*\hat{p},\eta_*)$, 其中 x_0 是观测者的位置. 对等式右侧进行傅里叶变换, 对左边球谐展开可以得到

$$\sum_{lm} a_{lm}Y_{lm}(\hat{p}) = \int \frac{\mathrm{d}^3k}{(2\pi)^3}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\vec{k}\cdot\hat{p}\chi_*}(\tilde{\Theta}+\tilde{\Psi})(\vec{k},\eta_*). \tag{8.90}$$

现在用方程 (C.16) 展开指数项, 然后用方程 (C.12) 展开勒让德多项式. 使 $Y_{lm}(\hat{p})$ 的系数相等来得到 a_{lm} 的表达式.

(b) 对 (a) 中得到的 a_{lm} 开平方, 利用期望值得到关于 C_l 的表达式. 建议先回顾一下 (8.68) 式中带有 Θ_l 的表达式, Θ_l 由 (8.56) 式中的第一项给出.

11. 一个简单的估计 COBE 中 δ_H 的归一化是固定 C_{10}. 试着从图 8.12 中估计 C_{10}, 并用它和 Sachs-Wolfe 公式,(8.75) 式, 去估计平坦、物质主导宇宙中的 δ_H; 并与 (8.76) 式中给出的数做比较.

12. 证明当将所有的模式综合起来考虑时, 来自单极矩和偶极矩的交叉项为零. 单极矩与 $j_l(k\eta_0)$ 成正比, 而偶极矩与 $j_l'(k\eta_0)$ 成正比. 试计算下面的三个积分项

$$\int_0^\infty \mathrm{d}x j_l j_l; \quad \int_0^\infty \mathrm{d}x j_l j_l'; \quad \int_0^\infty \mathrm{d}x j_l' j_l'. \tag{8.91}$$

证明平方项 (j_l^2 和 $(j_l')^2$) 的积分比交叉项的积分 $j_l j_l'$ 大很多, 并求从 $l=10$ 到 $l=50$ 的积分.

13. 如果宇宙是平坦的且带有宇宙学常数而不是平坦物质主导的宇宙, 计算 CMB 各向异性谱的波峰和波谷位置的移动. 在计算中保持声视界固定 $\Omega_m h^2 = 0.15$. 峰值位置仅仅依赖于到最后散射面的距离 $\eta_0 - \eta_*$. 考虑两个平坦模型：(i)$\Omega_\Lambda = 0$(因此 $\Omega_m = 1$), (ii) $\Omega_\Lambda = 0.7$(因此 $\Omega_m = 0.3$). 在这两种条件下, 要保持 $\Omega_m h^2$ 不变, h 的值应该是多少？请确定在每个条件下的 $\eta_0 - \eta_*$(在宇宙学常数非零的条件下, 必须要作数值积分). 将得到的结果与拟合公式 $\eta_0 \propto 1 + \ln(\Omega_m^{0.085})$ 做比较, 并与图 8.19 中的谱线移动值比较.

14. 在平坦宇宙学模型中, 暗物质能量密度 $\Omega_{\mathrm{de}} = 0.7$, $\omega = -0.5$, 请计算此条件下的共形时间. 将各向异性谱的预期移动值与前一问题宇宙学常数模型中的做比较.

15. 请用玻尔兹曼方程确定再电离效应. 对于光子的玻尔兹曼方程, 忽略引力势、速度和 Θ_0. 以功率谱 $\Theta_l(\eta)$ 开始一直演化到今天. 证明这种演化实际会受到 $\mathrm{e}^{-\tau}$ 的抑制.

16. 假设再复合是瞬时发生的, 请证明由张量扰动 ((4.116) 式) 带来的第 l 项的解是

$$\Theta_l^T = -\frac{1}{2}\int_{\eta_*}^{\eta_0} \mathrm{d}\eta \dot{h} j_l[k(\eta_0 - \eta)]. \tag{8.92}$$

17. 用 (4.115) 式给出的张量模式的分解式求出对来自 $\Theta_l^T(k)$ 的 C_l 的作用. 也就是说, 证明与 (8.68) 式中关于张量的类似的公式

$$\begin{aligned} C_{l,i}^T = &\frac{(l-1)l(l+1)(l+2)}{\pi}\int_0^\infty \mathrm{d}k k^2 \\ &\times \left| \frac{\Theta_{l-2,i}^T}{(2l-1)(2l+1)} + 2\frac{\Theta_{l,i}^T}{(2l-1)(2l+3)} + \frac{\Theta_{l+2,i}^T}{(2l+1)(2l+3)} \right|^2, \end{aligned} \tag{8.93}$$

其中, i 表示两个不同的成分 “+” 和 “×”.

18. 请确定大暴胀时期由引力波产生的各向异性谱.

(a) 结合之前两个问题的结果, 练习 5.12 中的解和 (6.100) 式引力波的原初振幅, 求解由大暴胀产生的引力波导致的大角尺度 C_l.

(b) 张量的各向异性通常以下式参数化

$$r \equiv \frac{C_2^T}{C_2^S} \tag{8.94}$$

其中, C_2^T 是由张量引起的四极矩的改变,C^S 是由标量引起的四极矩的改变.① 我们已经在 (8.75) 式中推导出了标量 C_2 的表达式. 求解 C_2^T 并计算慢滚参数为 ϵ 首阶的 r.

(c) (6.104) 式和 (b) 中的结果意味着在两个观测量 n_T 和 r 间存在一致性关系——这是对于大暴胀有力的预测. 这个一致性关系是什么?

① 注意, 这种关系不是通用的, r 有时 (更精确的限制中) 被定义为在 $l \sim 10$ 时的比值.

第 9 章　非均匀性的探测

前两章我们研究的功率谱—密度场的 $P(k)$ 和各向异性 C_l—是各种宇宙学模型最重要的检验. 计算 $P(k)$ 最直接的方法是：进行红移巡天, 记录星系的角位置和红移 (这是计算径向距离的一种方法). 但是, 红移巡天还面临着一系列的问题. 首先遇到的问题是确定星系的红移是一件旷日持久的事情, 比较而言, 星系的角位置更易于确定. 例如, 进行包含一万个星系的红移巡天所消耗的时间, 可以得到一百万个星系的角位置. 而星系的角度巡天通常可以补偿径向信息的不足. 事实上, 一些研究认为大尺度巡天中最有用的信息来自于角巡天. 有一点是清楚的, 那就是, 我们必须掌握利用角相关函数 $\omega(\theta)$ 作出预测的能力. 在 9.1 节中, 我们可以看到, 角相关函数其实就是三维功率谱的一个积分.

相比较时间的消耗, 红移巡天还面临着更复杂的问题. 利用红移可以合理地推测星系到我们的径向距离, 但该推测并不是足够精确的. 只有在星系于共动坐标系中保持静止的情况下, 该星系速度才唯一地由哈勃膨胀所决定. 实际情况是, 宇宙中绝大多数星系存在不可忽略的本动速度; 这也就是说, 它们在坐标系中是移动的. 一个星系的全部速度可以表示为

$$\vec{v} = \vec{v}_{\rm pec} + \hat{x} v_{\rm H} \tag{9.1}$$

其中, $v_H \equiv \chi {\rm d}a/{\rm d}t = \chi a H$ 表征哈勃速度. χ 是观测者与遥远星系之间的共动距离, 其间的物理距离是 $a\chi$. 在忽略本动速度的前提下, $\hat{x} \cdot \vec{v}/H$ 是一个完美的距离指针. 然而, 实际情况是, 本动速度是存在的, 由星系退行速度得到的距离并不能真正代表观测者和星系之间的径向距离.

星系本动速度的引入解决了这一问题. 在线性理论中, 星系本动速度取决于其周围的密度场, 因此我们可以修正由红移得出的距离的畸变. 事实上, 我们可以走得更远, 利用这些畸变来研究扰动的增长, 即认为与密度场相关的速度取决于扰动增长率. 由于扰动增长率取决于宇宙中的物质密度 ω_m, 因此研究红移空间的星系分布是计算 Ω_m 最有前途的方式之一.

最后, 得到质量密度信息的另一个有效途径是研究星系团. 严格地说, 这个话题涉及密度场的非线性演化, 超出了本书论述的范围. 但是, 研究星系团数密度的 Press-Schechter 理论只是稍稍偏离了线性理论, 并且被证实是很精确的预测. 进一步说, 随着天文技术手段的不断进步, 星系团的研究突飞猛进. 本章 9.5 节介绍了 Press-Schechter 理论的基本预言和冷暗物质模型的应用.

9.1 角相关函数

图 9.1 展示了通过 APM 巡天 (Automated Plate Measuring Survey) 观测到的超过一百万个星系的角位置. 在类似的角度巡天中, 究竟何种统计量可以与理论相联系呢? 最简单的一种统计是两点相关函数, 即实空间中的角相关函数 $w(\theta)$. 在傅里叶空间中, 相关函数是 w 的傅里叶变换 ——$P_2(l)$, 它是一个二维功率谱. 在本节中, 我们来计算这些重要的相关函数, 并把它们与三维功率谱联系起来.

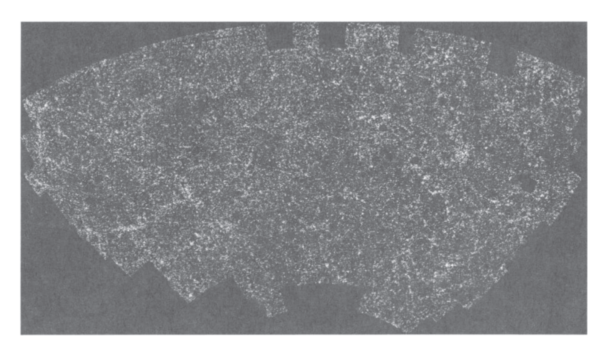


图 9.1 APM 巡天中星系的分布. 其中涂黑的区域代表在本次巡天中没有观测的天区

首先, 我们介绍一些标记法. 图 9.2 展示了距离我们的共动距离 $\chi(z)$(方程 (2.42) 式) 处的一个星系的几何示意图. 其中, 我们规定 z 轴指向星系分布的中心. 在垂直于 z 轴的平面上, 星系的位置由二维矢量 $\vec{\theta}(\theta_1, \theta_2)$ 决定. 因此, 三维位置矢量 $\vec{x}$ 可表示为

$$\vec{x}(\chi(z), \vec{\theta}) = \chi(z)(\theta_1, \theta_2, 1). \tag{9.2}$$

所有星系位于 z 轴附近的假设在大角度范围巡天中是不成立的. 例如, 图 9.1 展示的巡天覆盖了 50×100 平方度. 从这些数据中, 我们可以测量 10° 或 0.17 rad 的相关函数, 它确定小于 1.

我们计算沿视线方向的所有星系, 对 $\chi(z)$ 积分. 因此, 在角位置 $\vec{\theta}$ 的密度扰动 (高于平均密度的超出部分) 是

$$\delta_2(\vec{\theta}) = \int_0^{\chi_\infty} \mathrm{d}\chi W(\chi) \delta(\vec{x}(\chi, \vec{\theta})) \tag{9.3}$$

公式中的下标 “2” 表示它左方的字母 δ 是角密度扰动, 或称为二维密度扰动, 公式右边的 δ 表示三维的密度扰动 (接下来, 我将延续这种表示. 例如, P_2 代表二维功率谱, P 代表三维功率谱). χ 的积分上限对应于红移 z 趋向于无穷, 相当于在平坦的、物质为主的宇宙中, $\chi_\infty = 2/H_0$. 实际上, 巡天的面积和深度都是有限的, 这些巡天在红移 $z \lesssim 0.5$ 处得到了最多的宇宙学信息. 选择函数 $W(\chi)$ 涵盖了

这些信息, 它表征观测一个距离观测者的共动距离是 χ 的星系的可能性. 距离太远的星系由于太暗而不能被巡天观测到; 然而在低红移处也相对很少观测到星系, 这是由于巡天体积是很有限的. 因为选择函数是一个可能性, 它应该被归一化, 即 $\int_0^{\chi_\infty} \mathrm{d}\chi W(\chi) = 1$.

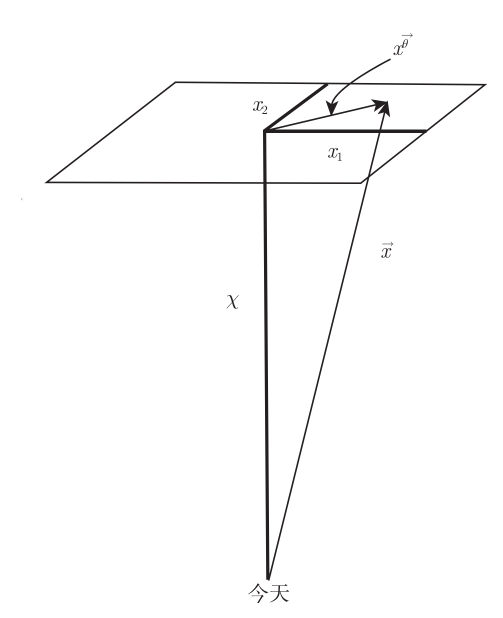


图 9.2　一个遥远的星系位于相对于今天在坐标系原点的我们观测者的位置 $\vec{x}$ 处，这个位置也可以表示为相对于星系红移的共动距离 $\chi(z)$。$x_1 - x_2$ 平面垂直于适当选择的 x_3 轴. 在这个平面中，一个星系的位置由两维矢量 $\chi\vec{\theta}$ 给出，所以 $\vec{x} \simeq \chi(z)(\theta_1, \theta_2, 1)$

$\vec{\theta}$ 的二维矢量共轭是 $\vec{l}$, 所以 $\delta_2(\vec{\theta})$ 的傅里叶变换是

$$\tilde{\delta}_2(\vec{l}) = \int \mathrm{d}^2\theta \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\vec{l}\cdot\vec{\theta}} \delta_2(\vec{\theta}). \tag{9.4}$$

二维功率谱的定义与三维类似,

$$\langle \tilde{\delta}_2(\vec{l}) \tilde{\delta}_2^*(\vec{l}') \rangle = (2\pi)^2 \delta^2(\vec{l} - \vec{l}') P_2(l); \tag{9.5}$$

这里, $\delta^2()$ 是二维狄拉克 δ 函数, 不要与高密度 $\delta_2(\vec{\theta})$ 相混淆. 通过积分, 我们可以把二维功率谱表示为

$$\begin{aligned} P_2(l) &= \frac{1}{(2\pi)^2} \int \mathrm{d}^2 l' \langle \delta_2(\vec{l}) \delta_2^*(\vec{l}') \rangle \\ &= \frac{1}{(2\pi)^2} \int \mathrm{d}^2 l' \int \mathrm{d}^2\theta \int \mathrm{d}^2\theta' \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\vec{l}\cdot\vec{\theta}} \mathrm{e}^{\mathrm{i}\vec{l}'\cdot\vec{\theta}'} \\ &\quad \times \int_0^{\chi_\infty} \mathrm{d}\chi W(\chi) \int_0^{\chi_\infty} \mathrm{d}\chi' W(\chi') \langle \delta(\vec{x}(\chi, \vec{\theta})) \delta(\vec{x}'(\chi', \vec{\theta}')) \rangle. \end{aligned} \tag{9.6}$$

对 l' 的积分可以产生 $(2\cdot\pi)^2$ 倍 θ' 的狄拉克 delta 函数, 括号项代表了三维相关函数,

$$\xi(\vec{x}-\vec{x}') \equiv \langle\delta(\vec{x})\delta(\vec{x}')\rangle$$
$$= \int \frac{\mathrm{d}^3k}{(2\pi)^3} P(k)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\vec{k}\cdot(\vec{x}-\vec{x}')}. \tag{9.7}$$

这里的平均 $\langle\cdots\rangle$ 是对所有密度场的平均. 在小距离范围内, 我们期望星系由于引力作用聚集成团, 这时 ξ 是正数. 随着距离的增大, 相关性消失, ξ 越来越小, 最后成为负值. 上式第二行表示相关函数是功率谱的傅里叶变换 (练习 1).

对 (9.6) 式中的 θ' 积分可以得到,

$$P_2(l) = \int \mathrm{d}^2\theta \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\vec{l}\cdot\vec{\theta}} \int_0^{\chi_\infty} \mathrm{d}\chi W(\chi) \int_0^{\chi_\infty} \mathrm{d}\chi' W(\chi') \int \frac{\mathrm{d}^3k}{(2\pi)^3} P(k)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\vec{k}\cdot[\vec{x}(\chi,\vec{\theta})-\vec{x}(\chi',0)]}. \tag{9.8}$$

上式最后部分的指数展开为 $\mathrm{i}[k_1\chi\theta_1 + k_2\chi\theta_2 + k_3(\chi-\chi')]$, 因此对角度 $\vec{\theta}$ 的积分可以得到狄拉克 delta 函数, 令 $l_1 = \chi k_1, l_2 = \chi k_2$. 我们可以使用这些 δ 函数对 k_1、k_2 进行积分, 本例中在分母项加入 χ^2 因子, 可以得到

$$P_2(l) = \int_0^{\chi_\infty} \mathrm{d}\chi \frac{W(\chi)}{\chi^2} \int_0^{\chi_\infty} \mathrm{d}\chi' W(\chi') \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\mathrm{d}k_3}{(2\pi)} P\left(\sqrt{k_3^2 + l^2/\chi^2}\right) \mathrm{e}^{\mathrm{i}k_3[\chi-\chi']}. \tag{9.9}$$

到此为止, 我们一直在纠结于数学问题. 为完成功率谱的计算, 我们需要介绍一些物理原理. 在这里声明, 对积分有贡献的三维傅里叶模式是那些 k_3 远小于 l/χ 的模式. 要弄清这一点, 我们首先估计 θ 的各种共轭 l. 大体上看, 巡天可以探测到的角范围大概是 l^{-1} 的量级①. 所以我们对小角度近似感兴趣, 即 $l/\chi \sim l/(\chi\theta) \gg 1/\chi$. 现在我们来关注图 9.3. 从图中我们可以看到, 在纵向波数 k_3 远大于 χ^{-1} 的情况下, 由于沿视线方向相互抵消作用的存在, 模式不会产生角相关. 只有在 k_3 模数小于 χ^{-1} 的情况下才会产生角相关. 因此, 横向波数 l/χ 远大于相应的纵向波数, 我们可以把 l/χ 看作三维功率谱的辐角 (参见练习 2). 根据这种近似, 对 k_3 积分得到了 $\chi-\chi'$ 范围内的狄拉克 delta 函数,

$$P_2(l) = \int_0^{\chi_\infty} \mathrm{d}\chi \frac{W^2(\chi)}{\chi^2} P(l/\chi). \tag{9.10}$$

上式是沿视线方向积分的二维功率谱. 我们在此进行变换, 使得 $\chi \to k \equiv l/\chi$, 上式积分可写为

$$P_2(l) = \frac{1}{l}\int_0^{\infty} \mathrm{d}k P(k) W^2(l/k). \tag{9.11}$$

①从这个意义上来说, 研究各向异性时 l 与第 8 章介绍的勒让德多项式相似. 同样,$P_2(l)$ 与 C_l 类似; 在练习 5 中你将会证明在小尺度上它们是等价的.

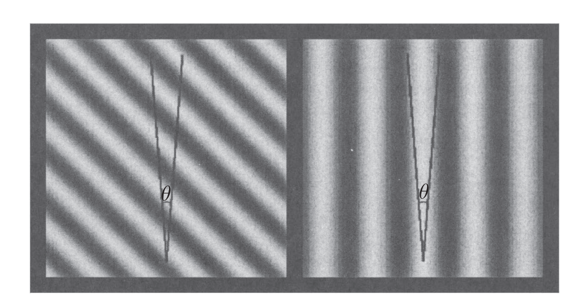


图 9.3 2 个平面波扰动和它们对二维功率谱的影响. 左图展示了纵向波数 $k_3 \gg \chi^{-1}$ 的扰动 (竖直方向是 z 轴方向). 右图展示了 $k_3 \sim \chi^{-1}$ 的扰动. 由于沿视线方向相互抵消作用的存在, 左图所示情况下的 k_3 模式的角相关可以忽略不计

角相关函数是二维功率谱的傅里叶变换, 因此,

$$w(\theta) = \int \frac{\mathrm{d}^2 l}{(2\pi)^2} \mathrm{e}^{\mathrm{i}\vec{l}\cdot\vec{\theta}} P_2(l). \tag{9.12}$$

P_2 仅仅依赖于 $\vec{l}$ 的大小, 对 l 积分的角度部分是 $\int_0^{2\pi} \mathrm{d}\phi \mathrm{e}^{\mathrm{i}l\theta\cos\phi}$, 它正比于零阶贝塞尔函数 $J_0(l\theta)$, 因此

$$\begin{aligned} w(\theta) &= \int_0^\infty \frac{\mathrm{d}l}{2\pi} l P_2(l) J_0(l\theta) \\ &= \int_0^\infty \mathrm{d}k k P(k) F(k,\theta), \end{aligned} \tag{9.13}$$

上式第二行是依据被积分量的变化而得出的. 这里需要注意的角相关函数的核函数是

$$F(k,\theta) \equiv \frac{1}{k} \int_0^\infty \frac{\mathrm{d}l}{2\pi} J_0(l\theta) W^2(l/k). \tag{9.14}$$

图 9.4 画出了两个巡天的核函数. 核函数是一个关于 $k\theta$ 的函数 (见练习 3). 当 $k\theta$ 很小时, 核函数可以看作是一个常数, 随后开始衰减振荡. 当 k 很小时它的作用受到抑制, 这是因为 (9.13) 式中所示的积分是对 $kP(k)$ 的积分, 当 $k \to 0$ 时 $kP(k) \to 0$. 因此, 对 $w(\theta)$ 贡献最大的模式是那些波数量级约是在核函数中的首次转置量级的波数, 对 APM 巡天来说约是 $k\theta \sim 0.2h\mathrm{Mpc}^{-1}$ 弧度的量级,SDSS 深度巡天比 APM 低 1/3. 这意味着在 APM 巡天中 5 度左右巡天的角相关函数对波数 $k = 0.04h\mathrm{Mpc}^{-1}$ 的功率最敏感. 在深度巡天中, 对 $w(\theta)$ 起作用的波数要更小一些. 这表明：在深度巡天中, 同样的角度可以探测到更大的物理尺度.

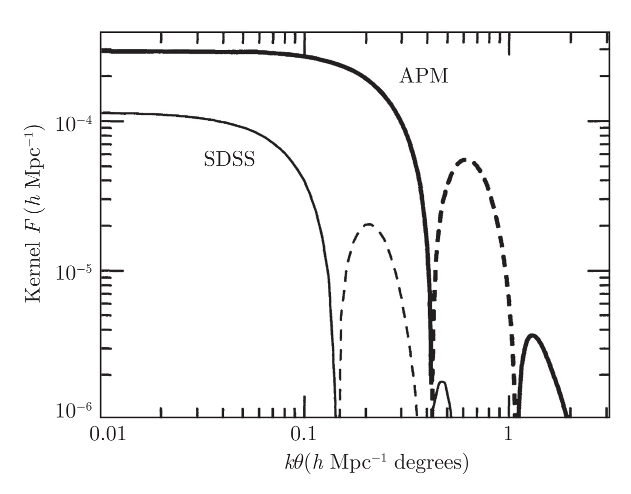


图 9.4 两个巡天中三维功率谱的角相关函数的核函数. 点线表示核函数是负值, 实线表示核函数是正值. APM 巡天可以探测视星等亮于 $m = 20$ 等的星系;SDSS 巡天可以探测到更暗的星系, 它的视星等探测极限大约是 $m = 23$ 等

图 9.5 展示了 APM 巡天中角相关函数的计算. 从中得出的最重要的结论是: 标准的冷暗物质模型 (即 $\Omega_m = 1, h = 0.5$) 与数据吻合度较差.Maddox 等 1990 年写了一篇计算相关函数的文章, 其中的引言部分提到: 大尺度团比冷暗物质模型预测的要多. sCDM 自 20 世纪 80 年代早期提出开始就面临很多问题, 但其真正的厄运来自与 APM 巡天数据的不符. 许多人做了大量长期、艰苦的工作, 试图寻找各种巡天中的系统误差, 但都不能解释 sCDM 模型所预测的大尺度团数量与观测严重不符的问题. 尽管如此, 我想强调的是, sCDM 模型并非如你想象的那样不堪. 现在来看图 9.5 中所示的 ΛCDM 模型所做的预测. 尽管 ΛCDM 与观测数据的符合度要远远好于 sCDM, 但在大尺度端与小尺度端仍存在明显的不符. 小尺度端的不符是可以理解的, 因为我用线性功率谱来计算 $w(\theta)$. 正如我们在第 7 章 (练习 10) 中所提到的, 在 $k \sim 0.2h\mathrm{Mpc}^{-1}$ 的尺度上, 非线性开始变得重要. 当 $\theta \sim 1^\circ$ 时, 在 APM 巡天中这些小尺度对 $w(\theta)$ 开始贡献作用. 为了更公平地比较这些数据, 我们需要考虑非线性部分的贡献. 我本人没有做过这部分的工作, 因此不能严格地证明小角度端的不符. 在大角度端, 人们开始认识到数据被过度解释了. 基本问题是大角度端的数据点是高度相关的, 由此导致了数据与 ΛCDM 模型在大角度端的轻微不符看上去比实际上更严重.

转置角相关函数可以得到三维功率谱, 从 APM 巡天得到的具体结果参见图 9.6 的上图. 我们将在第 11 章讨论转置方法. 在此, 大家姑且认为图 9.6 中的点是一系列文章的结果, 但中间部分数据的误差棒被明显低估了. 在大尺度部分, 非线性效应可以忽略, 并且质量密度扰动和星系密度扰动之间的关系很简单, 因此, 我们仅使用

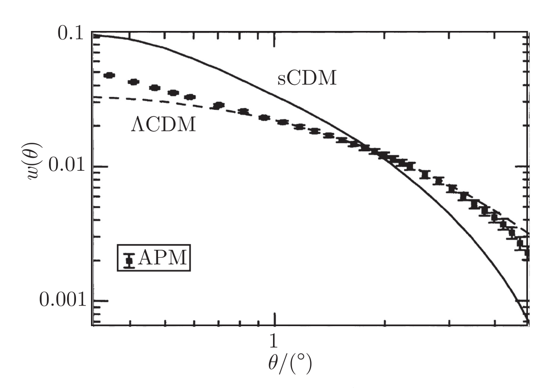


图 9.5　APM 巡天中的角相关函数和两个理论模型. 结果显示, 标准冷暗物质模型 (sCDM)(实线所示) 与数据符合较差, 宇宙学常数 ($\Omega_\Lambda = 0.7$) 的模型与数据符合较好. 数据与 Λ CDM 模型在小尺度与大尺度端存在明显不符

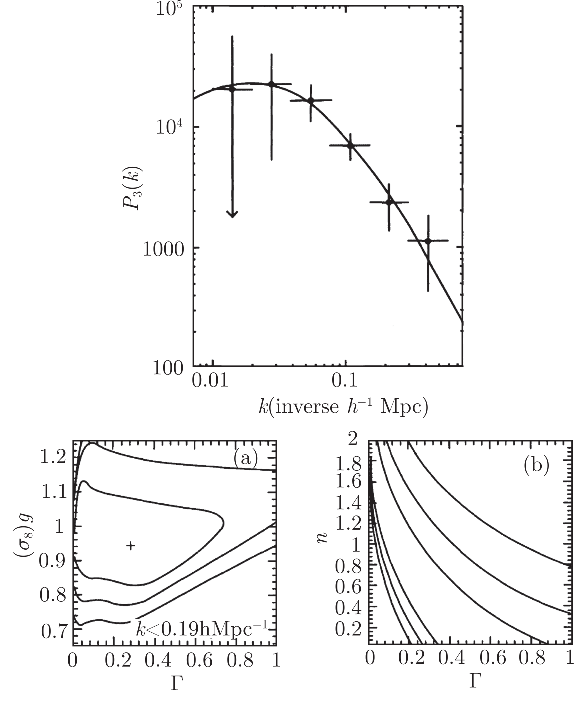


图 9.6　从 APM 巡天 (Efstathiou and Moody, 2001) 中得到的结果. 上图展示了从角相关函数中得到的三维功率谱. 曲线表示在 $\Gamma(\simeq \Omega_m h) = 0.2$ 的 CDM 模型中, 通过归一化来拟合数据. 下图展示了通过功率谱对 CDM 模型所做的限制. 其中的形状参数 Γ、振幅 σ_8、原初功率谱 n 是三个变化的参数. 等高线分别是 1 个、2 个和 3 个 σ 区间. 左下图表示对 n 积分后的限制; 右下图表示对振幅积分后的限制. 标准 CDM 模型规定 $n = 1, \Gamma = 0.5$, 归一后的 $\sigma_8 = 1.15$

大尺度的结果. 基于这一思想, Efstathiou 和 Moody 用大尺度数据在 2001 年的工作中对 CDM 模型进行了限制, 结论展示在图 9.6 的下图中. 在第 7 章中, 我们发现,CDM 转移函数只依赖于 $k/k_{\rm eq}$. 因为 $k_{\rm eq}$ 的尺度等同于 $\Omega_m h^2$, 又因为巡天中对波数 k 的计算所采用的单位是 h Mpc^{-1}, 因此 $\Omega_m h$ 决定了功率谱的形状. 正是因为这个原因, 在拟合大尺度结构数据时通常设定结构参数 $\Gamma \equiv \Omega_m h$(有时为了解释重子效应要做一些修正, 参加练习 8). $h = 0.5, \Omega_m = 1$ 的标准 CDM 模型对应 $\Gamma = 0.5$; 假设原初功率谱的系数 $n = 1$, 则图 9.6 的下部右侧图说明 sCDM 被排除在 2 个 sigma 之外. 而 ΛCDM 模型得到 $\Gamma \simeq 0.2$, 在 n 接近 1 的情况下, 这是一个更好的拟合结果.

9.2 本 动 速 度

在线性理论中, 速度与它周围的高密度有简单的对应关系. 首先, 我们在本节导出该对应关系; 然后, 围绕该问题做更深一步的讨论. 我们将会发现, 通过计算本动速度场和密度场, 我们可以推测物质密度 Ω_m 现在时刻的值.

在线性理论中, 我们已经推导出速度场方程. 在进入视界后, 连续性方程 (4.103) 式简化为

$$\dot{\delta} + \mathrm{i}kv = 0. \tag{9.15}$$

我们已经知道在晚期 delta 的演化与增长因子 D_1 有关, 因此

$$v(k,\eta) = \frac{\mathrm{i}}{k}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\eta}\left[\frac{\delta}{D_1}D_1\right] = \frac{\mathrm{i}\delta(k,\eta)}{kD_1}\frac{\mathrm{d}D_1}{\mathrm{d}\eta}. \tag{9.16}$$

通常定义一个无维度的线性增长率将速度与密度联系起来,

$$f \equiv \frac{a}{D_1}\frac{\mathrm{d}D_1}{\mathrm{d}a}. \tag{9.17}$$

因为 $\mathrm{d}/\mathrm{d}\eta = a^2 H\mathrm{d}/\mathrm{d}a$, 所以速度和密度的关系为

$$v(k,a) = \frac{\mathrm{i}faH\delta(k,a)}{k}. \tag{9.18}$$

通过 (7.77) 式可以计算出线性增长率. 关于速度场的大多数探测都被限制在 $z \lesssim 0.1$ 的范围内, 因此可以忽略增长率的宇宙学演化, 从而得出合理的 f 近似值. 图 9.7 表明现时刻的线性增长率是物质密度的函数. 对于 Ω_m 值很小的情况是不存在增长率的, 这是因为, 靠质量坍缩形成的高密度区域速度低于假设存在临界物质密度的情况. 这意味着, 低密度宇宙中的密度扰动对坍缩中正在下落的物质施加

了更弱的引力拖拽力. 图 9.7 表明, 增长率仅依赖于物质密度, 或者说不依赖于宇宙学常数. 其近似表示为

$$f = \Omega_m^{0.6} \tag{9.19}$$

练习 7 展示了一种更为精确的拟合形式.

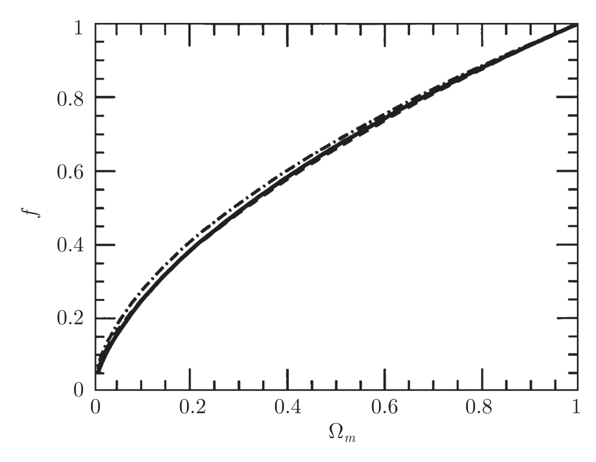


图 9.7　作为物质密度函数的线性增长率. 图中展示了三条曲线, 由于距离太近而几乎不能分辨. 实线对应开放宇宙 ($\Omega_\Lambda = 0$); 点-虚线对应平坦宇宙 ($\Omega_\Lambda = 1 - \Omega_m$); 虚线表示 $\Omega_m^{0.6}$

(9.18) 式表示的密度–速度关系中有两点需要特别注意. 第一点,(9.18) 式中的速度项指的是平行于 $\vec{k}$ 的速度的傅里叶部分. 在低红移处, (9.18) 式可以变为

$$\vec{v}(\vec{k}) = \mathrm{i} f H_0 \delta(\vec{k}) \frac{\vec{k}}{k^2}. \tag{9.20}$$

第二点, 上文所讨论的密度–速度关系只在线性理论中成立. 这就意味着那些意图从对速度的研究中提取信息的人们遇到了一个大问题, 即速度最易从小尺度结构中获得, 但是却最适用于大尺度理论.

9.3　本动速度的直接测量

众多巡天直接计算了本动速度. 计算径向速度是相对简单的: 这只需要观测星系光谱的红移即可. 困难的是, 单独计算组成径向速度的两个部分, 即哈勃膨胀引起的径向速度和星系的本动速度引起的径向速度. 为了扣除哈勃膨胀带来的对径向速度的影响, 我们需要知道除红移之外的其他的星系距离信息. 那么, 距离指针的精度多高才有效呢? 让我们做一个简单的估算, 典型的本动速度约是 500 km/s; 对于一个位于距离 χ 处的星系而言, 哈勃速度是 $H_0\chi = 100\ \mathrm{km\ sec}^{-1} h(\chi/\mathrm{Mpc})$. 因此, 假设一个星系距我们的距离是 50 Mpc, 那它的哈勃膨胀速度大约是本动速度的

10 倍. 在这种情况下, 该星系距离指针的精度大约要到 10%的量级. 事实上, 这是人们所能希望的最好情况. 因此, 在速度巡天中, 50Mpc 大约是可期望的最远距离.

存在很多种方法可以从速度巡天中提取有用的宇宙学信息, 其中我所关心的是：两点函数. 大速度情况下, 巡天可以用来计算相关函数,

$$\xi_v(\vec{x}_1, \vec{x}_2) \equiv \langle \vec{v}(\vec{x}_1) \cdot \hat{x}_1 \vec{v}(\vec{x}_2) \cdot \hat{x}_2 \rangle, \tag{9.21}$$

这里, 径向部分 $\vec{v} \cdot \vec{x}$ 的出现是因为 v 和 x 是仅有的可以用红移计算的量. 让我们用线性理论计算这个相关函数. 我们将会看到它是功率谱的积分. 和我们在 9.1 节中讨论的星系角相关函数类似, 径向速度相关函数是功率谱的探针. 高精度的本动速度测量面临诸多观测方面的障碍. 然而, 物质功率谱测量的希望很诱人 (该速度来自物质, 跟星系可能一致也可能不一致), 就如对应于描述星系功率谱的 $\omega(\theta)$, 本动速度巡天很可能将继续在宇宙学中占有很重要的地位.

为计算速度相关函数, 我们对 (9.21) 式中出现的速度项作傅里叶变换, 得到

$$\xi_v(\vec{x}_1, \vec{x}_2) = \int \frac{\mathrm{d}^3 k}{(2\pi)^3} \mathrm{e}^{\mathrm{i}\vec{k}\cdot\vec{x}_1} \int \frac{\mathrm{d}^3 k'}{(2\pi)^3} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\vec{k}'\cdot\vec{x}_2} \langle \vec{v}(\vec{k}) \cdot \hat{x}_1 \vec{v}^*(\vec{k}') \cdot \hat{x}_2 \rangle. \tag{9.22}$$

利用 (9.20) 式和一个等式关系 $\langle \delta(\vec{k}) \delta^*(\vec{k}') \rangle = (2\pi)^3 \delta^3(\vec{k} - \vec{k}') P(k)$, 可以得到

$$\xi_v(\vec{x}_1, \vec{x}_2) = f^2 H_0^2 \int_0^\infty \frac{\mathrm{d}k k^2}{(2\pi)^3} P(k) \int \mathrm{d}\Omega_k \mathrm{e}^{\mathrm{i}\vec{k}\cdot(\vec{x}_1 - \vec{x}_2)} \frac{\vec{k} \cdot \hat{x}_1 \vec{k} \cdot \hat{x}_2}{k^4}. \tag{9.23}$$

一种进行角度积分的方法是在积分中写出 $\vec{k}$,

$$\vec{k} \mathrm{e}^{\mathrm{i}\vec{k}\cdot\vec{x}} = \frac{1}{\mathrm{i}} \frac{\partial}{\partial \vec{x}} \mathrm{e}^{\mathrm{i}\vec{k}\cdot\vec{x}} \tag{9.24}$$

这里,

$$\vec{x} \equiv \vec{x}_1 - \vec{x}_2. \tag{9.25}$$

然后对角度进行积分, 注意这里的 e 指数不存在方位角依赖性. $\mathrm{e}^{\mathrm{i}kx\mu}$ 对 μ 的积分是 $4\pi j_0(kx)$,((C.15) 式) 因此得到,

$$\xi_v(\vec{x}_1, \vec{x}_2) = -f^2 H_0^2 \hat{x}_{1,i} \hat{x}_{2,j} \int_0^\infty \frac{\mathrm{d}k}{2\pi^2 k^2} P(k) \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} j_0(kx). \tag{9.26}$$

这里的一阶偏微分是

$$\frac{\partial j_0(kx)}{\partial x_j} = \frac{\partial (kx)}{\partial x_j} j_0'(kx) = k \frac{x_j}{x} j_0'(kx) \tag{9.27}$$

这里,j_0' 的意思是对 kx 求导. 二阶导数可表示为

$$\frac{\partial}{\partial x_i} \left[k \frac{x_j}{x} j_0'(kx) \right] = k^2 \left[\{\delta_{ij} - \hat{x}_i \hat{x}_j\} \frac{j_0'(kx)}{kx} + \hat{x}_i \hat{x}_j j_0''(kx) \right]. \tag{9.28}$$

速度相关函数变为

$$\xi_v(\vec{x}_1,\vec{x}_2) = -f^2H_0^2\hat{x}_{1,i}\hat{x}_{2,j}\int_0^\infty \frac{\mathrm{d}k}{2\pi^2}P(k)\left[\{\delta_{ij}-\hat{x}_i\hat{x}_j\}\frac{j_0'(kx)}{kx}+\hat{x}_i\hat{x}_j j_0''(kx)\right]$$

$$\equiv \hat{x}_{1,i}\hat{x}_{2,j}\{\delta_{ij}-\hat{x}_i\hat{x}_j\}\xi_{v,\perp}+\hat{x}_{1,i}\hat{x}_{2,j}\hat{x}_i\hat{x}_j\xi_{v,\parallel}. \tag{9.29}$$

上式表明, 等号右边的第一项对平行于视线方向的速度敏感, 第二项对垂直于视线方向的速度敏感. 最后, 我们来定义角度,

$$\cos\theta_1 \equiv \hat{x}_1\cdot\hat{x};\quad \cos\theta_2 \equiv \hat{x}_2\cdot\hat{x}. \tag{9.30}$$

参照图 9.8, 我们可以看到 $\hat{x}_1\cdot\hat{x}_2$ 等于 $\cos(\theta_1-\theta_2)$, 因此,(9.29) 式可写为

$$\xi_v(\vec{x}_1,\vec{x}_2) = \sin\theta_1\sin\theta_2\xi_{v,\perp}+\cos\theta_1\cos\theta_2\xi_{v,\parallel}. \tag{9.31}$$

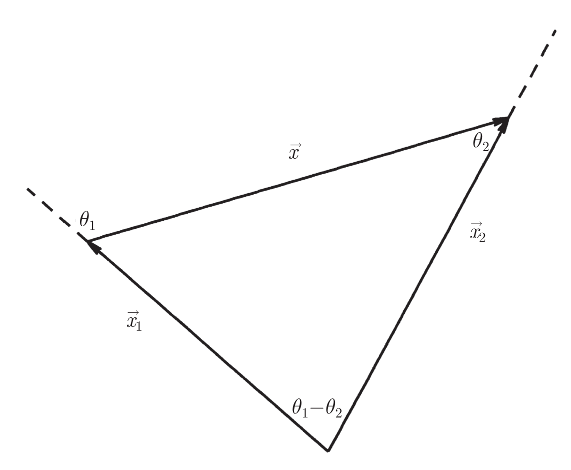


图 9.8　速度相关函数的矢量和角度. $\vec{x}$ 是矢量差, θ_1 的补角是 $\pi-\theta_1$, 三角形内角和是 180°, 两星系之间的角度是 $\theta_1-\theta_2$

依据功率谱对 ξ_v 的两个方向作积分, 可以得到

$$\begin{pmatrix} \xi(x) \\ \xi_{v,\perp}(x) \\ \xi_{v,\parallel}(x) \end{pmatrix} = \int_0^\infty \frac{\mathrm{d}k}{2\pi^2 k}P(k)\begin{pmatrix} k^3 j_0(kx) \\ -f^2H_0^2 j_0'(kx)/x \\ -f^2H_0^2 k j_0''(kx) \end{pmatrix}. \tag{9.32}$$

图 9.9 中展示了有权重的核函数, 并且与密度相关函数作了比较. 需要注意的是, 在固定距离 x 处, 密度相关函数在小尺度上比速度相关函数有更强的功率. 另

一方面, 速度巡天被限制在一定的距离内, 但是对长波长的模式更敏感. 这是因为速度正比于 δ/k. 额外的因子 $1/k$ 给大尺度以更高的权重.

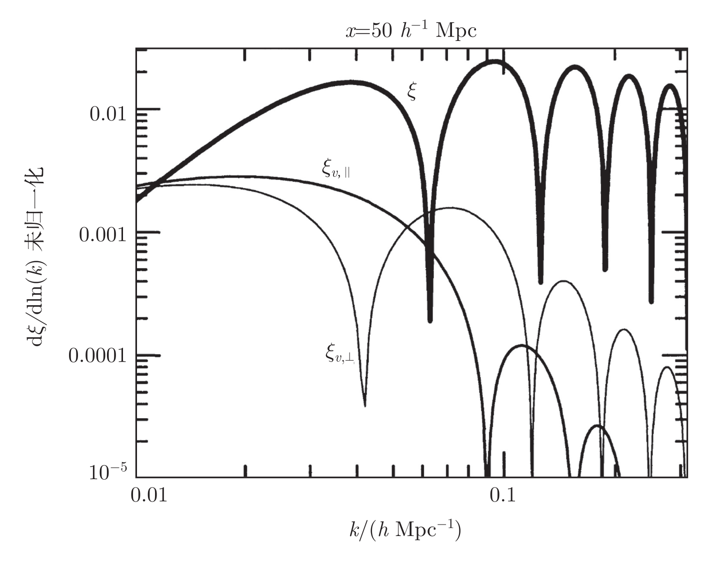


图 9.9 波数 k 对不同相关函数的贡献. 注意, 与密度相关函数相比, 小量级 k 为速度相关函数贡献了绝大多数功率

在做进一步讨论之前, 我先偏离一下主题, 指出图 9.9 中一个重要问题. 与速度相关函数不同, 在固定距离处, 众多的傅里叶模式对密度相关函数有贡献. 该图表明对 $\xi(50h^{-1}\text{Mpc})$ 的贡献. 我们天真地期望对 $\xi(50h^{-1}\text{Mpc})$ 的贡献主要来自于 $k\sim x^{-1}=0.02h$ Mpc 的傅里叶模式. 这是因为, 在线性区域, 高密度值是很小的, 在这个尺度上, 我们天真地期望 $\xi(50h^{-1}\text{Mpc})$ 代表了线性功率谱. 但是, 图 9.9 证明这种期望是错误的. $k\sim 0.02h$ Mpc^{-1} 的模式对相关函数有所贡献, 但有贡献的模式可以扩展到 $k\sim 0.3h$ Mpc^{-1} 甚至更大. 这意味着即使在你认为的完全线性尺度上, 相关函数仍依赖小尺度功率. 最后, 我们期望比较理论与观测的结果. 相关函数是线性与非线性模式混合的结果, 因此很难比较理论与观测的差别. 因为这个原因, 对大尺度结构的选择统计使我们可以得到更完美的功率谱.

现在重新回到速度相关函数, 参照图 9.10. 该图展示了 Freudling 等 1999 年尝试从速度巡天中提取宇宙学信息的结果, 该巡天从全天 SFI 目录 (Haynes et al., 1999)(该目录的源距离超过 $70h^{-1}$ Mpc) 中使用了 1300 个速度源. 功率谱在 BBKS 转移函数中通过振幅 A 和 Γ 参数化. 结果展示在图 9.10 中, 其中原初谱的系数设为 1. 密度取临界密度、$h=0.5$、振幅 $A=0.29A_0$((7.9) 式), 形状参数 $\Gamma=0.5$ 的标准 COBE 归一化 CDM 模型. SFI 巡天的结果显示该模型被排除在几个 σ 之外.

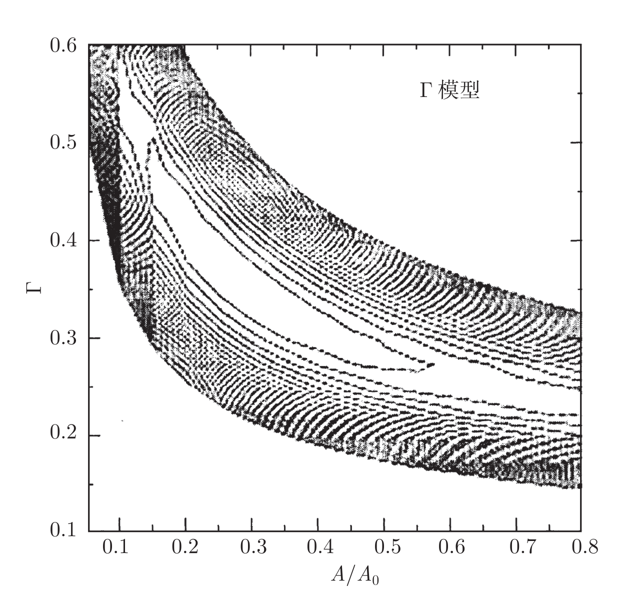


图 9.10　从 SFI 速度巡天中得到的关于功率谱的振幅 A 与形状参数 $\Gamma \equiv \Omega_m h$ 的似然函数等高线图. 其中振幅 A 以 $A_0 = 2\times 10^6 (h^{-1}\mathrm{Mpc})^4$ 为单位, 等高线表征了 likelihood 函数随连续因子 1/e 的变化. 图中心显示的香蕉形状的等高线图区域满足 ΛCDM 模型, 与 $\Gamma = 0.5$、$A = 0.29A_0$ 的标准 CDM 模型很不相符, 来自于文献 (Freudling et al., 1999)

9.4　红移空间畸变

红移巡天提供了径向位置, 即红移的信息, 补充了星系的角度信息. 对于红移 z 处星系的径向位置最简单的猜想是它与我们的距离为

$$\chi_s(z) = \frac{z}{H_0} \tag{9.33}$$

其中下标 “s” 表示红移空间. 红移空间对应于把星系分配在直角坐标系中,

$$\vec{x}_s = \frac{z}{H_0}(\sin\theta\cos\phi, \sin\theta\sin\phi, \cos\theta). \tag{9.34}$$

这种分配忽视了许多现实问题. 第一个问题, 只有在相对低的红移处, 红移 z 处星系的共动距离等于 z/H_0. 回溯图 2.3 可以看到, 在 $z=1$ 时这种近似只有真实值的一半左右. 幸运的是, 目前绝大多数巡天的红移小于 0.1, 因此这个问题是可以忽略的.

第二个问题是致命的, 即在红移空间,(9.33) 式中得到的距离忽略了本动速度的影响. 图 9.11 展示了红移空间发生的畸变. 一个刚开始坍缩的轻微高密度区域在红

移空间表现出被挤压的特征：最靠近我们的星系朝高密度中心区移动, 远离我们而去, 因此它们看起来比实际离我们更远 (即更靠近高密度区的中心). 相似地, 在扰动区域中离我们更远一侧的星系向我们运动, 所以它们看起来比实际离我们更近. 本动速度的综合效应是在一个球形的高密度区域内导致了四极矩的产生.

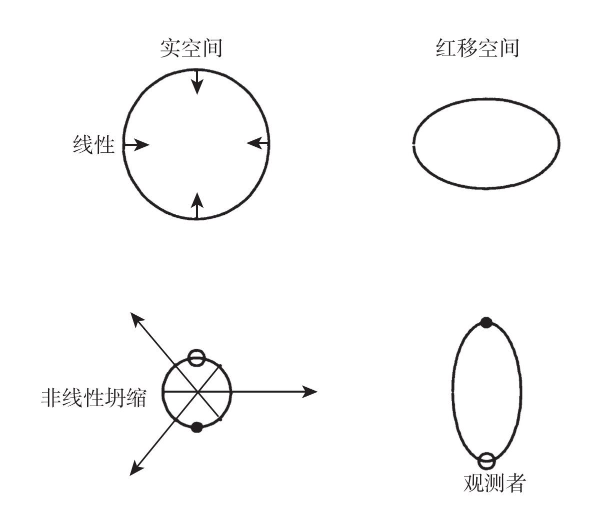


图 9.11 红移空间畸变. 在每种情况下, 常数密度等高线在红移空间形变 (在实空间是圆形的) 为不对称的形状. 箭头表明速度的方向和大小. 在非线性坍缩中, 速度如此之大以至于底部的点转到了相反的方向 (比较左图与右图底部实心点的位置)

当这个区域的密度更大时, 红移空间畸变的性质发生改变. 图 9.11 底部的两幅图表现出一个坍缩的更厉害的物体以一个不同的方式畸变. 它在视线方向被拉长. 定量的说, 它的四极矩与线性密度扰动符号相反. 可以明确的是, 解释红移空间畸变是一个非常复杂的事情, 不仅涉及线性密度扰动的效应, 还需要考虑更复杂的非线性效应带来的影响. 接下来我们定量地讨论线性红移畸变效应, 因为这适用于宇宙大尺度结构, 并且是所有未来工作的起点.

假定我们在红移空间计算功率谱. 这种畸变的功率谱如何与实空间的真实功率谱相联系呢？Kaiser(1987) 首先应用线性理论解决了这一难题. 首先假设无论我们使用红移空间还是实空间坐标, 特定区域的星系数目相同. 因此,

$$n_s(\vec{x}_s)\mathrm{d}^3x_s = n(\vec{x})\mathrm{d}^3x \tag{9.35}$$

这里, n 是实空间中 $\vec{x}$ 处的星系数密度,n_s 是红移空间的星系数密度. 在红移空间中, 以一点为中心的无限小体积元的体积是 $\mathrm{d}^3x_s = \mathrm{d}x_s x_s^2 \sin\theta \mathrm{d}\theta\mathrm{d}\phi$; 在实空间中, 以一点为中心的无限小体积元的体积是 $\mathrm{d}^3x = \mathrm{d}x x^2 \sin\theta \mathrm{d}\theta\mathrm{d}\phi$. 角体积是相同的, 所以

$$n_s(\vec{x}_s) = n(\vec{x})J \tag{9.36}$$

这里 Jacobian 矩阵 J 表示为

$$J \equiv \left|\frac{\mathrm{d}^3 x}{\mathrm{d}^3 x_s}\right| = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}x_s}\frac{x^2}{x_s^2}. \tag{9.37}$$

为了计算 Jacobian 矩阵, 我们认为观测到的红移是下面两项的和:

$$z = H_0 x + \vec{v}\cdot\hat{x}. \tag{9.38}$$

第一项是标准的哈勃定律, 即红移正比于距离; 第二项是沿视线方向的速度. 再次声明, 红移空间对应的星系离我们的距离等于

$$x_s = x + \frac{\vec{v}\cdot\hat{x}}{H_0}. \tag{9.39}$$

Jacobian 矩阵可表示为

$$J = \left(1 + \frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{\vec{v}\cdot\hat{x}}{H_0}\right]\right)^{-1}\left(1 + \frac{\vec{v}\cdot\hat{x}}{H_0 x}\right)^{-2}. \tag{9.40}$$

Kaiser 意识到速度导数的改正项远比 $\vec{v}\cdot\hat{x}/H_0 x$ 项重要. 对于一个平面波扰动, 速度导数项的量级是 $v'/H_0 \sim kv/H_0$, 而其他修正的量级是 $v/H_0 x$. 也就是说, 第一个修正项比第二个修正项大 kx 个量级. 为什么我认为第一项更大呢? 或者说, 为什么 kx 大于一个单位? Kaiser 认为, x 代表巡天的尺度, k 代表该巡天中我们期望的傅里叶模式的量级. 最大尺度的扰动表示为 $k \sim x^{-1}$, 这种扰动很难确定, 因为仅存在少量的这个量级波长的傅里叶模式. 由于存在大量短波长的模式, 因此这样的模式更易被计算, 所以我们可以有效地平均这些模式来估计功率谱. 我们真正感兴趣的是那些 $kx \gg 1$ 的模式. 在 $v = 0$ 处展开剩余的分母, 得到

$$J \simeq \left(1 - \frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{\vec{v}\cdot\hat{x}}{H_0}\right]\right). \tag{9.41}$$

实空间和红移空间的数密度分别为 $n = \bar{n}(1+\delta), n_s = \bar{n}(1+\delta_s)$, 其中 $\bar{n}$ 是平均数密度. 根据 (9.36) 式, 红移空间的密度扰动为

$$1 + \delta_s = [1+\delta]\left(1 - \frac{\partial}{\partial x}[\frac{\vec{v}\cdot\hat{x}}{H_0}]\right). \tag{9.42}$$

展开到一阶, 我们可以看到红移空间的高密度实际上是实空间高密度和本动速度修正综合作用的结果,

$$\delta_s(\vec{x}) = \delta(\vec{x}) - \frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{\vec{v}(\vec{x})\cdot\hat{x}}{H_0}\right]. \tag{9.43}$$

现在我来介绍远距离观测者的情况. 这个想法是大多数我们感兴趣的情况, 方向矢量 $\vec{x}$ 是固定的, 类似于星系到星系的方向. 现在回到图 9.2, 方向矢量 $\vec{x}$ 主要是径向

方向的分量, 在横向方向只有一小部分分量 (正比于 θ_1 和 θ_2). 当平面上的星系互相之间的距离相对较小时, 我们可以近似认为 $\hat{x}\cdot\vec{v}\to\hat{z}\cdot\vec{v}$, 这里的 $\hat{z}$ 是指向星系中心的径向方向.

在远距离近似下, 我们可以计算红移空间密度扰动的傅里叶变换, (为了避免混淆, 在此用 $\tilde{\delta}_s$ 表示傅里叶变换密度)

$$\begin{aligned}\tilde{\delta}_s(\vec{k}) &= \int \mathrm{d}^3x \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\vec{k}\cdot\vec{x}}\left[\delta(\vec{x})-\frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{\vec{v}(\vec{x})\cdot\hat{z}}{H_0}\right]\right] \\ &= \tilde{\delta}(\vec{k})-\mathrm{i}f\int \mathrm{d}^3x \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\vec{k}\cdot\vec{x}}\frac{\partial}{\partial x}\left[\int\frac{\mathrm{d}^3k'}{(2\pi)^3}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\vec{k}'\cdot\vec{x}}\tilde{\delta}(\vec{k}')\frac{\vec{k}'}{k'^2}\cdot\hat{z}\right],\end{aligned} \tag{9.44}$$

上式第一个等号右边的内容来自于傅里叶变换的定义和 (9.43) 式, 第二个等号来自于 (9.20) 式所表示的线性速度. 长度 x 的导数作用在指数上，得到 $\mathrm{i}\vec{k}'\cdot\hat{x}$, 还可以设为 $\mathrm{i}\vec{k}'\cdot\hat{z}$, 因此

$$\tilde{\delta}_s(\vec{k})=\tilde{\delta}(\vec{k})+\int\frac{\mathrm{d}^3k'}{(2\pi)^3}\tilde{\delta}(\vec{k}')[f(\hat{k}'\cdot\hat{z})^2]\int \mathrm{d}^3x\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\vec{k}'-\vec{k})\cdot\vec{x}}. \tag{9.45}$$

关于 $\vec{x}$ 的积分给出了一个 Dirac delta 函数, $\vec{k}'=\vec{k}$. 因此, 应用远距离观测近似,

$$\tilde{\delta}_s(\vec{k})=[1+f\mu_k^2]\tilde{\delta}(\vec{k}). \tag{9.46}$$

这里的 μ_k 被定义为 $\hat{z}\cdot\hat{k}$, 是视线方向和波数 $\hat{k}$ 的夹角的余弦.(9.46) 式定量展示了 (线性) 红移空间畸变可以预见的一些问题. 首先, 因为 $f\mu_k^2\geqslant 0$, 可以看出在红移空间的密度扰动大于实空间. 这一点从图 9.12 中可以清晰地看出. 在红移空间星系的中心区域的密度明显高于实空间, 这是因为一种错觉：正在下落的星系位于更靠近中心的位置. (9.46) 式第二个值得注意的地方是, 红移空间高密度的增强是平行视线方向的波矢量. 垂直于视线方向平面波的扰动不会引起红移空间畸变.



图 9.12 实空间的一百个星系由于线性速度影响在红移空间中产生挤压效应. 在中心区域, 红移空间的密度扰动明显远大于实空间. 观测者位于下方

红移空间的功率谱不仅依赖于 $\vec{k}$ 的大小, 还依赖于 $\vec{k}$ 的方向, 该方向我们用 μ 来参数化. 根据 (9.46) 式得到

$$P_s(\vec{k})=P(k)[1+\beta\mu_k^2]^2. \tag{9.47}$$

这里引入了参数 β, 你也许认为它简单地等于线性增长率 f. 其实在 β 中额外存在一个因子, 这是因为质量密度扰动 δ 不等于星系密度扰动 δ_g. 用速度场来划分质量密度扰动. 我们定义偏差 (bias),

$$b \equiv \frac{\delta_g}{\delta} \tag{9.48}$$

$\vec{v} \propto \delta \propto \delta_g/b$. 因此,(9.47) 式中显示的红移空间畸变产生的相关正比于

$$\beta = \frac{f}{b} \simeq \frac{\Omega_m^{0.6}}{b}. \tag{9.49}$$

(9.47) 式所展示的功率谱中的红移空间畸变有正负两方面的影响. 正面影响是, 通过计算红移空间功率谱的畸变, 我们可以计算 β, 这就建立了密度与偏差的联系. 定量的做法是计算功率谱四极矩与单极矩的比值:

$$\frac{P_s^{(2)}(k)}{P_s^{(0)}(k)} \equiv \frac{5\displaystyle\int_{-1}^{1} \frac{\mathrm{d}\mu_k}{2} \mathcal{P}_2(\mu_k) P_s(\vec{k})}{\displaystyle\int_{-1}^{1} \frac{\mathrm{d}\mu_k}{2} \mathcal{P}_0(\mu_k) P_s(\vec{k})}. \tag{9.50}$$

再次重申 $\mathcal{P}_l$ 是 l 阶勒让德多项式,P_s 是红移空间功率谱. 所以 (练习 11)

$$(1+\beta\mu_k^2)^2 = \left[1+\frac{2}{3}\beta+\frac{1}{5}\beta^2\right]\mathcal{P}_0(\mu_k) + \left[\frac{4}{3}\beta+\frac{4}{7}\beta^2\right]\mathcal{P}_2(\mu_k) + \frac{8}{35}\beta^2\mathcal{P}_4(\mu_k), \tag{9.51}$$

勒让德多项式 ((C.2) 式) 的正交项表明在线性理论中功率谱四极矩与单极矩的比值是

$$\frac{P_s^{(2)}(k)}{P_s^{(0)}(k)} = \frac{\frac{4}{3}\beta+\frac{4}{7}\beta^2}{1+\frac{2}{3}\beta+\frac{1}{5}\beta^2}. \tag{9.52}$$

Hamilton 通过两个红移巡天计算四极矩与单极矩功率谱的比值 (见图 9.13). 在两个巡天中, 非线性效应都非常明显, 必须谨慎对待. 左图展示了红外巡天的结果,Hamilton 定义了一个参数 σ 来研究非线性, 该参数用来计算小尺度速度弥散. 在假设 β ~0.7 的情况下, 只有当尺度在 $k \sim 0.1h$ Mpc^{-1} 的量级时, 这个比率接近 0.75. 右图展示了光学巡天的结果. 其中, 该比值不能用渐近线近似表示 (低处的曲线), 除非非线性结构被人为去除掉 (高处的曲线). Hamilton 发现, 在假设 $\beta = 0.3$ 的情况下, 四极矩与单极矩功率谱的比值接近 0.4. 图 9.14 展示了从红移和本动速度巡天中计算 β 的结果.

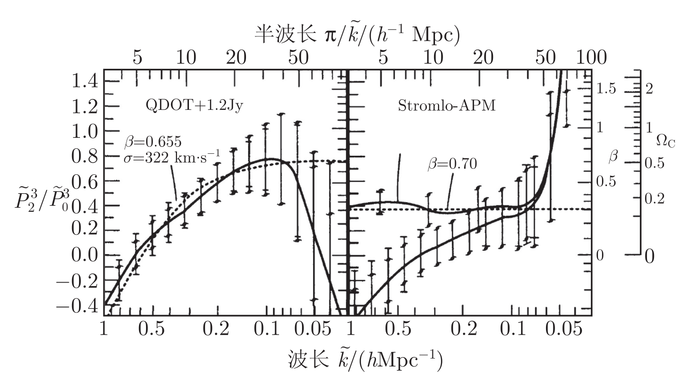


图 9.13 两个红移巡天计算的功率谱四极矩与单极矩的比值 (Hamilton,1998). 左图数据来自两个红移巡天 (红外天文卫星 IRAS)：QDOT(Lawrence et al., 1992) 选取了 1/6 的亮于 0.6 央斯基的星系;1.2Jy 巡天 (Strauss et al., 1996) 选取了所有亮于阈值的星系. 右图展示了 Stromlo-APM 巡天 (Loveday et al., 1996) 中红移等于 1 的 20 个星系 (图 9.1)

以上是好的一面. 坏消息是, 即使我们放弃从红移巡天中计算 β 的希望, 为了计算功率谱, 我们仍然需要解释红移空间畸变. 通过平均各个方向的 μ_k 计算功率谱只适用于线性理论. 此时,

$$P_s^{(0)}(k) = \left[1 + \frac{2}{3}\beta + \frac{1}{5}\beta^2\right] P(k), \tag{9.53}$$

这意味着,$P_s(0)$ 高估了实际功率谱 (高出了 2 倍). 根据图 9.13, 即便在中等尺度上, 也必须考虑非线性效应. Peacock 和 Dodds 的结果 (图 7.11) 采用了为小尺度速度建立模型的方法解决这一问题.

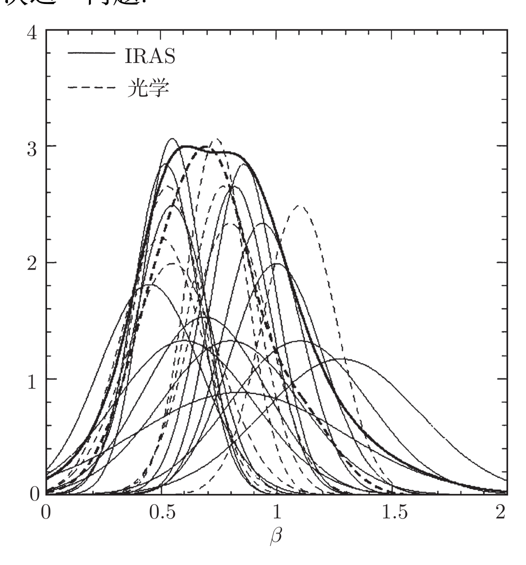


图 9.14 从红移和本动速度巡天中得到的 β 的似然函数的汇总 (Strauss and Willick, 1995)

9.5 星 系 团

到目前为止, 我们仅研究了两点相关函数: 角相关函数、速度方差和功率谱. 你也许很疑惑: 为什么不提及一点相关函数? 例如, 星系的数密度. 为了解答这一问题, 我们先来看一个极端的例子. 宇宙中究竟有多少生命? 很显然, 在现有科技条件下, 这是一个不可能回答的问题. 先把如何定义 "生命" 这样一个问题抛到一边, 我们仍需要研究恒星形成、行星形成、各个生物过程的生命演化等诸多课题. 因此, 宇宙中的 "生命密度": 这样一个概念远远超出了本书的研究范围.

类似但不那么极端的情况是从我们所研究的物质扰动中预测星系数密度涉及一系列复杂情形, 这些是我们目前不能解决的. 多大比例的物质坍缩成非线性结构? 这些非线性结构如何演化? 星系尺度的非线性结构会并合吗? 如果是这样, 通常如何并合? 坍缩时, 恒星如何形成? 恒星如何分布? 是漩涡状还是椭圆状? 令人兴奋的是, 20 世纪 90 年代科技的发展回答了这些问题. 除了数值模拟的 brute-force 方法之外, 许多研究小组 (例如, Kauffman et al., 1999; Somerville and Primack, 1999; Colberg et al., 2000; Benson et al., 2001; Cooray and Sheth, 2002) 使用半解析技术成功地预测了不同类型星系的特征和丰度. 尽管我们不会在这里学习这些方法, 但是我们会用到 Press-Schechter 理论——该理论是这个工作的基础.

星系数密度难以预测的根本原因是星系量级的尺度涉及非线性演化. 回顾练习 7.9, 尺度小于 $\sim 10h\ \text{Mpc}^{-1}$ 就进入非线性演化. 无扰宇宙中多大尺度可以代表一个典型星系的质量,$M = 10^{12}M_\odot$? 一个半径是 R 的球状空间的密度是

$$\rho_m = \frac{M}{4\pi R^3/3}. \tag{9.54}$$

因为 $\rho_m = \Omega_m \rho_{\text{cr}}$, 我们得到

$$R = 0.951h^{-1}\text{Mpc}\left(\frac{Mh}{10^{12}\Omega_m M_\odot}\right)^{1/3}. \tag{9.55}$$

因此, 半径大约为 1 Mpc, 也就是尺度涨落对应于 $k \sim 1h\ \text{Mpc}^{-1}$ 时, 演化进入非线性阶段.

这就回答了该问题: 为什么不预测星系的数密度; 但是回避了另一个问题: 对于那些接近线性演化尺度的天体, 我们可以预测它们的丰度吗? 现在我们将 (9.55) 式转化成 R 半径内的质量

$$M = 1.16 \times 10^{15}\Omega_m h^{-1} M_\odot \left(\frac{R}{10h^{-1}\text{Mpc}}\right)^3, \tag{9.56}$$

可以发现, 质量小于 $10^{15}M_\odot$ 的星系团处于线性演化尺度内.

那么, 怎样预测星系团的丰度呢? 基本的思想来自于 Press 和 Schechter(1974), 由此产生的理论被称为 Press-Schechter 理论. 想要了解该理论, 先参考图 9.15 所示的一维密度场. 当然, 非均匀性的平均等于零. 但在正、负方向都有相对大的偏离. 当密度等于 0 时, 低密度不会小于 -1. 但是, 图中显示一些区域的密度大于 3 倍的平均密度. 这些密度扰动区域正是我们感兴趣的：这些区域开始坍缩, 积累了如此多的物质以至于局部的引力作用大于哈勃流. 该区域的粒子互相之间停止远离, 被拖入本地引力势场.

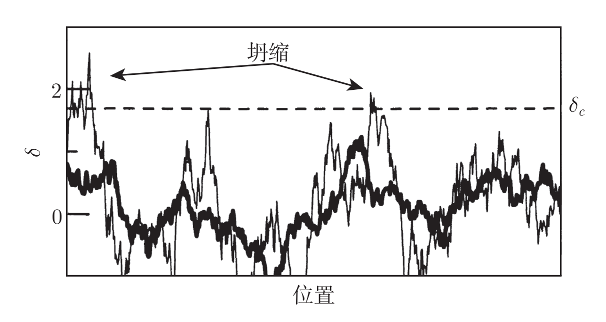


图 9.15 一维不均匀性. 深色的曲线是场在大尺度的平滑. 小尺度扰动造成坍缩, 大尺度密度场的高密度不会高于坍缩的临界密度 δ_c

Press-Schechter 理论预测的坍缩体积分数是

$$f_{\rm coll}(M(R),z)=\frac{2}{\sqrt{2\pi}\sigma(R,z)}\int_{\delta_c}^{\infty}{\rm d}\delta{\rm e}^{-\delta^2/2\sigma^2(R,z)}. \tag{9.57}$$

这里 R 是半径, 超过这个半径密度场开始平滑. 该半径用来计算 $\sigma(R,z)$—— 平滑密度场的均方根 (练习 7.9). 图 9.15 所示为可见平滑尺度的物质. 典型地, 大尺度的非均匀性小于小尺度的非均匀性, 所以, 物质先在小尺度上开始坍缩. 随着时间的演化, 高密度增长 (正比于增长函数), 最后, 一些大尺度的非均匀性物质开始坍缩.(9.57) 式等号右边统计了所有密度扰动大于临界密度 δ_c 的高斯分布的部分. 该方程有许多不可思议的地方. 首先, 它假设非均匀性的分布是高斯分布, 但这是不成立的. 因为根据定义, δ 不可能小于 -1. 实际上, 引力偏离了初始的高斯分布, 产生了更多的低密度区域和不可忽视的高密度区域. 第二点, 归一化需要一些手段：人们天真地不包括因子 2. 最后, 公式中的均方差 σ 是线性均方差, 忽视了非线性的影响. 在小尺度上, 使用线性功率谱计算 σ 与用真实的非线性功率谱计算相比存在很大差别. Press-Schechter 理论认为坍缩分数可以通过线性 σ 得到. 当然,Press-Schechter 理论的这些不足之处并不能贬低它的作用. 数值模拟 (例如, White, Efstathiou and Frenk, 1993) 证明 Press-Schechter 理论还是很有效的. 一些研究组 (Heavens, 1990; Bond et al., 1991) 进一步从理论上证明了该公式的某些方面.

为了将坍缩分数更好地与观测比较, 首先作 f_{coll} 相对于 M 的微分, 然后再乘以一个小区间 $\mathrm{d}M$. 这表示了在质量 M 与 $M+\mathrm{d}M$ 之间的坍缩成天体的体积分数. 再乘以该类天体的平均数密度 ρ_m/M 就得到质量 M 与 $M+\mathrm{d}M$ 之间的坍缩天体的数密度

$$\mathrm{d}n(M,z) = -\frac{\rho_\mathrm{m}}{M}\frac{\mathrm{d}f_{\text{coll}}(M(R),z)}{\mathrm{d}M}\mathrm{d}M. \tag{9.58}$$

其中的负号表示 f_{coll} 是一个关于质量 M 的减函数. 对 M 求导, 并且 $\mathrm{d}M/\mathrm{d}R = 3M/R$, 得

$$\frac{\mathrm{d}n(M,z)}{\mathrm{d}M} = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{\rho_\mathrm{m}\delta_c}{3M^2\sigma}d^{-\delta_c^2/2\sigma^2}\left[-\frac{R}{\sigma}\frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}R}\right]. \tag{9.59}$$

对于大多数模型来说, 方括号里面的一项近似等于 1. 对于大质量天体来说, (9.59) 式中起主要贡献作用的因子是其指数项. 如果 σ 很小的话, 则该尺度上坍缩天体的数密度是指数衰减的.

到目前为止, 我回避了超过它天体就会坍缩的临界密度扰动 δ_c 的数值. 有两种方法可以得到 δ_c. 一种方法是依赖于简单的球坍缩模型. 在该模型中, 坍缩发生在 $\delta=1.686(\rho_m=\rho_{\text{cr}})$. 另一种方法是把 δ_c 看作一个自由参量, 然后用数值模拟进行校准 (例如,Eke,Cole and Frenk,1996). 通过这种方法得到的 δ_c 的值很接近于球坍缩模型得到的 1.686.

计算星系团的丰度, 以此用 (9.59) 式检验 Press-Schechter 理论, 这是一个复杂的问题. 困难之一是如何分辨一个星系团. 目前已经开发出复杂的计算程序在星系巡天中寻找星系团. 第二个困难是如何决定星系团的质量. 这里有许多方法来确定星系团的质量:

- **X 射线温度** 星系团中的热电离气体发出的辐射有一个频率截断, 这个截断由气体的温度决定. 在特定的假设下, 这个温度与星系团的质量相关.
- **Sunyaev-Zeldovich 畸变** 穿过星系团的 CMB 光子被热气体散射. 这种散射使 CMB 光谱发生改变, 该改变是频率的函数, 包括低频辐射减少、高频辐射超出 (即低能光子从热气体电子中得到能量). 这种改变的形状是固定的; 改变的幅度是另一种气体温度的计算方法, 在特定假设下, 可被转化成气体质量的计算.
- **弱引力透镜** 背景星系的图像由于前景星系团的作用而发生变形. 星系团的质量越大, 发生的变形越强烈. 弱引力透镜因此成为极好的、不通过温度而计算星系团质量的工具.

前两种方法是通过直接计算星系团的温度来推算质量. 让我们在简单假设下利用质量与温度的关系来计算星系团的质量. 假设一个星系团是维理化系统, 这样它的动能是势能的 $-1/2$ 倍. 又假设该星系团是半径为 R_{vir} 的球状结构, 它的势能等于 $-3GM^2/5R_{\text{vir}}$. 那么,

$$\frac{1}{2}Mv^2 = \frac{3}{10}\frac{GM^2}{R_{\text{vir}}}. \tag{9.60}$$

星系团的密度扰动是 $\Delta_{cl} \equiv \rho_{cl}/\rho_m$, 接下来我们消掉半径. 因为

$$\Delta_{cl} \equiv \frac{M}{4\pi R_{\text{vir}}^3 \rho_{\text{m}}/3}. \tag{9.61}$$

温度平均地分配在三个方向上, 因此平均速度的平方是 $v^2 = 3T/m_p$, 这里的 m_p 是质子质量. 温度可以用整个系统的质量来表示

$$T = \frac{m_p}{5}\left[GMH_0\sqrt{\frac{\Delta_c}{2}}\right]^{2/3}. \tag{9.62}$$

当 $\Omega_m = 1$ 时, 得到

$$M = 8.2 \times 10^{13} h^{-1} M_{\odot} \left(\frac{T}{\text{keV}}\right)^{3/2} \sqrt{\frac{178}{\Delta_{cl}}}. \tag{9.63}$$

这里, 我们在球状坍缩模型中 $(\rho_m = \rho_{cr})$ 归一化 Δ_{cl} 的值, 尽管模拟验证了这个数值.

图 9.16 展示了用温度表示的星系团密度, 采用标准 CDM 模型, 即 $\Omega_m = 1$. 最重要的一点是,1992 年 COBE 关于各向异性的探测表明这种 plain-vanilla 模型预测了过多的星系团. 实际上, 今天星系团的丰度通常使用归一功率谱的方法. 从星系团丰度 (例如,Wand and Steinhardt,1998) 得到的 σ_8 的典型值是

$$\sigma_8 = 0.5\Omega_m^{-0.33-0.35\Omega_m} \tag{9.64}$$

误差约 20%, 后者更精确地反映了质量函数的不确定性.

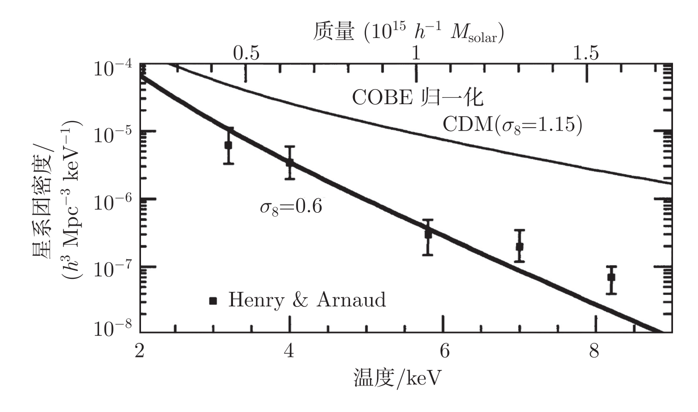


图 9.16 用温度表示的星系团密度. 数据来自文献 (Henry and Arnaud, 1991). 两条理论曲线代表 Press-Schechter 理论的预测 ((9.59) 式), 模型选取 $\Omega_m = 1, h = 0.5, \Omega_b = 0.05$. 两条曲线唯一的不同来自归一化

Press-Schechter 理论另一个激动人心的应用是它预测的星系团随红移的演化. 基本的一点来自于 (9.59) 式所示的指数依赖. 在高红移处, $\sigma(R,z)$ 会变小, 但究竟多小取决于宇宙学模型. 增长最快的是 $\Omega_m=1$ 的标准宇宙学模型 (见图 7.12), 因此, 我们固定今天的星系团丰度, 在该模型中我们预测得到的星系团数目更少. 图 9.17 说明了这一问题.$\Omega_m=1$ 的模型展示了质量大于 $3.5\times10^{14}M_\odot$ 的星系团在红移 0.5 处的数密度比红移 0 处少 1/700. 相比较而言,ΛCDM 模型的比值是 1/4. 随着地面观测数据的增多, 我们期望在未来几十年可以给出更强的宇宙学限制.

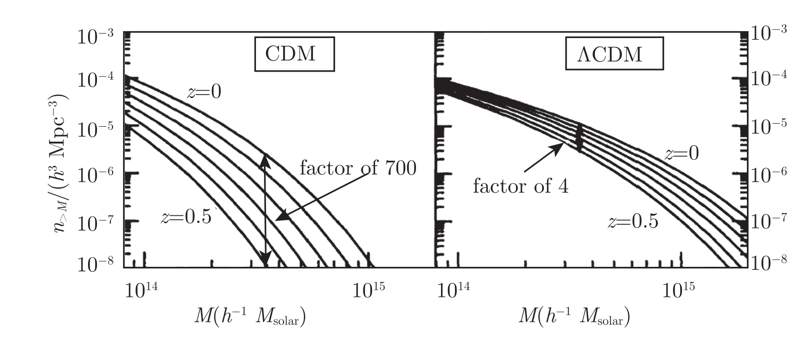


图 9.17　不同红移处大于质量 M 的星系团的数密度. 左图：CDM 模型 $(\Omega_m=1,h=0.5,\Omega_b=0.05)$, 在 $z=0(\sigma_8=0.5)$ 处给出了归一化的正确丰度. 几条曲线依次代表红移从 0 到 0.5, 邻近曲线代表 0.1 的红移间隔. 右图：ΛCDM 模型 $(\Omega_m=0.35,h=0.7,\Omega_bh^2=0.02)$. 与临界密度模型相比, 星系团的演化速度相对较慢, 质量约少 $3\times10^{14}M_\odot$

推 荐 读 物

The Lange Scale Structure of the Universe (Peebles) 很好地描述和导出了角相关函数, 使用了 Limber(1953) 最初的推导. 9.1 节给出的推导基于 Kaiser 在 1992 年关于弱引力透镜工作的附录. 该推导具有直观性和可适用性强等优点, 它也有助于我们计算将在第 10 章遇到的弱引力透镜相关函数.

9.1 节中讨论的数据来自 APM 巡天 (Maddox et al., 1990). 其他最近的角度结果来自 Edinburgh/Durham 南天星系目录 (EDSGC, Collins, Nichol, and Lumsden, 1992) 和斯隆数字巡天 (York et al., 2000), 最初的分析来自文献 (Scranton et al., 2002). 就像我在文章中暗示的那样, 数据的分析随着时间的前进越来越精确. Baugh 和 Efstathiou 1993 年首次转置了 APM 角相关函数, 并且提取了 3 维功率谱, 证明在大尺度上标准 CDM 功率谱存在很大不同. Dodelson 和 Gaztanaga 2000 年指出功率谱的结果误差是相关的并且进行了修正, 进一步解释了 $\omega(\theta)$ 的误差也

是相关的. Eisenstein 和 Zaldarriaga (2001), 随后 Efstathiou 和 Moody (2001) 解释了这些相关导致了图 9.6 所示的结果. Eisenstein 和 Zaldarriaga 的文章还清楚讨论了 $\omega(\theta)$ 和 2 维功率谱 (即 C_l) 的关系. 他们观测到 C_l 的误差关联性很低, 这就意味着 C_l 将会代替 $\omega(\theta)$ 作为角度巡天的统计. 实际上, Huterter, Knox 和 Nichol (2001) 用 C_l 分析了 EDSGC 巡天, Tegmark 等 2002 年从早期的 SDSS 数据中得到了 C_l.

Cosmological Physics (Peacock) 是一本研究本动速度和其对红移巡天的影响的好书. 有两篇重要且信息量很大的综述文章：文献 (Strauss and Willick, 1995) 和 (Hamilton, 1998), 前者在涉及本动速度的实验方面很有新意, 后者分析了星系巡天的红移空间畸变. 这个领域的另一位领导者 ——Dekel 1997 年写了一篇关于本动速度场的宇宙学影响的很有价值的综述.

Kaider(1987) 同样做了关于红移空间畸变的意义重大的工作, 在低红移近似下解决了远距离观测者在傅里叶空间线性红移畸变的问题. Hamilton(1992) 在实空间找到了相似的解决办法. 最近, 大视场、深度巡天的开展, 宇宙学修正的一般化 (例如, 当 z 值较大时, 距离不等于 cz/H_0) 和全天分析吸引了很多研究者. 例如, 该领域近期的工作 Szalay, Matsubara 和 Landy(1998) 把 Kaiser 的工作推广到大角度, 同时 Magira,Ying 和 Suto(2000) 解释了宇宙学畸变和非线性及其演化. Peacock 和 Dodds(1994) 分析了不同种类的巡天, 通过论证红移空间畸变、非线性、偏袒性质, 使功率谱得以很好地进行测量. 毋庸置疑, 随着斯隆数字巡天、二度视场巡天以及其他巡天, 未来可以探测到更多关于功率谱的信息. 书中 238 页涉及的半解析内容基于 White 和 Rees(1978), 以及 White 和 Frenk(1991) 的工作. 不同于这些半解析模型的相关模型是晕模型 (Cooray and Sheth, 2002), 这种模型假定所有的暗物质都存在于晕中, 因此可以把关于星系团的问题缩减成 (I) 晕团 (II) 晕中物质和星系的分布. 关于晕模型的描述以及如何利用它来比较理论与红移巡天参见文献 (White, 2001; Seljak, 2000; Berlind and Weinberg, 2001).

星系团丰度的预测参见*Cosmological Physics* (Peacock) 和*Cosmological Inflation and Lange Scale Structure* (Liddle and Lyth).Padmanabhan 的*Structure Formation in the Vniverse* 详细地描述了球状坍缩模型, 它是 9.5 节中数据的来源. 除了以上列出的文献, 另一些关于星系团归一化的重要文章包括文献 (Viana and Liddle, 1996,1999; Pierpaoli,Scott and White, 2001).

练　习

1. 假设相关函数定义为

$$\xi(\vec{r}) \equiv \langle \delta(\vec{x})\delta(\vec{x}+\vec{r})\rangle. \tag{9.65}$$

傅里叶展开每一个 δ, 使用 (C.20) 式, 证明该定义说明相关函数是功率谱的傅里叶变换.

2. 当 $k_3 = 0$ 时, 根据 (9.9) 式, 展开 3 维功率谱. 第一项是我们所考虑的. 证明与第一项相比, 后一项的量级是 $(1/l)^2$.

3. 重写 (9.14) 式所示的核函数, 使其对 χ 积分. 证明 F 仅是 $k\theta$ 的函数.

4. 对角相关函数的核函数给出量级大小的估计.

(a) 在傅里叶空间考虑一个半径为 k, 宽度为 $\mathrm{d}k$ 的壳. 问该壳的多大部分体积满足 $k_3 < \chi^{-1}$?

(b) 讨论仅 $|k_3| < \chi^{-1}$ 的傅里叶模式对权重是 $\Delta^2(k) = k^3 P(k)/2\pi^2$ 的角相关函数有贡献. 将该讨论与 (a) 部分的分数计算联系起来估计 $P(k)$ 的核相关 $w(\theta)$. 将该估计与 (9.13) 式进行比较.

5. 将角相关函数分解为球谐函数的和

$$w(\theta) = \sum_l \frac{2l+1}{4\pi} C_l^{\text{matter}} \mathcal{P}_l(\cos\theta), \tag{9.66}$$

这里角标 "matter" 用来区别 CMB 各向异性中的 C_l,$\mathcal{P}_l$ 是勒让德多项式. 将 C_l^{matter} 表示成 3 维功率谱的积分. 证明在小尺度上 $C_l^{\text{matter}} = P_2(l)$, 这里 P_2 是 9.1 节介绍的 2 维功率谱.

6. 在 9.1 节中, 我们忽视了功率谱的演化. 也就是, 我们假设 $P(k)$ 是常数. 现在, 假设功率谱是 $(1+z)^\beta$ 的函数. 在平坦的、物质为主导的宇宙中 β 是什么值时满足线性模型? 重写对 z 积分的核函数, 解释这一演化.

7. (数值) 计算开放宇宙中今天的线性增长率 f, 与 $\Omega_{0.6}$ 相比较. 近似与精确值之间的差别有多大? 现在假设宇宙是平坦的, $\Omega_m + \Omega_\Lambda = 1$. 再次比较精确的线性增长率与 $\Omega_{0.6}$. 证明

$$f = \Omega_m^{0.6} + \frac{\Omega_\Lambda}{70}\left(1 + \frac{\Omega_m}{2}\right) \tag{9.67}$$

是一个更好的近似, 当 $\Omega_m > 0.025$ 时精度不低于 4%.

8. 使用 CMBFAST, 计算标准 CDM($\Omega_m = 1, h = 0.5$) 模型的转移函数, 使 Ω_b 分别等于 0.01,0.05 和 0.1. 证明 BBKS 转移函数在满足下式的情况下是合理的

$$\Gamma = \Omega_m h \to \Omega_m h \mathrm{e}^{-2\Omega_b}. \tag{9.68}$$

9. 使用 CMBFAST 或 BBKS 转移函数, 计算 ΛCDM($h = 0.7, \Omega_\Lambda = 0.7, \Omega_m = 0.26, \Omega_b = 0.04$) 的 COBE 归一化的 σ_8. 使用图 9.6 底部左侧图模型. 这暗示了我们刚计算了的结构质量的 σ_8 和 APM 巡天敏感的星系的 $(\sigma_8)_g$ 之间怎样的关系?

10. 假设宇宙是平坦的, 由物质和宇宙学常数组成. 展开共动距离到红移 z 处的星系 (忽略本动速度). 展开中的一阶项给出了红移空间答案. 那二阶项呢? 对红移空间的修正? 用 Ω_m 的形式给出你的答案.

11. 使用 $\mathcal{P}_4(x) = 35x^4/8 - 15x^2/4 + 3/8$ 来推导 (9.51) 式. 证明 (9.59) 式中的定义

——$P_s^{(l)}(k) = (2l+1)\int_{-1}^{1}(\mathrm{d}\mu_k/2)\mathcal{P}_l(\mu_k)P_s(k,\mu_k)$ 意味着

$$P_s(k,\mu_k) = \sum_l \mathcal{P}_l(\mu_k)P_s^{(l)}(k). \tag{9.69}$$

12. 在本章中我们展示了红移空间畸变如何影响功率谱. 证明红移空间畸变如何影响相关函数. 假设是线性理论. 你也许需要参考文献 (Hamilton, 1992), 它将 Kaiser 的结果转化为相关函数的问题.

第 10 章　弱引力透镜与极化

角巡天和红移巡天是传统的计算星系团功率谱的有效工具, 但也存在一些不足之处. 这些方法计算的是星系的分布, 而不是质量的分布. 早期宇宙理论可以很精确地对质量分布做出预测, 然而却对星系分布无能为力. 本章我们介绍一种令人兴奋的新技术 —— 它可以标示质量而不是光度的分布. 我们将会看到物质分布的不均匀性导致远距离星系发生畸变, 这就是引力透镜效应. 进一步, 对这些畸变的统计与物质功率谱有直接的联系.

CMB 各向异性不受制于 CMB 功率谱的不确定性, 这种不确定性会对密度场的构建带来灾难性后果.

- 我们明确知晓 CMB 的起源 (来自于最后散射截面), 因此这里不存在类似的由本动速度引起的畸变.
- 这里不存在质量与光度分布不对等的问题, 而该问题恰恰是星系巡天解释的难点.
- 另外, 质量分布函数是非线性的, 因此, 第 7 章所示的由线性功率谱得到质量分布函数是不科学的.CMB 各向异性是十万分之一的量级, 因此非线性是可以忽略的.

然后, 可以很容易地解释角功率谱 C_l 并从中提取信息. 除此之外, 我们可做的研究还有很多. 到目前为止, 我们关注了温度的各向异性. 退耦之前的康普顿散射也会引起极化的各向异性. 极化开启了 CMB 研究的一个新的方向. 至少, 它使得从 CMB 中提取的信息量翻倍. 在本章, 我们将会看到, 极化带来的信息会更多. 张量扰动 —— 引力波产生了特殊的极化产物, 该产物不能由标量扰动获得. 因此, 极化为我们提供了一个独一无二的研究暴胀时期产生的引力波的方法.

将引力透镜与极化放在一章进行讨论主要是因为在数学上它们的描述是近似的. 它们的影响可以被 2×2 的对称矩阵定量描述. 在透镜中, 这个矩阵是张量畸变, 该张量畸变带来了图像畸变的信息. 极化张量有更久远的历史, 并用 Q、U 来表述. 这在数学上是独一无二的. 因此, 研究这两种效应的方法是类似的.

10.1　图像的引力畸变

宇宙中的引力场使得经过它的光线的路径发生畸变. 这一事实开启了一系列的宇宙学研究. 最重要的是光线路径依赖于质量的思想. 如果这种畸变可以计算, 我

们就可以推测宇宙中质量的分布. 该推论的重要性不能被夸大: 我们对质量分布的了解主要来自于对星系分布的观测. 我们期望, 至少在大尺度上, 质量分布与星系分布不会有太大差别. 如果我们直接通过光线的畸变来观测质量分布, 则不需要再假设上述期望. 进而, 我们可以直接比较观测与理论预测. 因此, 对宇宙学来说, 我们期望光线畸变可以产生弱引力透镜效应, 即由于前景的质量高密度而使远距离星系的形状发生畸变. 我们从图像畸变概述开始讨论, 同时探究一些其他效应.

引力场可以使远处的图像发生畸变的思想与广义相对论同时诞生. 实际上, 爱因斯坦在完成广义相对论之前, 就认识到计算这种畸变的重要性. 他早期的笔记包含了图像放大率的计算和一个源成两个像的可能性 (Renn, Sauer and Stachel, 1997). 另一方面, 对引力畸变的探测又验证了广义相对论.1919 年, 爱丁顿带领一队人到南半球观测日食期间星光的偏移. 这种效应的大小 (Dyson, Eddington and Davidson, 1920) 正好符合爱因斯坦的新理论.

引力可以弯曲光线路径的最特别的表现之一是强引力透镜效应.1979 年,Walsh, Carswell 和 Weymann 观测到一个类星体的多重像, 这验证了爱因斯坦的早期推断. 向各个方向发出的类星体的光线通过中间星系会聚到一点 (观测者). 从那以后, 还观测到了数十个类星体的多重像, 在不远的将来我们有望观测到更多的强引力透镜现象. 具体多大比例的类星体可以呈多重像是一个疑问, 这依赖于背景宇宙学. 曾经讨论过有宇宙学常数的模型比没有宇宙学常数的模型存在更多的呈多重像的类星体 (见练习 1 和 Kochanek,1996).

还存在其他的引力透镜对宇宙学有影响的例子. 通过不同路径到达一点的光线有不同的到达时间. 因此, 我们探测到的来自于不同方向的同一个源在同一时间发出的两束光线由于透镜效应将会在不同的时间到达观测者. 通过研究源天体在不同方向发射的光线我们可以计算时间延迟. 该延迟的结果依赖哈勃常数, 因此天文学家可以通过时间延迟精确地计算 H_0(Kundic et al., 1997). 另一个例子是微引力透镜, 即一个透镜天体移动到源与观测者的连线上. 这种情况下, 图像被放大, 这样我们能够观测到远距离源的不同特性. 近些年微引力透镜被用来寻找银河系中大质量的晕天体 (MACHOs)(Alcock et al., 1993). 现在看来晕天体不是组成银河系暗物质的主要成分. 然而, 晕天体的组成和分布仍然是宇宙学中的重要谜题.

另一个引力透镜的实例展现在图 10.1 中. 前景是大质量星系团 Abell 2218, 它扭曲了背景星系的形状. 这导致星系团中心区域的周围出现椭弧. 为什么背景星系会延展为图 10.1 所示的椭弧? 考虑一个位于大质量密度区域后面的圆形星系, 观测者位于本页底部, 如图 10.2(a). 由于光线发生畸变, 我们不期望看到圆形的图像. 进一步说, 来自于源底部 (即接近于质量区域中心的部分) 的光线比起那些来自于远离质量区域中心的光线更易发生弯曲. 这些光线是如此的弯曲以至于源的底部看起来与我们的距离更远.(这仅仅是讨论的一部分: 光线依据质量分布而发生弯曲,

我们依据观测到的光线反推得到的源的位置比实际的位置离我们更远. 见图 10.4). 因此观测到的图像发生畸变, 如图 10.2(b) 所示. 结果就是我们观测到的一段弧代替了原本是圆形的星系, 见图 10.2(c).

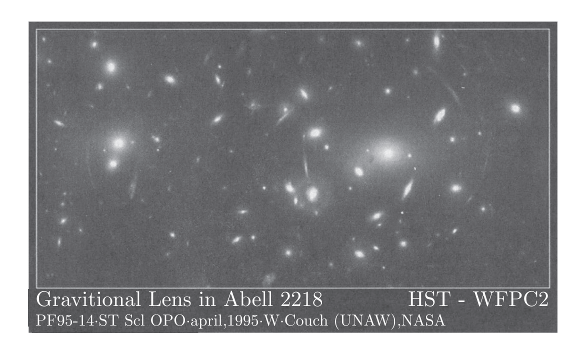


图 10.1　星系团 Abell 2218 中的前景星系使背景星系的图像发生畸变. 见右部星系团中心区域周围的椭弧

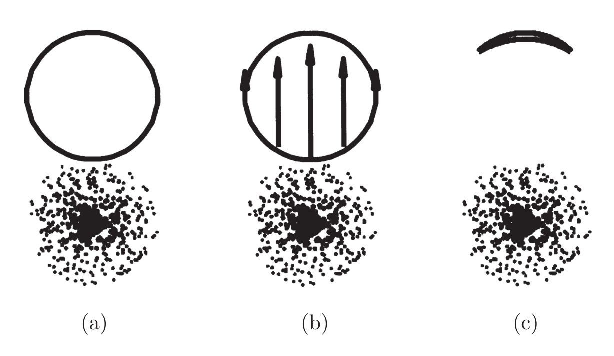


图 10.2　(a) 源是一个圆形星系, 位于前景区域之后. 前景质量分布区域, 用底部的黑点表示. 观测者位于下方, 因此前景质量区域位于源和观测者之间. (b) 源发出的光线在通过质量分布区域时发生弯曲. 最接近质量分布区域的光线弯曲得最严重. (c) 最终结果是观测者观测到一段弧线

研究中一个非常活跃的领域是利用背景星系来推断星系团的质量分布 (例如, Clowe et al., 1998). 绝大多数情况下, 引力透镜图像并不像图 10.1 所示的那样明显. 但是, 大量背景星系的存在可以弥补这种不足. 通过许多小畸变, 观测者可以成功地得到星系团的质量估计. 这种对小畸变进行统计平均的思想是弱引力透镜的标志. 对于宇宙学家来说, 质量估计是重要的信息：许多宇宙学限制都基于星系团的质量分布与丰度 (例如, 9.5 节, Carlberg et al., 1997; Bahcall et al., 2000).

我们对弱引力透镜感兴趣不是因为类似于星系团这样的单个透镜体, 而是由于它可以标示宇宙的大尺度结构, 得出暗物质的分布 (例如, 指向天空中某点，把它

认为高密度区域) 不是必须的目标. 然而, 我们更期望计算一些相对简单的统计, 比如相关函数及其傅里叶变换、功率谱. 实际上, 这些才是我们作为宇宙学家真正关心的方面. 我们并不关心高于平均密度或低于平均密度的区域的具体方位, 我们只是简单地希望将观测与理论结合. 因此, 我们在此的目标是建立星系图像畸变的观测与质量功率谱的联系.

最后, 我们关注的是从引力透镜中找到畸变的相关性. 假设两个圆形星系的上方或下方存在一个密度扰动区域, 我们期望观测到这个星系对的畸变图像如图 10.3(a) 所示. 如果密度扰动区存在于星系对的中间或一侧, 我们会看到类似于图 10.3(b) 所示的图像. 但是, 透镜效应不会产生图 10.3(c) 所示的图像. 在以后的章节我们将证明上述效应经常被用来检验系统问题, 这类问题对观测有一定影响.

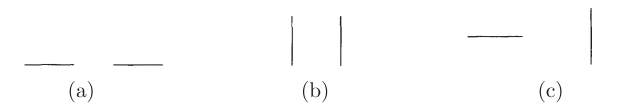


图 10.3　不同的透镜模型. (a), (b) 可能由于质量分布产生; (a) 在畸变的图像之上或之下, (b) 在图像之间或在一侧; (c) 是不可能出现的情况

10.2　测地线与剪切

我们希望能够解决远距离源发出的光线穿过不均匀的宇宙时的路径问题. 图 10.4 显示了该路径的几何学示意图, 这类似于我们讨论过的角相关函数. 光子在任意时刻的位置用 $\vec{x}$ 表示,x_3 等于径向距离 χ, 切向部分等于 $\chi\vec{\theta}$. 我们观测到的源的强度是

$$I_{\rm obs}(\vec{\theta}) = I_{\rm true}(\vec{\theta}_S); \tag{10.1}$$

位于 $\vec{\theta}$ 处的图像代表的源的位置实际是 $\vec{\theta}_S$.

为了解决光线的路径问题, 我们需要使用广义相对论的知识. 回顾第 4 章, 我们使用测地线方程的时间项得到 $\mathrm{d}p/\mathrm{d}t$—— 动量大小随时间的变化率. 这里, 我们感兴趣的是偏斜度, 广义相对论的空间部分表示为

$$\frac{\mathrm{d}^2 x^i}{\mathrm{d}\lambda^2} = -\Gamma^i_{\alpha\beta}\frac{\mathrm{d}x^\alpha}{\mathrm{d}\lambda}\frac{\mathrm{d}x^\beta}{\mathrm{d}\lambda}; \tag{10.2}$$

我们需要得到切向部分. 让我们来考虑方程的左边. 用仿射参量 λ 来表示 χ 的导数,

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}\chi}{\mathrm{d}\lambda} &= \frac{\mathrm{d}\chi}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}\lambda}\\ &= \frac{-1}{a}p(1-\Psi).\end{aligned} \tag{10.3}$$

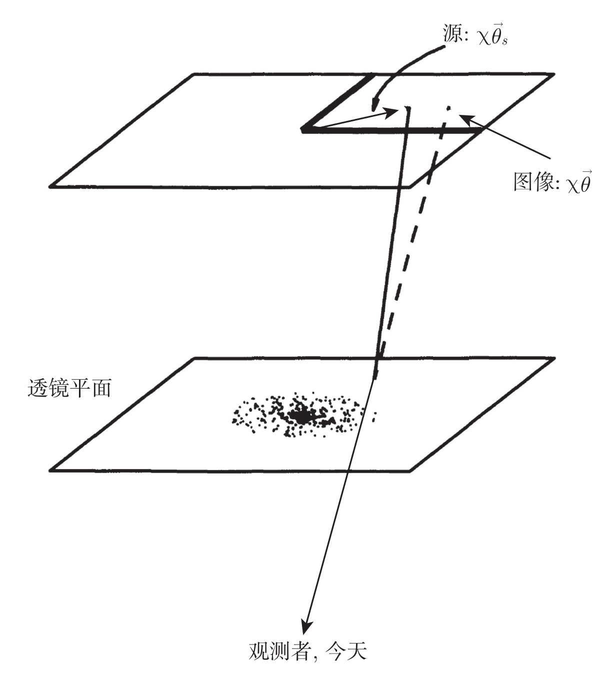


图 10.4　离开遥远的源的光线经过高密度区域时发生偏折. 任何时候，光线的位置可以用标定距透镜中心的角距离的二维矢量来表示. 光线从角矢量 $\vec{\theta}_S$ 发出. 但在我们看来, 光线来自于 $\vec{\theta}$

这个等式的第一部分 $(\mathrm{d}x/\mathrm{d}t = -1/a)$ 得自方程 (2.42), 等式的第二部分得自方程 (4.14). $\vec{x}^i$ 的切向部分为 $\chi\theta^i$, 所以测地线方程的左边可以表示为

$$\frac{\mathrm{d}^2x^i}{\mathrm{d}\lambda^2} = \frac{1}{a}p\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\chi}\left[\frac{p}{a}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\chi}(\chi\theta^i)\right]. \tag{10.4}$$

这里, 由于乘以了小量 θ^i, 所以忽略了二级小量的引力势这一项. 我们进一步化简, 由于动量 p 乘以 a 保持常数, 因此把 pa 从导数中提取出来, 得

$$\frac{\mathrm{d}^2x^i}{\mathrm{d}\lambda^2} = p^2\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\chi}\left[\frac{1}{a^2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\chi}(\chi\theta^i)\right]. \tag{10.5}$$

现在, 让我们来关注测地线方程的右边项. 把对 λ 的求导转变为对 χ 的求导, 得到

$$\Gamma^i_{\alpha\beta}\frac{\mathrm{d}x^\alpha}{\mathrm{d}\lambda}\frac{\mathrm{d}x^\beta}{\mathrm{d}\lambda} = \left(\frac{p}{a}\right)^2(1-\Psi)^2\Gamma^i_{\alpha\beta}\frac{\mathrm{d}x^\alpha}{\mathrm{d}\chi}\frac{\mathrm{d}x^\beta}{\mathrm{d}\chi}. \tag{10.6}$$

α 和 β 有三种类型：$\alpha = \beta = 0$; 一个表征空间, 一个表征时间; 两个都表征空间. 在 (5.7) 式中, 我们已经导出了相应的克氏符. 现在, 我们依次来看这三种情况：

- 当 $\alpha=\beta=0$ 时,

$$\Gamma^i_{00}\left(\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}\chi}\right)^2=\Psi_{,i}=-\Phi_{,i}. \tag{10.7}$$

  晚期宇宙中不存在各向异性压, 因此 $\Phi=-\Psi$.

- 当一个参数表征空间时, 只有 $i=j$ 时 Γ^i_{0j} 是非零值. 因此, 空间参数 j 的切向部分为 $x^j=\chi^{\theta j}$. 因为 θ^j 是小量, 我们可以忽略克氏符中的引力势

$$\Gamma^i_{0j}\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}\chi}\frac{\mathrm{d}x^j}{\mathrm{d}\chi}=-aH\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\chi}[\chi^{\theta^i}]. \tag{10.8}$$

- 当两个参数都是空间量时, 克氏符正比于引力势. 当乘以小的切向距离时, 这些项可以被忽略, 所以我们只需要考虑 $\Gamma^i_{jk}(\mathrm{d}x^j/\mathrm{d}\chi)(\mathrm{d}x^k/\mathrm{d}\chi)$ 这一项, 其中, 沿径向方向,$j=k=3$. 此时,$x^3=\chi$, 导数是微不足道的, 我们可以得到

$$\Gamma^i_{jk}\frac{\mathrm{d}x^j}{\mathrm{d}\chi}\frac{\mathrm{d}x^k}{\mathrm{d}\chi}=-\Phi_{,i}. \tag{10.9}$$

将这些项代入测地线方程进行切向运动,

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\chi}\left[\frac{1}{a^2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\chi}(\chi\theta^i)\right]=\frac{2}{a^2}\left[\Phi_{,i}+aH\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\chi}[\chi\theta^i]\right]. \tag{10.10}$$

方程左边作用于 a^{-2} 的导数项消掉了方程右边正比于 aH 的这一项, 所以, 切向转置的最后方程为

$$\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}\chi^2}(\chi\theta^i)=2\Phi_{,i}. \tag{10.11}$$

测地线方程告诉我们, 在均匀势中, 角方位 $(\chi\theta^i)'$ 保持常数. 但是, 变化的势可以对其产生扰动. 符号是正确的, 即位于 $x=y=0$ 的高密度中心的势 $\Phi>0$, 因此, 势对于 x 的导数在 $x>0$ 时是负值. 正因为如此, 光线穿过高密度区域时在 x 轴正方向所受的力是负的.

对 (10.11) 式进行积分, 可以得到源角度的函数表示像角度. 积分得到

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\chi}(\chi\theta^i)=2\int_0^{\chi}\mathrm{d}\chi'\Phi_{,i}(\vec{x}(\chi'))+\text{constant}; \tag{10.12}$$

将常数项固定. 再次积分得到

$$\theta^i_S=\frac{2}{\chi}\int_0^{\chi}\mathrm{d}\chi''\int_0^{\chi''}\mathrm{d}\chi'\Phi_{,i}(\vec{x}(\chi'))+\text{constant} \tag{10.13}$$

因为 $\theta^i(\chi)\equiv\theta^i_S$, $\vec{\theta}$ 的值取自源天体. 现在我们看到, 常数等于观测到的角度 θ^i. 在不存在扰动的情况下, 该角度保持它的初始值. 对 χ',χ'' 的积分如图 10.5 的阴影部

分所示, 所以我们将 χ'' 的积分范围从 χ' 改为 χ. 忽略对 χ'' 的积分 (因为 $\Phi_{,i}$ 仅依赖于 χ')

$$\theta_S^i = \theta^i + 2\int_0^{\chi} d\chi' \Phi_{,i}(\vec{x}(\chi'))\left(1 - \frac{\chi'}{\chi}\right). \tag{10.14}$$

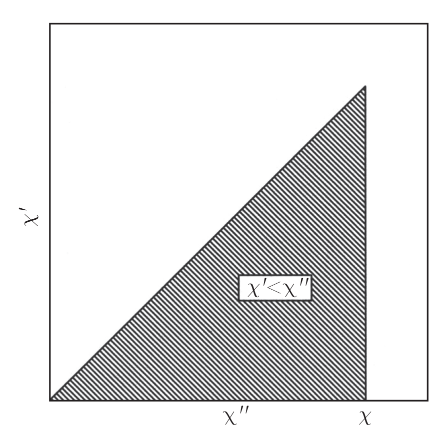


图 10.5　(10.13) 式所示的双重积分的积分范围. 阴影部分可以表示为 $0 < \chi'' < \chi$, $0 < \chi' < \chi''$, 或 $\chi' < \chi'' < \chi$, $0 < \chi' < \chi$. 由于对 χ'' 的积分可以被忽略, 所以后者更适用

为了描述光线的角度改变, 我们定义一个 2×2 的对称转换矩阵,

$$\begin{aligned} A_{ij} &\equiv \frac{\partial \theta_S^i}{\partial \theta^j} \\ &\equiv \begin{pmatrix} 1-\kappa-\gamma_1 & -\gamma_2 \\ -\gamma_2 & 1-\kappa+\gamma_1 \end{pmatrix}. \end{aligned} \tag{10.15}$$

参数 κ 被称为汇聚度, 它描述了图像的放大程度. 尽管这种放大衍生出许多重要分支 (例如, 微引力透镜和多重像), 它最重要的应用还是对于弱引力透镜畸变现象的研究. 进一步指出, 这些畸变由剪切的两个部分来表述,

$$\begin{aligned} \gamma_1 &= -\frac{A_{11} - A_{22}}{2}, \\ \gamma_2 &= -A_{12}. \end{aligned} \tag{10.16}$$

(10.15) 式表明剪切的组成部分涉及 (10.14) 式所示的对 $\vec{\theta}$ 的导数[①], 对 $\vec{\theta}$ 的依赖仅存在于对势的讨论中, 即 $\vec{x}(\chi') = \chi'\vec{\theta}$ (对切向部分来说). 因此, 对 θ^j 的导数可以表

①该导数是对观测角度 $\vec{\theta}$ 的导数,(10.14) 式右边依赖于光线真实位置处的势能. 原则上讲,A_{ij} 的导数十分复杂. 然而实际上, 变形量足够小, 我们可以忽略最后的角度 $\vec{\theta}$ 和真实角的区别. 因此,(10.14) 式右边我们估计沿无畸变路径的势能由 $\vec{\theta}$ 参数化.

示为 $x_j \cdot \chi'$. 因此

$$\begin{aligned} A_{ij} - \delta_{ij} &= \begin{pmatrix} -\kappa - \gamma_1 & -\gamma_2 \\ -\gamma_2 & -\kappa + \gamma_1 \end{pmatrix} \\ &= 2\int_0^\chi \mathrm{d}\chi' \Phi_{,ij}(\vec{x}(\chi'))\chi' \left(1 - \frac{\chi'}{\chi}\right). \end{aligned} \tag{10.17}$$

其中, γ_1, γ_2 是已定义的势函数. 下一节将展示它们如何影响星系所成像的形状.

10.3 作为剪切估计量的椭率

我们认为透镜可以把圆形图像变为椭圆图像. 为了描述这个效应, 我们需要定量地描述椭率, 然后进一步得到椭率与上述剪切部分的相关性. 椭率最简单的计算就是首先定义图像的四极矩. 设想图像的中心位于 $\theta_x - \theta_y$, 则它不存在偶极矩 ($\langle\theta_x\rangle = \langle\theta_y\rangle = 0$, 这里, 尖括号代表强度的平均). 四极矩定义为

$$q_{ij} \equiv \int \mathrm{d}^2\theta I_{\mathrm{obs}}(\theta)\theta_i\theta_j. \tag{10.18}$$

如果是圆形图像, 则 $q_{xx} = q_{yy}, q_{xy} = 0$. 因此, 计算椭率的两个有效方法是

$$\begin{aligned} \varepsilon_1 &\equiv \frac{q_{xx} - q_{yy}}{q_{xx} + q_{yy}}, \\ \varepsilon_2 &\equiv \frac{2q_{xy}}{q_{xx} + q_{yy}}. \end{aligned} \tag{10.19}$$

图 10.6 展示了不同方位的椭圆图像及其与 ε_1,ε_2 值的联系. 根据这些定义, 我们可以对 10.1 节最后阐述的椭率相关性进行更详细的讨论. 图 10.3(a) 在 $\vec{\theta}_1, \vec{\theta}_2$ 存在两个星系, 每个的 ε_1 是正值; (b) 中两个的 $\vec{\theta}_1$ 是负值. 在各种可能的情况下, 如果两个星系的连线方向沿 x 轴方向, 则 $\varepsilon_1(\vec{\theta}_1)\varepsilon_1(\vec{\theta}_2)$ 是正值. (c) 中的情况不可能出现, 在 (c) 中, 乘积为负值. 因此, 我们不要期望透镜现象会产生 $\varepsilon_1(\vec{\theta}_1)\varepsilon_1(\vec{\theta}_2) < 0$ 的情况.

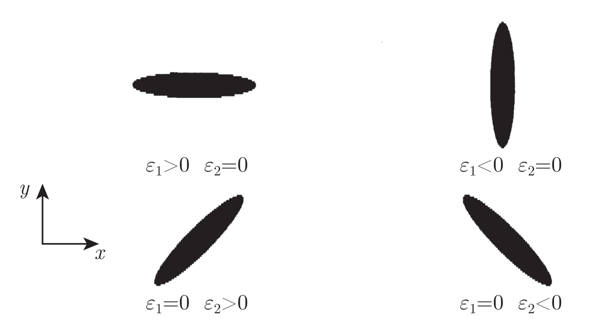


图 10.6 椭率 ε_1 和 ε_2 的定义. 对于圆形图像来说, 这两个椭率都等于 0

那么 (10.19) 式中定义的椭率与 (10.16) 式中定义的剪切怎样联系起来呢? 我们假设源天体是球状的, 现在计算所成的像的椭率. 对于 ε_1 有

$$\varepsilon_1 = \frac{\displaystyle\int \mathrm{d}^2\theta I_{\text{true}}(\vec{\theta_S})[\theta_x\theta_x - \theta_y\theta_y]}{\displaystyle\int \mathrm{d}^2\theta I_{\text{true}}(\vec{\theta_S})[\theta_x\theta_x + \theta_y\theta_y]}, \tag{10.20}$$

这里代入了 (10.1) 式. 这里的积分是对观测角度 $\vec{\theta}$ 的积分, 该积分部分依赖于发射光子的源的角度 $\vec{\theta}_S$. 当角度很小时, 两个角度通过 $\theta_i = (A^{-1})_{ij}\theta_{Sj}$ 联系起来. 积分时, 用 $(A^{-1}\theta_S)_i$ 代替 θ_i, 得到

$$\varepsilon_1 = \frac{\displaystyle\sum_{ij}[(A^{-1})_{xi}(A^{-1})_{xj} - (A^{-1})_{yi}(A^{-1})_{yj}]\int \mathrm{d}^2\theta_S I_{\text{true}}(\vec{\theta_S})\theta_{Si}\theta_{Sj}}{\displaystyle\sum_{ij}[(A^{-1})_{xi}(A^{-1})_{xj} + (A^{-1})_{yi}(A^{-1})_{yj}]\int \mathrm{d}^2\theta_S I_{\text{true}}(\vec{\theta_S})\theta_{Si}\theta_{Sj}}. \tag{10.21}$$

$i = j$ 时, 对真实圆形图像的积分等于 0; 因此, 它正比于 δ_{ij}. 由于积分既出现在分子上又出现在分母上, 因此比例常数是不固定的,

$$\begin{aligned}\varepsilon_1 &= \frac{(A^{-1})_{xi}(A^{-1})_{xi} - (A^{-1})_{yi}(A^{-1})_{yi}}{(A^{-1})_{xi}(A^{-1})_{xi} + (A^{-1})_{yi}(A^{-1})_{yi}} \\ &= \frac{(A^{-1}_{xx})^2 - (A^{-1}_{yy})^2}{(A^{-1}_{xx})^2 + (A^{-1}_{yy})^2 + 2(A^{-1}_{xy})^2}.\end{aligned} \tag{10.22}$$

对 A 这个 2×2 的矩阵取逆是比较容易的:

$$A^{-1} = \frac{1}{(1-\kappa)^2 - \gamma_1^2 - \gamma_2^2}\begin{pmatrix} 1-\kappa+\gamma_1 & \gamma_2 \\ \gamma_2 & 1-\kappa-\gamma_1 \end{pmatrix}, \tag{10.23}$$

由此可以得到用剪切表述的椭率 ε_1

$$\begin{aligned}\varepsilon_1 &= \frac{(1-\kappa+\gamma_1)^2 - (1-\kappa-\gamma_1)^2}{(1-\kappa+\gamma_1)^2 + (1-\kappa-\gamma_1)^2 + 2\gamma_2^2} \\ &= \frac{4\gamma_1(1-\kappa)}{2(1-\kappa)^2 + 2\gamma_1^2 + 2\gamma_2^2}.\end{aligned} \tag{10.24}$$

当所有的畸变很小时, 得到

$$\varepsilon_1 \simeq 2\gamma_1, \tag{10.25}$$

ε_2 有相似的处理方法. 通过计算远距离星系的椭率, 我们可以得到对剪切场的估计, 该剪切场主要依赖于引力势 (见 (10.17) 式).

10.4 弱引力透镜的功率谱

现在, 我们通过计算背景星系的椭率来计算最简单的剪切场. 将下列等式从转换矩阵 A 中移除,

$$\psi_{ij} \equiv A_{ij} - \delta_{ij}. \tag{10.26}$$

随着不均匀性的消失, 观测角度 θ 等于源角度 θ_S, 因此 $A = I$. 通过从矩阵 A 中移除同一矩阵, 我们可以提取由于不均匀性造成的光线路程畸变的信息. 同样的, 我们把 ψ 作为畸变张量.(10.17) 式的最后一项即为 ψ_{ij}, 对应于距离我们 $\chi(z)$ 的一个或多个背景星系. 一般来说, 巡天包含红移的分布.我们将其定义为 $W(\chi)$, 就像我们在第 9 章中研究角相关函数那样. 将 W 进行归一化, 使得 $\int \mathrm{d}\chi W(\chi) = 1$. 因此, 该畸变张量为

$$\psi_{ij} = 2\int_0^{\chi_\infty} \mathrm{d}\chi W(\chi) \int_0^{\chi} \mathrm{d}\chi' \Phi_{,ij}(\vec{x}(\chi'))\chi' \left(1 - \frac{\chi'}{\chi}\right). \tag{10.27}$$

简化 (如图 10.5 所示), 得

$$\psi_{ij}(\vec{\theta}) = \int_0^{\chi_\infty} \mathrm{d}\chi \Phi_{,ij}(\vec{x}(\chi))g(\chi) \tag{10.28}$$

这里, 我们定义

$$g(\chi) \equiv 2\chi \int_{\chi}^{\chi_\infty} \mathrm{d}\chi' \left(1 - \frac{\chi}{\chi'}\right) W(\chi'). \tag{10.29}$$

平均来看, 畸变张量的各部分等于 0: $\langle\psi_{ij}\rangle = 0$. 我们需要做的与分析 CMB 和星系分布数据时所做的一样, 即计算两点相关函数, 可以是 ψ_{ij} 不同部分的角相关函数, 也可以是它们的傅里叶变换 —— 功率谱. 为了计算两点相关函数, 我们直接使用 9.1 节中的结论.

要计算畸变张量的功率谱 $P^{\psi}_{ijkl}(\vec{l})$, 我们回顾分析星系角相关函数的步骤 (见表 10.1).

- 因为关于势的讨论规定 $\vec{x} = \chi(\theta_1, \theta_2, 1)$, 所以 (10.28) 式中的畸变张量是一个 2 维矢量 θ 的函数. 因为在星系密度场情况下, 我们可以对 ψ_{ij} 进行傅里叶变换, 因此它依赖于与 $\vec{\theta}, \vec{l}$ 共轭的 2 维矢量.
- 在星系角度密度扰动情况下, 我们用 3 维密度扰动的积分和权重函数来表述 2 维密度扰动 (见 (9.3) 式). 在这里, 情况是一样的: (10.29) 式中的 g 代替了选择函数 W; 同时, 这里的 3 维场不是密度扰动 δ, 而是 $\Phi_{,ij}$.

- 我们发现, 在小角度极限下,2 维功率谱可以通过对 3 维功率谱的积分得到, 见 (9.10) 式. 在这里, 同样,ψ_{ij} 的 2 维功率谱可以通过对引力势 Φ 的 3 维功率谱的积分得到. 唯一的不同是计算 $\Phi_{,ij}$ 的 3 维功率谱.$\Phi_{,ij}$ 的傅里叶变换是 $-k_ik_j\tilde{\Phi}$, 方差是

$$k_ik_jk'_ik'_m\langle\tilde{\Phi}(\vec{k})\tilde{\Phi}^*(\vec{k}')\rangle = (2\pi)^3k_ik_jk_lk_m\delta^3(\vec{k}-\vec{k}')P_\Phi(k). \tag{10.30}$$

所以我们需要的、与 $\Phi_{,ij}$ 的傅里叶变换相关的 3 维功率谱是 $k_ik_jk_lk_mP_\Phi(k)$.

表 10.1 星系的角相关与弱引力透镜的相似性

	星系角分布	弱引力透镜
2D observation	$\delta_2(\vec{\theta})$	Distortion tensor $\psi_{ij}(\vec{\theta})$
Weighting function	$W(\chi)$	$g(\chi)$
3D field	δ	$\Phi_{,ij}$
3D power spectrum	$\langle\tilde{\delta}\tilde{\delta}^*\rangle\sim P(k)$	$\langle\tilde{\Phi}_{,ij}\tilde{\Phi}^*_{,lm}\rangle\sim k_ik_jk_lk_mP_\Phi(k)$
2D power spectrum	$P_2(l)$	$P^\psi_{ijlm}(\vec{l})$

我们继续关注 P_Φ. 如果读者更倾向于使用密度功率谱, 你可以参见 (7.7) 式, 将 P_Φ 乘以 $9\Omega_m^2H_0^4(1+z)^2/(4k^4)$. 根据 (9.10) 式, 有

$$\langle\tilde{\psi}_{ij}(\vec{l})\tilde{\psi}_{lm}(\vec{l}')\rangle = (2\pi)^2\delta^2(\vec{l}-\vec{l}')P^\psi_{ijlm}(\vec{l}) \tag{10.31}$$

2 维功率谱为

$$P^\psi_{ijlm}(\vec{l}) = \int_0^{\chi_\infty}\mathrm{d}\chi\frac{g^2(\chi)}{\chi^2}\frac{l_il_jl_ll_m}{\chi^4}P_\Phi(l/\chi). \tag{10.32}$$

(10.32) 式是畸变张量的不同部分的功率谱的表达式. 通过 (10.16) 式, 我们将 (10.32) 式表述成与 κ 和剪切的两个不同部分相关的功率谱. 让我们准确地计算出剪切的一个部分; 其余的两个量与一个问题有关. 因为 $\gamma_1=(\psi_{22}-\psi_{11})/2$, 所以 γ_1 的功率谱是 1/4 倍的 $P^\psi_{2222}+P^\psi_{1111}-2P^\psi_{2211}$. 我们把 2 维功率谱分解为径向方向 $\vec{l}$ 与角度部分 ϕ_l, 那么 $l_1=l\cos\phi_l$,$l_2=l\sin\phi_l$, 因此

$$P_{\gamma_1}(l,\phi_l) = (\sin^4\phi_l+\cos^4\phi_l-2\sin^2\phi_l\cos^2\phi_l)\left[\frac{l^4}{4}\int_0^{\chi_\infty}\mathrm{d}\chi\frac{g^2(\chi)}{\chi^6}P_\Phi(l/\chi)\right]. \tag{10.33}$$

由于 $\sin^4\phi_l+\cos^4\phi_l+2\cos^2\phi_l\sin^2\phi_l=1$, 上式中圆括号中的项等于 $1-4\sin^2\phi_l\cos^2\phi_l=1-\sin^2(2\phi_l)$ 或者 $\cos^2(2\phi_l)$. 在练习 6 中你将会看到, 上式方括号中的项等于汇聚场功率谱,

$$P_\kappa = \frac{l^4}{4}\int_0^{\chi_\infty} \mathrm{d}\chi \frac{g^2(\chi)}{\chi^6} P_\Phi(l/\chi). \tag{10.34}$$

因此,γ_1 的功率谱为

$$P_{\gamma_1}(l,\phi_l) = \cos^2(2\phi_l)P_\kappa(l). \tag{10.35}$$

你将会在练习 6 中看到 γ_2 的功率谱同样正比于 P_κ,

$$P_{\gamma_2}(l,\phi_l) = \sin^2(2\phi_l)P_\kappa(l). \tag{10.36}$$

所以, 剪切两部分的功率谱不仅依赖于 $\vec{l}$ 的大小, 还依赖于它的方向. 图 10.7 展现了两种模型的汇聚场功率谱. 我们注意到, 与 CMB 或物质功率谱不同, 剪切场功率谱特征不明显.

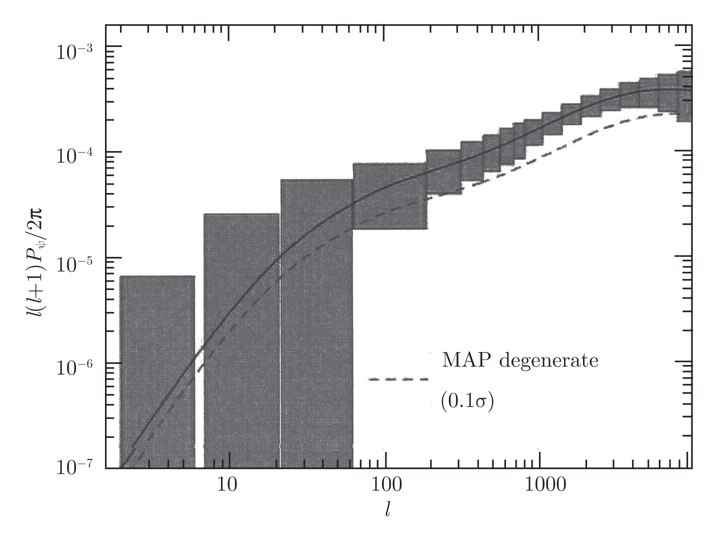


图 10.7 两种 CDM 模型的汇聚场功率谱 (Hu and Tegmark,1999). 仅靠 CMB 数据不能区分这两种模型, 因此, 未来的弱引力透镜数据 (图中由误差框描绘) 将增加非常有价值的信息. 投射的误差框假设了一个极限星等到 25 等的 3° 的巡天

剪切两个部分的功率谱都正比于 P_κ, 其因子依赖于 $\vec{l}$ 与 x 轴之间的角度. 我们可以假设剪切两部分的线性组合仅依赖于 $P_\kappa(l)$, 而不依赖于角度 ϕ_l. 这是正确的. 更有趣的是, 不同的线性组合有可能会消掉功率谱信息. 这同样是正确的, 而且非常有用. 这样的模式不存在期望的宇宙学信号. 通过分析这种 “零” 模式, 我们可以辨别并消除试验中的污染因素. 我想花一些时间把这些模式分为两种 —— 有信号的模式与没有信号的模式. 之所以这样区分不仅是因为它们在弱引力透镜中的重要作用, 还因为 CMB 极化中也存在类似的情况 (我们将在以下章节中进行讨论). 在极化的例子中, 只有在标量扰动情况下 “零” 模式等于零, 张量扰动对模式

是有贡献的. 接下来, 我们将会在 10.9 节中看到这种分解对探测原初引力波的重要意义.

剪切的两个线性组合：

$$\begin{aligned} E(\vec{l}) &\equiv \cos(2\phi_l)\gamma_1(\vec{l}) + \sin(2\phi_l)\gamma_2(\vec{l}), \\ B(\vec{l}) &\equiv -\sin(2\phi_l)\gamma_1(\vec{l}) + \cos(2\phi_l)\gamma_2(\vec{l}). \end{aligned} \tag{10.37}$$

从 γ_1、γ_2 的谱中可以轻松得到这些模式的功率谱. 首先得到 E 模式:

$$P_E = \cos^2(2\phi_l)P_{\gamma_1} + \sin^2(2\phi_l)P_{\gamma_2} + 2\sin(2\phi_l)\cos(2\phi_l)P_{\gamma_1\gamma_2}. \tag{10.38}$$

该种表述涉及 $\langle\gamma_1\gamma_2\rangle$ 功率谱, 它等于 $\cos(2\phi_l)\sin(2\phi_l)$ 乘以普遍存在的汇聚场功率谱. 因此,P_E 正比于 P_κ, 比例常数是 $\cos^4(2\phi_l) + \sin^4(2\phi_l) + 2\cos^2(2\phi_l)\sin^2(2\phi_l) = (\cos^2(2\phi_l) + \sin^2(2\phi_l))^2 = 1$, 或者

$$P_E = P_\kappa, \tag{10.39}$$

上式与角度 ϕ_l 无关. B 模式的计算是类似的：

$$\begin{aligned} P_B &= \sin^2(2\phi_l)P_{\gamma_1} + \cos^2(2\phi_l)P_{\gamma_2} - 2\sin(2\phi_l)\cos(2\phi_l)P_{\gamma_1\gamma_2} \\ &= 0. \end{aligned} \tag{10.40}$$

读者也可以检验 $\langle EB\rangle$ 的交叉功率谱为零.

用弱引力透镜场探测大尺度结构的研究还处在起步阶段.2000 年时这一结论首次被 4 个独立的研究小组发现 (Van Wearbecke et al., 2000; Bacon, Refregier and Ellis, 2000; Wittman et al, 2000; Kaiser, Wilson and Luppino, 2000). 他们描述了剪切相关函数, 其中的一组研究结果展示在图 10.10 中. 我们可以轻松地将功率谱转换为角相关函数, 这样更便于与数据进行比较.

我们重点考虑 γ_1 的角相关函数,$P_{\gamma 1}$ 的傅里叶变换是

$$w_{\gamma 1}(\vec{\theta}) = \int \frac{\mathrm{d}^2 l}{(2\pi)^2} \mathrm{e}^{\mathrm{i}\vec{l}\cdot\vec{\theta}} \cos^2(2\phi_l) \left[\frac{l^4}{4}\int_0^{\chi_\infty} \mathrm{d}\chi \frac{g^2(\chi)}{\chi^6} P_\Phi(l/\chi)\right]. \tag{10.41}$$

这里, 我们积分的变量 ϕ_l 是 2 维矢量 $\vec{l}$ 与 x 轴之间的夹角. 如果我们对 ϕ_l 进行角积分, 情况会变得很复杂：$\mathrm{i}l\theta\cos(\phi_l - \phi)$(见图 10.8). 因此, 我们改为对 $\vec{l}$ 与 $\vec{\theta}$ 之间的角度 ϕ' 进行积分,

$$w_{\gamma 1}(\vec{\theta}) = \int_0^\infty \frac{\mathrm{d}l}{(2\pi)^2} \frac{l^5}{4} \int_0^{\chi_\infty} \mathrm{d}\chi \frac{g^2(\chi)}{\chi^6} P_\Phi(l/\chi) \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\phi' \mathrm{e}^{\mathrm{i}l\theta\cos\phi'} [\cos(2(\phi' + \phi))]^2. \tag{10.42}$$

上述积分中 cos 的平方等于

$$
\begin{aligned}
&[\cos(2\phi')\cos(2\phi)-\sin(2\phi')\sin(2\phi)]^2 \\
&=\cos^2(2\phi')\cos^2(2\phi)-\sin(4\phi')\sin(4\phi)/2+\sin^2(2\phi')\sin^2(2\phi).
\end{aligned}
\tag{10.43}
$$

这里有三项要被积分. 对于 $\cos^2(2\phi')$ 的积分, 首先将其写成 $(1+\cos(4\phi'))/2$; 接下来, $\cos(n\phi')\mathrm{e}^{\mathrm{i}z\cos\phi'}$ 的积分等于 $2\pi\mathrm{i}^n J_n(z)$ (见 (C.21) 式). 所以, $\cos^2(2\phi')$ 的积分给出一个因子: π 乘以 $J_0(l\theta)+J_4(l\theta)$. 应用相同的结论, 我们可以看到 $\sin^2(2\phi')$ 的积分给出因子 π 乘以 $J_0(l\theta)-J_4(l\theta)$.$\sin(4\phi')$ 的积分被消掉 (变换积分变量为 $\phi''=\phi'-\pi$, 被积函数是反对称的). 因此

$$
\begin{aligned}
w_{\gamma 1}(\vec{\theta})=&\frac{1}{16\pi}\int_0^\infty \mathrm{d}l\ l^5\int_0^{\chi_\infty}\mathrm{d}\chi\frac{g^2(\chi)}{\chi^6}P_\Phi(l/\chi) \\
&\times\{\cos^2(2\phi)[J_0(l\theta)+J_4(l\theta)]+\sin^2(2\phi)[J_0(l\theta)-J_4(l\theta)]\}.
\end{aligned}
\tag{10.44}
$$

这里存在很多角度, 我们重申 $\vec{\theta}=(\theta\cos\phi,\theta\sin\phi)$; 也就是说,$\phi$ 是 $\vec{\theta}$ 与 x 轴之间的夹角. 通过把对 l 的积分转化为对 3 维波数 $k=l/\chi$ 的积分, 我们可以把核函数引入角相关函数,

$$
w_{\gamma 1}(\vec{\theta})=\int_0^\infty \mathrm{d}kk^5P_\Phi(k)[F_+(k\theta)\cos^2(2\phi)+F_-(k\theta)\sin^2(2\phi)].
\tag{10.45}
$$

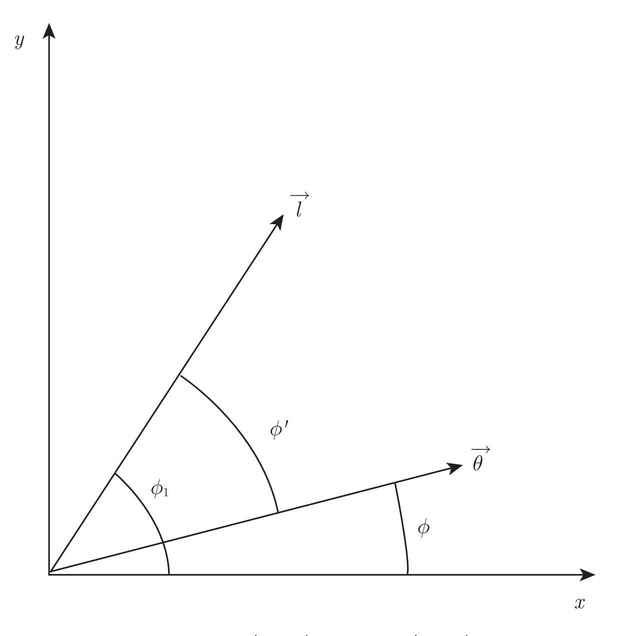


图 10.8 x-y 轴坐标系中 $\vec{\theta}$ 与 $\vec{l}$ 的夹角. $\vec{\theta}$ 与 $\vec{l}$ 的夹角被称为 ϕ'

注意, 这里假设势不随时间变化. 由于非线性或非物质主导的出现, 这一假设在晚期宇宙中不成立. 对径向距离 χ 积分的核函数通过贝塞尔函数进行调整,

$$F_{\pm}(k\theta) \equiv \frac{1}{16\pi} \int_0^{\chi_\infty} \mathrm{d}\chi g^2(\chi)[J_0(k\chi^\theta) \pm J_4(k\chi\theta)]. \tag{10.46}$$

图 10.9 展示了红移 $z = 0.9$ 处背景星系的两种核函数.

如果我们选择 x 轴平行于星系对的连线方向, 那么我们可以计算 $\vec{\theta} = (\theta, 0)$ 处 (即 $\phi = 0$) 的相关函数. 在这种情况下, 图 10.9 表明 $w_{\gamma1}$ 永远是正值, 在 10.1 节中已经对该结果做出了预测. 另一方面,γ_2 的相关函数与 (10.45) 式给出的表达式相等, 只不过 $F_{\pm}$ 要变换位置. 因此,$w_{\gamma2}$ 通常在大尺度范围内是负值. 最后一点要指出的是, 剪切在 0.1 个角度处 (对应 k ~1 h Mpc^{-1} 的功率谱) 存在一个核函数的截断 (见图 10.9).

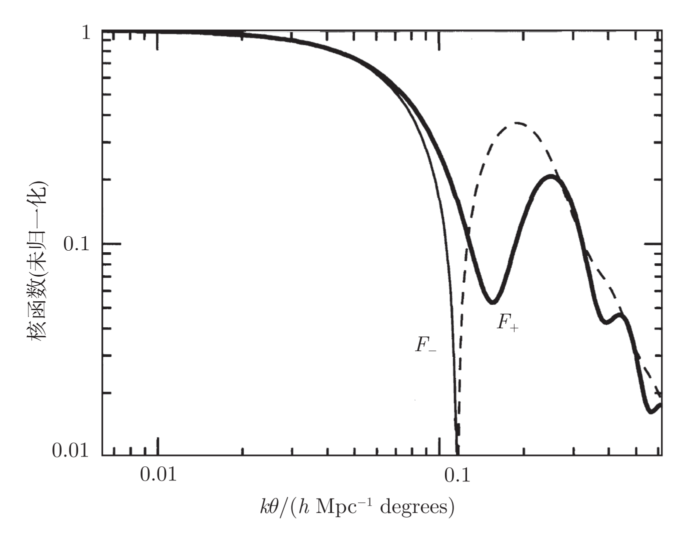


图 10.9 剪切相关函数的核函数 (假设所有背景星系位于 $z = 0.9$ 处). 虚线部分表征负的核函数. 如果将 x 轴看作星系对的连线方向, 那么对于 $\langle\gamma_1\gamma_1\rangle$ 来说是正的核函数, 对于 $\langle\gamma_2\gamma_2\rangle$ 是负的核函数. 注意, 前者永远是正值

参见图 10.10, 它展示了近些年对没有星系团存在的场进行长达几年的巡天结果. 假定由于宇宙学剪切, 可以探测椭率. 剪切的均方根幅度是 y 轴典型数值的方根, 大约在 0.01 左右. 因此, 剪切对大尺度结构的贡献约在振幅 10^{-2} 的量级 (角范围从 $1'$ 到 $1°$) 可以被探测到. 未来的巡天会得出更有意义的结论; 从这些巡天中我们可以得到更多的宇宙质量分布的信息.

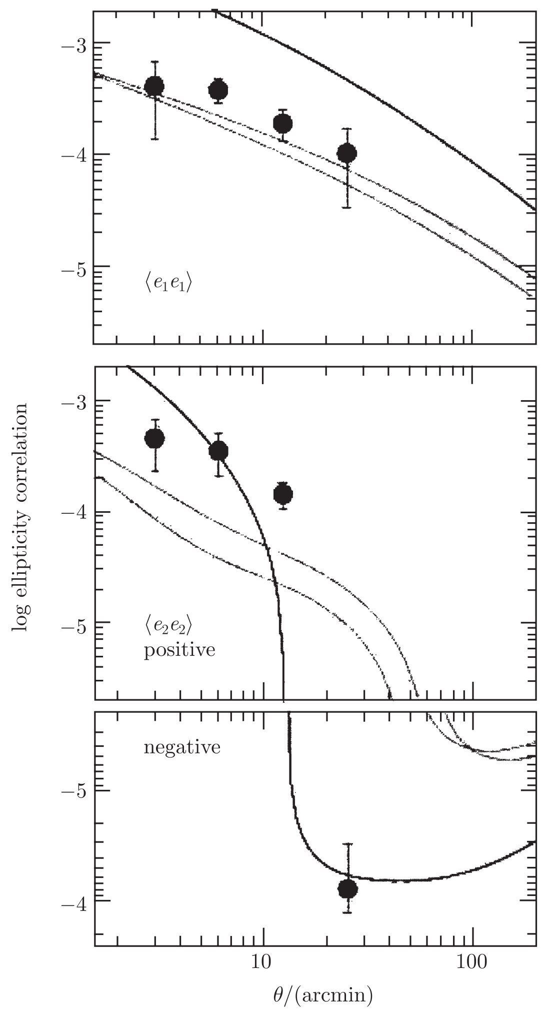


图 10.10 用 145000 个背景星系计算剪切相关函数 (Wittman et al., 2000). 图中展示了 3 个不同的 CDM 模型; 最上图是标准的 CDM 模型, 被排除在几个 σ 之外. 可以注意到, $w_{\gamma 1} = \langle e_1 e_1 \rangle$ 在所有角度范围内都是正值

10.5 极化: 四极矩与 Q/U 分解

由于退耦时期的康普顿散射,CMB 辐射被极化. 极化与剪切有很多相同的数学特征. 除数学上的相似性外, 它们也具有相似的实验历史.CMB 温度的各向异性和密度场的非均匀性在 20 世纪被观测到. 大尺度结构的弱引力透镜现象和 CMB 的

极化也已经被探测到, 它们是 21 世纪的产物. 因此, 它们还需要我们的不断探索：我们刚刚开始对它们的观测, 这些现象都有望传递大量的宇宙学信息.

沿 x 轴方向行进的光相当于电场与磁场在 y-z 轴平面振荡, 即与传播方向相切. 如果两个切向方向的强度相等, 光不会被极化. 到现在为止, 当我们考虑 CMB 时, 我们研究过这个情况. 我们必须解释两个切向方向的强度不相等的可能性, 这种情况下辐射被极化了.

初步看来, 康普顿散射是产生极化辐射的完美机制. 它允许所有的横向辐射无阻碍地穿过, 同时不允许平行于射出方向的辐射穿过. 可参见图 10.11, 该图展示了一束从 x 轴正方向入射的光线. 这束没有极化的光线在 y 轴与 z 轴方向有相同的强度. 它在原点方向散射了一个电子后转向 z 轴正方向①. 因为出射的方向沿 z 轴方向, 入射的强度不可能沿 z 方向传播. 相反, 所有沿 y 轴方向的强度 (垂直于入射和出射方向) 都可以传播. 这表明出射极化在 y 轴方向.

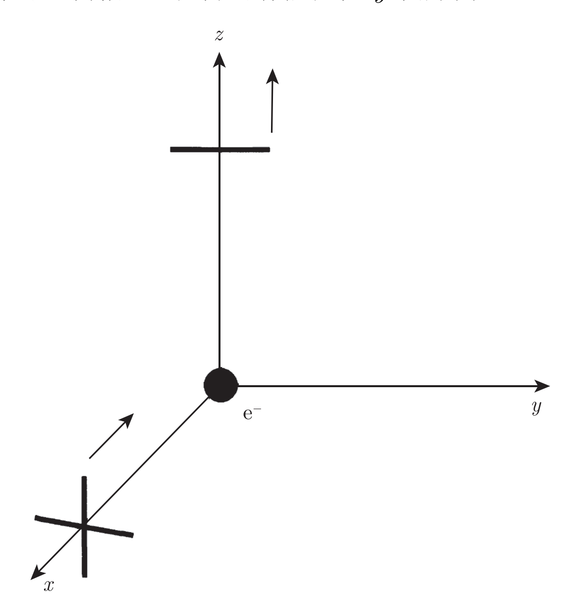


图 10.11　沿 x 轴方向行进的非极化辐射被电子散射到 z 轴正方向. 散射后, 仅辐射的 y 轴部分存在. 因为没有入射的 x 轴方向的极化, 所以出射的辐射在 y 轴方向是极化的

很明显, 我们不能仅研究入射光线; 我们应该把研究推广到所有方向. 首先要认识到极化的产生并不像图 10.11 所示的那样简单. 现在参见图 10.12, 该图展示了一个带有夸张性质的更实质性的事例：从电子各个方向入射的各向同性辐射. 这

①当然辐射散射到各个方向的可能性不同. 在这里为了简化我们只考虑一个出射方向. 在下一节中, 我们解释了这一可能性.

里,"夸张" 是因为我所展示的入射光线仅来自于 x、y 轴的正方向. 沿 x 轴的出射强度来自于 y 轴方向的入射辐射; 同时, y 轴方向的出射强度来自于 x 轴方向的入射辐射. 这两个轴方向的辐射强度相等 (各向同性辐射), 出射波的强度也相等, 即无极化现象.

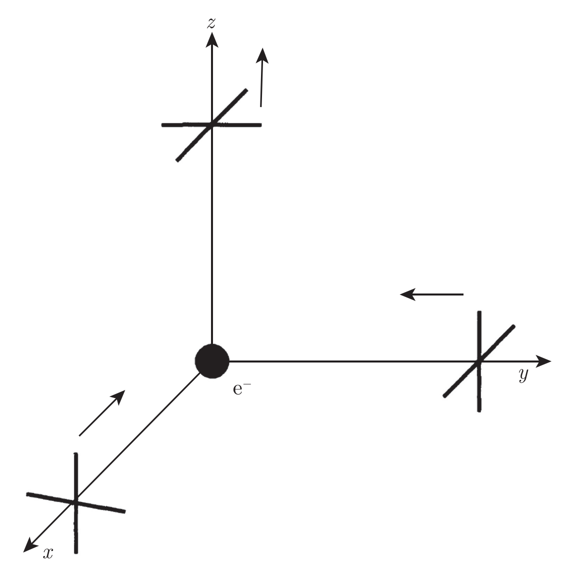


图 10.12 入射的各向同性辐射不会产生极化. 这里, 由于从 x 轴、y 轴方向的入射幅度是相等的, 所以这两个方向的出射强度是相等的, 是非极化辐射

各向异性辐射会产生极化吗? 最简单的各向异性例子是偶极矩模式, 图 10.13 是它的夸张示意图. 来自于 y 轴正、负方向的入射辐射沿 x 轴方向出射, 出射辐射具有平均温度. 沿 y 轴方向的出射辐射强度是来自 x 轴负方向的低温点与来自 x 轴正方向的高温点的结合, 因此也具有平均温度. 因此, 偶极矩模式不会产生极化出射辐射.

为了产生极化辐射, 入射辐射必须具有非零的四极矩. 图 10.14 展示了入射的四极辐射产生极化. 来自于 x 轴 (y 轴) 方向的高温 (低温) 入射辐射产生了沿 y 轴方向的高 (低) 强度的出射波. 因此, 沿 y 轴方向出射波的强度强于 x 轴方向：出射辐射被极化.

仅当入射场是四极矩时康普顿散射才可以产生极化这一事实对宇宙学来说是一重要结论. 我们需要康普顿散射产生极化, 意味着我们需要关注电子和光子完全退耦之前的这一宇宙时期. 然而, 这一时期电子与光子紧密地结合在一起, 这导致了非常小的四极量. 因此, 我们从标准的退耦时期预测的极化比起各向异性量级要小. 再电离在大尺度上增强了极化, 但并不能改变极化信号的量级很小这一结论.

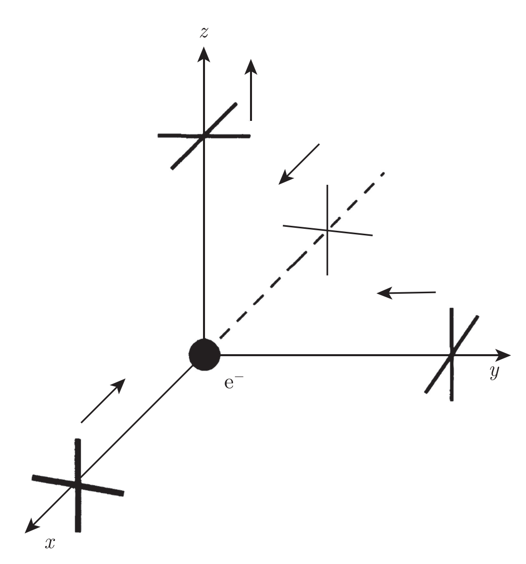


图 10.13　入射的偶极矩辐射也不会产生极化. 粗 (细) 线代表高温 (低温) 点. 这里, 来自于 x 轴正方向的入射辐射的温度高于平均温度 (平均温度用中等粗细的线表示), 来自于 x 轴负方向的温度低于平均温度. 这样, 来自于 x 轴正、负两方向的辐射产生的平均辐射强度沿 y 轴方向辐射出去. 同样, 来自于 y 轴正、负两方向产生的辐射强度沿 x 轴方向传播出去. 由于它们是平均强度, 所以沿 x 轴出射的辐射强度也是平均的辐射强度. 这导致出射的是非极化的光线

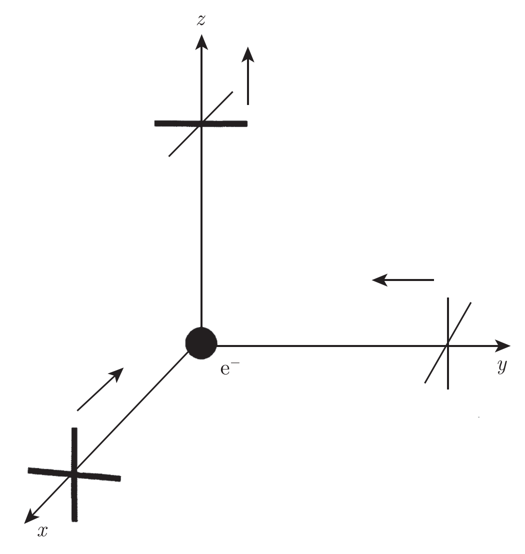


图 10.14　入射的四极矩辐射产生出射的极化光线. 沿 y 轴的出射辐射比 x 轴有更强的强度. 这是由于来自 x 轴方向的入射辐射有更高的温度

图 10.14 说明极化出现在 x-y 平面, 特别是 y 轴方向. 入射光线也可以在 x-y

平面旋转 45° 角, 则出射极化沿 x, y 轴倾斜 45° 射出. 因此, 极化可以被描述成一个 “无出发点向量”, 它的长度对应于它的大小, 它的方向对应于最大强度的方向. 在垂直于传播方向的 2 维平面, 我们将强度分解为

$$I_{ij} = \begin{pmatrix} T+Q & U \\ U & T-Q \end{pmatrix}. \tag{10.47}$$

对角部分的元素 T 是第 8 章中我们研究的温度 (有一个不变的项和一个扰动量); 两个新变量 Q 与 U 描述了极化. 图 10.14 中的模式是 $Q < 0, U = 0$. 注意,Q 与 U 的定义对 10.2 节中定义的剪切与椭率来说是完全一致的. 参见图 10.6, 可以简单地用 Q 代替 ε_1, 用 U 代替 ε_2. 最后要注意的是：电磁学的学生毫无疑问可以认出 T, Q, U 是描述极化现象的 4 个斯托克斯参量中的 3 个. 第四个参量 ——V, 只有在极化是圆形偏振的情况下不为零. 圆偏振不会出现在早期宇宙中, 所以我们假设 $V = 0$.

10.6　来自单色平面波的极化

之前的研究对定性地理解康普顿散射如何产生极化非常重要, 但并不是定量研究极化现象的有效工具. 有效工具是玻尔兹曼方程. 接下来我们仅通过写下描述 Q、U 极化态的玻尔兹曼方程来继续我们的研究进程. 但是, 我们要摒弃以前的一些直觉. 因此, 我将会采取折中的做法. 我们将要考虑各个方向的光线, 而不仅针对于少量辐射. 这将使我们把 Θ 的分布与光子的特性联系起来.

我们首先需要定义普遍意义上 (当入射光子来自于 $\hat{n}'$ 方向) 的极化轴. 当方向定为 x 轴时 (与之前章节一致), 很明显极化定义为两个垂直方向—$\hat{y}$ 与 $\hat{z}$—的强度的不同. 普遍意义上来说, 如图 10.15 所示, 入射光子的方向由 $\hat{n}'$ 来描述, 我们必须积分所有方向的入射光子. 垂直于该方向的两个轴用 $\hat{\theta}'$ 与 $\hat{\phi}'$ 来表示, 它们是垂直于位置矢量方向的标准单位矢量. 被称为 $\hat{\varepsilon}_1'$ 与 $\hat{\varepsilon}_2'$. 我们同样关心 z 方向出射光子的极化, 所以我们可以选定两个出射极化轴 $\hat{\varepsilon}_1 = \hat{x}, \hat{\varepsilon}_2 = \hat{y}$. 简单的说, 入射极化矢量是 $\hat{\varepsilon}_i'$, 出射极化矢量是 $\hat{\varepsilon}_i$.

康普顿散射允许垂直于出射方向的场不受阻碍地穿过, 同时禁止平行于出射方向的场被穿过. 上述说法可以概述为在 $\hat{\varepsilon}_i$ 方向被极化的出射光子的横截面正比于

$$\sum_{j=1}^{2} |\hat{\varepsilon}_i(\hat{n}) \cdot \hat{\varepsilon}_j'(\hat{n}')|^2. \tag{10.48}$$

Q 极化指对于 $i = 1$ 与 $i = 2$ 的横截面的不同, 即在 x、y 方向场强的不同

$$\sum_{j=1}^{2} |\hat{\varepsilon}_1(\hat{n}) \cdot \hat{\varepsilon}_j'(\hat{n}')|^2 - \sum_{j=1}^{2} |\hat{\varepsilon}_2(\hat{n}) \cdot \hat{\varepsilon}_j'(\hat{n}')|^2 = \sum_{j=1}^{2} (|\hat{x} \cdot \hat{\varepsilon}_j'(\hat{n}')|^2 - |\hat{y} \cdot \hat{\varepsilon}_j'(\hat{n}')|^2). \tag{10.49}$$

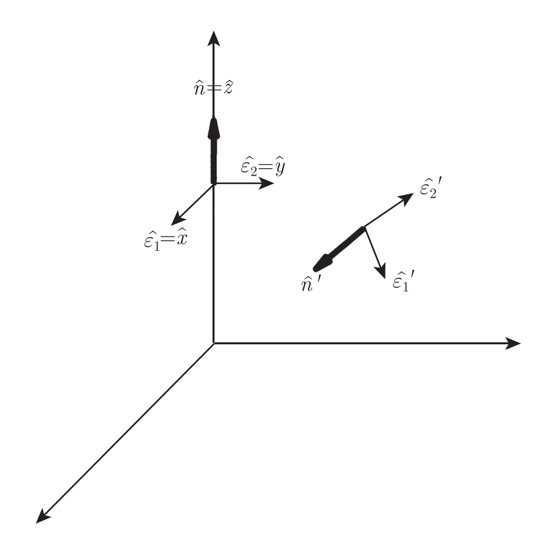


图 10.15 来自于 $\hat{n}'$ 方向的入射光子在原点位置康普顿散射出一个电子后在 $\hat{n}=\hat{z}$ 方向出射光子. 垂直于入射方向的平面用两个极化矢量 $\hat{\varepsilon}_1'=\hat{\theta}',\hat{\varepsilon}_2=\hat{\phi}'$ 来表示. 出射光子位于 z 方向, 因此极化矢量是 $\hat{\varepsilon}_1=\hat{x},\hat{\varepsilon}_2=\hat{y}$

对所有的入射方向 $\hat{n}'$ 积分

$$Q(\hat{z})=A\int \mathrm{d}\Omega_{n'}f(\hat{n}')\sum_{j=1}^{2}(|\hat{x}\cdot\hat{\varepsilon}_j'(\hat{n}')|^2-|\hat{y}\cdot\hat{\varepsilon}_y'(\hat{n}')|^2). \tag{10.50}$$

其中,A 是归一化常数, 目前我们不需要考虑;$f(\hat{n}')$ 是从 n' 方向入射的辐射的强度, 我们从各方向对其积分. 注意,f 仅与 n' 有关, 与 ε_j' 没有关系：这在入射辐射是非极化的假设下成立.

关于 (10.50) 式中的点乘, 我们发现在笛卡儿坐标中可以方便地用它来描述 $\hat{\varepsilon}_1',\hat{\varepsilon}_2'$. 因为它们等于 $\hat{\theta}'$ 和 $\hat{\phi}'$, 我们得到

$$\begin{aligned}\hat{\varepsilon}_1'(\theta',\phi')&=(\cos\theta'\cos\phi',\cos\theta'\sin\phi',-\sin\theta'),\\ \hat{\varepsilon}_2'(\theta',\phi')&=(-\sin\phi',\cos\phi',0).\end{aligned} \tag{10.51}$$

现在, 点乘变得很简单, 可以得到

$$\begin{aligned}Q(\hat{z})&=A\int \mathrm{d}\Omega_{n'}f(\hat{n}')[\cos^2\theta'\cos^2\phi'+\sin^2\phi'-\cos^2\theta'\sin^2\phi'-\cos^2\phi']\\ &=-A\int \mathrm{d}\Omega_{n'}f(\hat{n}')\sin^2\theta'\cos 2\phi'.\end{aligned} \tag{10.52}$$

大家注意到, 这里的角度的组合正比于球谐函数 $Y_{2,2}+Y_{2,-2}$ ((C.10) 式) 的和. 球谐函数是正交的, 所以积分将会保留 f 分布的 $l=2,m=\pm2$ 部分. 也就是, 只有

当入射辐射有四极矩时才会得到非零的 Q. 这证明了此前章节的结论. 现在可以直接导出极化的 U 部分的表达式 (参见练习 10),

$$U(\hat{z}) = -A \int \mathrm{d}\Omega_{n'} f(\hat{n}') \sin^2\theta' \sin(2\phi'). \tag{10.53}$$

这里 sin 部分的组合正比于 $Y_{2,2} - Y_{2,-2}$. 同样, 只有四极矩可以产生 U 极化.

我们现在可以把出射的 Q,U 与入射的非极化分布联系起来. 通常通过以下四步.

一, 考虑 x 轴方向的波矢 $\vec{k}$ 产生的极化.

二, $\vec{k}$ 可以位于 $\hat{x}$-$\hat{z}$ 平面的任一位置.

三, 考虑普适的波矢.

四, 通过前三步可以得到沿 z 轴方向的出射辐射的 Q 与 U. 我们需要把结果推广到所有的出射方向.

我们进展缓慢的原因是由于光子分布 $f(\hat{n}')$ 要从波矢的方向中得到. 回顾第 4 章, 光子分布是零阶普朗克分布与扰动 $\Theta(k,\mu)$ 的和 (见 (4.35) 式). 这里,μ 是波矢量 $\hat{k}$ 与传播方向的点乘. 我们将入射光子的传播方向标记为 $\hat{n}'$, 则 $\mu = \hat{k}\cdot\hat{n}'$. 所以,(10.52) 式中的 $f(\hat{n}')$ 是一个辐角为 $\hat{k}\cdot\hat{n}$ 的勒让德多项式的展开. 由于 θ' 是 z 轴与 $\hat{n}'$ 之间的角度, 所以该辐角不等于 $\cos\theta'$. 因此将 μ 与 θ'、ϕ' 联系起来并不简单, 我们将会慢慢导出.

首先认为波矢量 k 位于 x 轴方向. 此时有

$$\begin{aligned}\mu \equiv \hat{k}\cdot\hat{n}' &= (\hat{n}')_x \\ &= \sin\theta'\cos\phi'.\end{aligned} \tag{10.54}$$

先前我们将扰动 Θ 分解为勒让德多项式的和, 所以

$$\begin{aligned}\Theta(k,\hat{k}\cdot\hat{n}') &= \sum_l (-\mathrm{i})^l (2l+1)\Theta_l(\kappa)(k)\mathcal{P}_l(\hat{k}\cdot\hat{n}') \\ &\to -5\Theta_2(k)\mathcal{P}_2(\sin\theta'\cos\phi'),\end{aligned} \tag{10.55}$$

这里, 最后一行代入 μ 的表达式 (10.54), 并且只考虑了和的四极矩部分.

因此, $\hat{x}$ 轴方向的波矢 $\vec{k}$ 的平面波:

$$Q(\hat{z},\vec{k}\|\hat{x}) = 5A\Theta_2(k)\int_0^{\pi}\mathrm{d}\theta'\sin\theta'\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\phi'\mathcal{P}_2(\sin\theta'\cos\phi')\sin^2\theta'\cos 2\phi'. \tag{10.56}$$

回顾 $\mathcal{P}_2(\mu) = (3\mu^2-1)/2$. 由于 $-1/2$ 的部分对 $\cos(2\phi')$ 的积分为零. 所以, 上式化简为

$$Q(\hat{z},\vec{k}\|\hat{x}) = \frac{15A\Theta_2(k)}{2}\int_0^{\pi}\mathrm{d}\theta'\sin^5\theta'\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\phi'\cos^2\phi'\cos 2\phi'. \tag{10.57}$$

对 ϕ' 的积分是 $\pi/2$, 定义 $\mu' = \cos\theta'$, 则对 θ' 的积分等于 16/15. 因此

$$Q(\hat{z}, \vec{k} \| \hat{x}) = 4\pi A \Theta_2(k). \tag{10.58}$$

通过上式我们建立了极化 (用 Q 表述) 与各向异性 (通常用 Θ, Θ_2 代表四极矩) 之间的部分联系. 该表述仅适用于特殊情况, 即波矢垂直于视线方向, 指向 x 轴方向.

让我们将该表述推广到波矢指向 $\hat{x}$-$\hat{z}$ 平面内任一方向的情况：$\hat{k} = (\sin\theta_k, 0, \cos\theta_k)$. 在这种情况下, 来自于 $\mathcal{P}_2$ 的 $(\hat{k}\cdot\hat{n}')^2$ 的因子是 $\sin^2\theta_k \sin^2\theta' \cos^2\phi' + \cos^2\theta_k \cos^2\theta'$. 第一项与 $\hat{k} \parallel \hat{x}$ 的情况相同, 再乘以 $\sin^2\theta_k$. 第二项没有引入新的对 ϕ' 的依赖; 由于对 $\cos(2\phi')$ 的积分被消掉, 所以它对 Q 没有贡献. 因此,

$$Q(\hat{z}, \vec{k} \perp \hat{y}) = 4\pi A \sin^2\theta_k \Theta_2(k). \tag{10.59}$$

在练习 10 读者将会证明这种情况下 ($\vec{k}$ 在 $\hat{x}$-$\hat{z}$ 平面) 不存在 U 极化: 所有的极化都是 Q.

对于任何一个单一的单色平面波, 我们总是可以绕 z 轴旋转坐标系使得该平面波位于 $\hat{x}$-$\hat{z}$ 平面, 使 (10.59) 式可以适用. 但是, 真实的宇宙中存在许多重叠的平面波扰动, 这使得我们不能简单地应用 (10.59) 式. 相应的, 我们需要考虑更普适性的平面波 (方向为 $\hat{k} = (\sin\theta_k\cos\phi_k, \sin\theta_k\sin\phi_k, \cos\theta_k)$). 对于这种更普适性的扰动, 我们可以参见练习 9

$$\begin{aligned} Q(\vec{z}, \vec{k}) &= 4\pi A \sin^2\theta_k \cos(2\phi_k)\Theta_2(k), \\ U(\vec{z}, \vec{k}) &= 4\pi A \sin^2\theta_k \cos(2\phi_k)\Theta_2(k). \end{aligned} \tag{10.60}$$

我们进行最终的归纳. 到目前为止, 我们只考虑了出射辐射沿 z 轴的情况. 当然, 并非所有的出射辐射都沿 z 轴方向 (这就是我们所探讨的：作为角度函数的极化的不同). 为了探讨任意方向的极化, 我们需要把 (10.60) 式中的极化角 θ_k 转化成观测方向 $\hat{n}$ 与 $\hat{k}$ 之间的角度. 因此 $\cos\theta_k \to \hat{n}\cdot\hat{k}$, 当然 $\sin^2\theta_k$ 变为 $1-(\hat{n}\cdot\hat{k})^2$. 所以, 对于近 z 轴的观测来说, 引起出射极化的入射非极化辐射是

$$\begin{aligned} Q(\hat{n}, \vec{k}) &= 4\pi A[1-(\hat{n}\cdot\hat{k})^2]\cos(2\phi_k)\Theta_2(k), \\ U(\hat{n}, \vec{k}) &= 4\pi A[1-(\hat{n}\cdot\hat{k})^2]\sin(2\phi_k)\Theta_2(k). \end{aligned} \tag{10.61}$$

上述表达式仅对接近 z 轴的方向 $\hat{n}$ 有效. 该限制是因为对方位角 ϕ_k 的依赖性所致. 当远离 z 轴时,$\cos(2\phi_k), \sin(2\phi_k)$ 更为复杂地依赖于 $\hat{n}$ 和 $\hat{k}$. 但是, 当接近 z 轴时, 相对简单的 sin 与 cos 的表述即可描述对方位角的依赖. 因此, 我们将遵循这一小角度限制 (即观测方向接近于 z 轴) 来继续我们的研究.

(10.61) 式表明对于任意 $\hat{k}$ 模式我们可以得到 z 轴附近的极化模式. 参见图 10.16 所示的 4 种模式. 在每一个模式中, z 轴位于每幅图的中央、指向读者. 对于 $\vec{k}$ 位于 $\hat{x}$-$\hat{y}$ 平面的情况 (即 $\theta_k = 90°$), 根据 (10.61) 式, 作为 $\hat{n}_x, \hat{n}_y$ 的函数的极化的强度的差别是

$$1 - (\hat{n} \cdot \hat{k})^2 = 1 - (\hat{n}_x \hat{k}_x + \hat{n}_y \hat{k}_y)^2. \tag{10.62}$$

也就是说, 在 $\hat{x}_x = \hat{n}_y = 0$ 时的偏差很小. 这些例子中极化的方向是 Q(左上图, $\phi_k = 0$) 或 U(左下图, $\phi_k = 45°$). 对于 $\vec{k}$ 垂直于 $\hat{x}$-$\hat{y}$ 平面的情况, 我们会观测到极化强度的变化. 图 10.16 中右侧两幅图展示了这一变化. 它们同样属于 Q 或 U 极化. 它们最显著的特征是极化强度一直在平行或垂直于极化的方向发生变化. 在右上图, 极化沿 x 轴方向排列, 这同样是极化强度发生变化的方向. 在右下图, 极化沿 $\hat{x} + \hat{y}$ 方向排列, 极化强度变化的方向沿其垂直方向, 即 $\hat{x} - \hat{y}$ 方向. 我们将极化分解为 E 模式与 B 模式, 如同我们在弱引力透镜中对剪切的分解一样. 图中的模式都是 E 模式. 实际上, 标量扰动只会产生 E 模式.

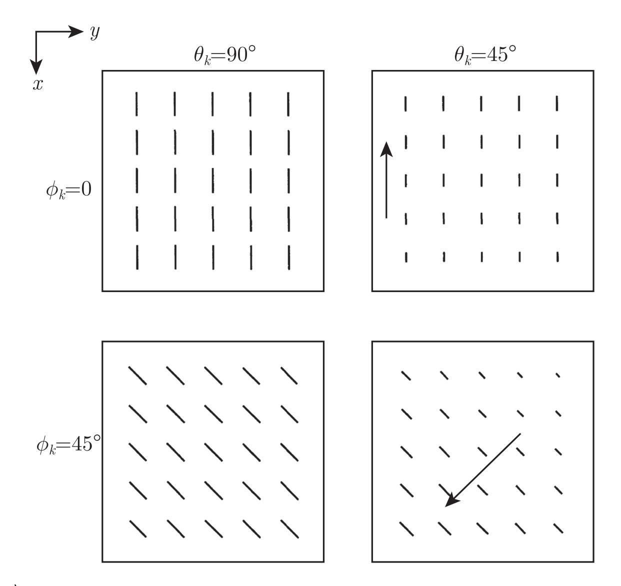


图 10.16　不同 $\vec{k}$ 的 4 种平面波扰动得到的 z 轴附近的 4 种极化模式. 左上图得自 $\vec{k}$ 沿 x 轴的情况 ($\theta_k = 90°$, $\phi_k = 0$). 对于 $\vec{k}$ 位于 $\hat{x}$-$\hat{y}$ 平面的情况 (左面两幅图对应 $\theta_k = 90°$), 极化在 z 轴有最大值, 因此在图上看不出差别. 右侧图中的箭头表示极化增强的方向. 这个方向 (或垂直于极化沿它保持常数的方向) 与极化模式排成直线. 这种排列是 E 模式的标志

我们开始理解 E/B 分解. 标量扰动产生的极化——E 模式在相同方向 (产生方向) 的强度不同. 可以想象一个电场. 从一个点源产生的电场—$\vec{E} = q\hat{r}/r^2$—的强度随离开点源的远近发生变化. 该电场指向同一方向：从点源放射状地发出. 当在

电场方向移动时, 场强减弱. 在 10.9 节中, 我们将会讨论 B 模式; 并将会发现, 极化的 B 模式与磁场一样, 它的强度在不同方向都有差别.

10.7 玻尔兹曼方程的解

为了定量地预测 CMB 中的极化, 我们必须更进一步. 这里, 我们将一个单独的电子放在原点, 开始考虑一个给定分布的入射辐射产生的极化. 真正的问题是演化的光子分布中涉及多个电子. 因此, 我们需要用到玻尔兹曼方程. 在第 4 章中, 我们已经列出了相关的一些方程; 接下来, 我们将要在这些方程中引入 Q、U 这些参量. 第 4 章中的相关方程是

$$\dot{\Theta_P} + \mathrm{i}k\mu\Theta_P = -\dot{\tau}\left[-\Theta_P + \frac{1}{2}(1-\mathcal{P}_2(\mu))\Pi\right], \tag{10.63}$$

$$\Pi = \Theta_2 + \Theta_{P2} + \Theta_{P0}. \tag{10.64}$$

这里,$\mu \equiv \hat{k}\cdot\hat{n}, \Theta_{P0}$ 与 Θ_{P2} 分别是极化场的单极矩与四极矩.

接下来我们探讨 Θ_P 与 Q、U 之间的关系.Θ_P 是极化的强度,Q 与 U 一起描述了强度与方位. 在第 4 章中, 我们选择 $\hat{k}$ 位于 $\hat{x}$-$\hat{z}$ 平面. 在那种情况下, 极化全部是 Q,

$$\begin{aligned} &Q(\hat{z},\vec{k}) = \Theta_P(\hat{z},\vec{k}), \\ &U(\hat{z},\vec{k}) = 0, \quad \hat{k}\perp\hat{y}. \end{aligned} \tag{10.65}$$

更一般的说, 对于任意 $\vec{k}$ 而言 (至少其方向 $\hat{n}$ 接近 $\hat{z}$ 轴), 我们得到

$$\begin{aligned} &Q(\vec{k},\hat{n}) = \Theta_P(\hat{k}\cdot\hat{n})\cos(2\phi_k), \\ &U(\vec{k},\hat{n}) = \Theta_P(\hat{k}\cdot\hat{n})\sin(2\phi_k). \end{aligned} \tag{10.66}$$

(10.66) 式展示了我们感兴趣的极化模式 $Q(\hat{n})$、$U(\hat{n})$ 与 $\Theta_P(\mu\equiv\hat{k}\cdot\hat{n})$ 之间的重要联系. 现在, 我们要解决的问题只是通过解玻尔兹曼方程得到 Θ_P, 然后通过 (10.66) 式建立 Q 与 U 的功率谱. 我们在本节解决第一个问题, 在下节解决第二个问题.

首先, 尽管建立了 Θ_P 与 Q 和 U 的联系, 再次由玻尔兹曼方程得到以前章节中提到的入射非极化波的结果是非常必要的. 我们发现 ((10.59) 式) 出射极化 (对应于 $\hat{k}$ 在 $\hat{x}$-$\hat{z}$ 平面的情况) 正比于 $(1-\mu^2)\Theta_2$, 其中 μ 是 $\hat{k}$ 与 $\hat{z}$ 之间夹角的余弦. 我们可以从玻尔兹曼方程得到结果吗? 在没有先验极化的情况下,(10.63) 式化简为

$$\begin{aligned} \dot{\Theta}_P &= -\dot{\tau}\frac{1-\mathcal{P}_2(\mu)}{2}\Pi \\ &= \frac{-3\dot{\tau}}{2}(1-\mu^2)\Theta_2. \end{aligned} \tag{10.67}$$

对 η 积分, 我们发现由入射的非极化辐射的康普顿散射产生的极化是

$$\Theta_P = \frac{3\tau}{2}(1-\mu^2)\Theta_2, \tag{10.68}$$

即用几何因子 $1-\mu^2$ 与光深和四极矩的乘积表示, 与之前不那么正式的推导一致. 我们注意到极化的强度正比于光深 τ, τ 是沿视线方向的自由电子密度与汤姆孙散射截面的乘积的积分.

现在, 我们来解极化玻尔兹曼方程. 与 (8.64) 式类似,(10.63) 式的正式解是

$$\Theta_P(\hat{n},\vec{k}) = \int_0^{\eta_0} \mathrm{d}\eta \mathrm{e}^{\mathrm{i}\vec{k}\cdot\hat{n}(\eta-\eta_0)-\tau(\eta)} S_P(k,\mu,\eta), \tag{10.69}$$

其中 S 这一项表述为

$$S_P(k,\mu,\eta) = -\frac{3}{4}\dot{\tau}(1-\mu^2)\Pi. \tag{10.70}$$

可视函数的定义为 $-\dot{\tau}\mathrm{e}^{-\tau}$, 所以

$$\Theta_P(\hat{n},\vec{k}) = \frac{3}{4}(1-\mu^2)\int_0^{\eta_0} \mathrm{d}\eta \mathrm{e}^{\mathrm{i}\vec{k}\cdot\hat{n}(\eta-\eta_0)} g(\eta)\Pi(k,\eta). \tag{10.71}$$

一个合理的假设是, 我们可以计算耦偶时刻的积分 (快速变化的可视函数除外). 可见度函数积分归一, 得

$$\Theta_P(\hat{n},\vec{k}) \simeq \frac{3\Pi(k,\eta_*)}{4}(1-\mu^2)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\vec{k}\cdot\hat{n}(\eta_*-\eta_0)}. \tag{10.72}$$

与 η_0 相比 η_* 可以忽略, 将 μ 改写为导数, 得到

$$\Theta_P(k,\mu) \simeq \frac{3\Pi(k,\eta_*)}{4}\left(1+\frac{\partial^2}{\partial(k\eta_0)^2}\right)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}k\eta_0\mu}. \tag{10.73}$$

为了得到力矩 Θ_{Pl}, 我们必须将 (10.73) 式乘以 $\mathcal{P}_l(\mu)$, 然后对 μ 进行积分 (参见 (4.99) 式). 得到 (参见 (C.15) 式)

$$\Theta_{Pl}(k) \simeq \frac{3\Pi(k,\eta_*)}{4}\left(1+\frac{\partial^2}{\partial(k\eta_0)^2}\right) j_l(k\eta_0). \tag{10.74}$$

球贝塞尔函数和它的二阶导数的和可以用球贝塞尔方程 (C.13) 式表示

$$j_l + j_l'' = -\frac{2j_{l-1}}{k\eta_0} + \frac{2(l+1)}{(k\eta_0)^2}j_l + \frac{l(l+1)}{(k\eta_0)^2}j_l. \tag{10.75}$$

上式右边三项中, 最后一项在小尺度作用显著. 这是由于, 球贝塞尔函数的峰大致位于 $k\eta_0 \sim l$. 物理上, 这意味着在角尺度 l 处的各向异性由波长为 $k^{-1} \sim \eta_0/l$ 的扰动造成. 对于我们的量级估计, 这表明, 对于右边三项, 我们可以认为 $k\eta_0$ 具

有 l 的量级. 因此, 第一项的量级是 l^{-1}, 第二项的量级是 l^{-1}, 第三项的量级是 $l^2/(k\eta_0)^2 \sim 1$：最后一项贡献最大. 因此

$$\Theta_{Pl}(k) \simeq \frac{3\Pi(k,\eta_*)}{4}\frac{l^2}{(k\eta_0)^2}j_l(k\eta_0). \tag{10.76}$$

在紧密耦合极限下, 我们可以用与偶极矩相关的四极矩来表示 Π . 读者将会在练习 12 中证明, $\Pi = 5\Theta_2/2$. 因此, 今天的极化力矩为

$$\Theta_{Pl}(k) \simeq \frac{15\Theta_2(k,\eta_*)}{8}\frac{l^2}{(k\eta_0)^2}j_l(k\eta_0). \tag{10.77}$$

进一步的研究, 四极矩正比于偶极矩 ((8.34) 式). 所以

$$\Theta_{Pl}(k) \simeq -\frac{5k\Theta_1(k,\eta_*)}{6\dot{\tau}(\eta_*)}\frac{l^2}{(k\eta_0)^2}j_l(k\eta_0). \tag{10.78}$$

在退耦极限下,(10.78) 式是现时刻极化力矩的最终表述. 有三个特征值得注意. 一, 最重要的是, 退耦时期的极化谱看起来比各向异性谱小 $k/\dot{\tau}$ 的量级. 我们将在下一节详细阐述这个问题. 我们现在知道这是四极矩产生极化和早期宇宙中康普顿散射抑制四极矩的必然结果. 二, 我们预测由于 $\Theta_{Pl} \propto \Theta_1$, 极化功率谱会产生振荡. 更具体地说, 我们预计, 与偶极矩一样, 极化振荡与单极矩相位不同. 单极矩振荡产生的温度各向异性谱中的峰和谷与极化功率谱中的峰与谷有不同的相位. 三, 这里并不存在类似 Sachs-Wolfe 这种影响温度各向异性的效应. 光子穿过变化的引力势并不能产生极化. 因此, 现时刻的极化功率谱在某种程度上是早期宇宙的表现, 并没有被后期演化所影响.

10.8 极化功率谱

(10.78) 式描述了单一平面波产生的极化力矩. 实际情况是, 在宇宙中不存在单一平面波, 而是不同幅度 $\Theta_P(\vec{k},\hat{n})$ 的许多波的叠加. 与温度各向异性的计算类似 (见 (8.68) 式), 叠加平面波的角功率谱是

$$C_{P,l} = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty \mathrm{d}k\ k^2|\Theta_{pl}(k)|^2. \tag{10.79}$$

很长一段时间内, 宇宙学家计算该功率谱时并不涉及 Q 与 U.1997 年, 大量涉及 Q 与 U 的功率谱的文章涌现. 这里利用了 (10.66) 式或它的大角尺度推广.

基于 10.4 节中的剪切的不同部分的功率谱的解法, 我们对 Q 与 U 的功率谱有一定的了解. 参考图 10.17. 在小角度极限下, Q 是 2 维矢量 $\vec{\theta}$ 的函数,n 的投影在垂直于 z 轴的平面上. 因此, 我们可以对 Q 进行傅里叶变换, 正如之前对剪切场

作傅里叶变换一样; 该变换依赖于 $\vec{l}$(与 $\vec{\theta}$ 共轭的矢量). 依据研究弱引力透镜的经验, 我们预测 Q 的功率谱不仅与 $\vec{l}$ 的大小有关, 还与它的方向有关系. 回顾 (10.66) 式, 我们很自然地认为功率谱 $C_{QQ}(\vec{l})$ 正比于 $C_{P,l}$. 其比例常数是 $\cos^2(2\phi_l)$, 其中 ϕ_l 是 $\vec{l}$ 与 x 轴的夹角. 因此, 当我们计算 $\vec{k}$ 的和时,(10.66) 式中 $\cos(2\phi_k)$ 的因子变成 $\cos(2\phi_l)$. 相似的, U 的功率谱是 $\sin^2(2\phi_l)C_{P,l}$.

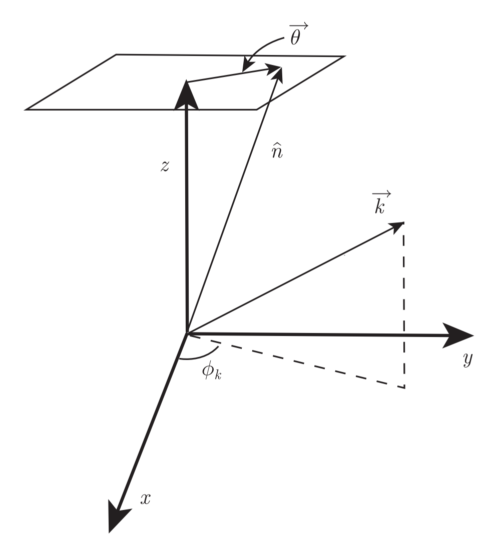


图 10.17 极化的不同矢量. 我们观测入射方向为 $\hat{n}$ 的辐射, $\hat{n}$ 也可以被 2 维角 θ 参数化. 波矢 $\vec{k}$ 的方位角是 ϕ_k

让我们导出 Q、U 的功率谱与 Θ_P 的联系. 我们将 Q 极化写为所有平面波的和的形式

$$\Theta(\vec{\theta}) = \int \frac{\mathrm{d}^3k}{(2\pi)^3}\Theta_P(\vec{\theta},\vec{k})\cos(2\phi_k). \tag{10.80}$$

我们仅从一个位置 $x=0$ 进行观测, 所以这里的修正因子 $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\vec{x}\cdot\vec{k}}$ 设为 1. 对于因子 $\cos(2\phi_k)$, 注意它等于 $\cos^2\phi_k - \sin^2\phi_k$, 或以笛卡儿分量 $\vec{k}$ 的形式表示为

$$\cos(2\phi_k) = \frac{k_x^2 - k_y^2}{k_x^2 + k_y^2}. \tag{10.81}$$

由于 Θ_P 包含指数因子 $\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\vec{k}\cdot\hat{n}\eta_0}$ (例如 (10.69) 式), 又因为 $\hat{n}_x=\theta_x, \hat{n}_y=\theta_y$, 所以我们可以重新给出其在笛卡儿坐标下 $\vec{\theta}$ 的导数的形式. 例如, $k_x \to [-\mathrm{i}\eta_0]^{-1}\partial/\partial\theta_x$. 因子 $\cos(2\phi_k)$ 可以写成仅对 $\vec{\theta}$ 求导:

$$\cos(2\phi_k) = D_Q(\vec{\theta}) \equiv \left[\frac{\partial^2}{\partial\theta_x^2} + \frac{\partial^2}{\partial\theta_y^2}\right]^{-1}\left(\frac{\partial^2}{\partial\theta_x^2} - \frac{\partial^2}{\partial\theta_y^2}\right). \tag{10.82}$$

上式的表述看起来很复杂, 但却是计算各种 k 模式的和的有力工具. 我们可以据此重写 (10.80) 式

$$Q(\vec{\theta}) = D_Q(\vec{\theta}) \int \frac{\mathrm{d}^3k}{(2\pi)^3} \Theta_P(\vec{\theta}, \vec{k}) \\ = D_Q(\vec{\theta}) \Theta_P(\vec{\theta}). \tag{10.83}$$

将 $Q(\vec{\theta})$ 与 $\Theta_P(\vec{\theta})$ 进行傅里叶变换,(10.83) 式变为

$$\int \frac{\mathrm{d}^2l}{(2\pi)^2} \mathrm{e}^{\mathrm{i}\vec{l}\cdot\vec{\theta}} Q(\vec{l}) = D_Q(\vec{\theta}) \int \frac{\mathrm{d}^2l}{(2\pi)^2} \mathrm{e}^{\mathrm{i}\vec{l}\cdot\vec{\theta}} \Theta_{Pl}. \tag{10.84}$$

θ 空间中表述复杂的 D_Q 现在变得简化起来, 当它作用于指数 $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\vec{l}\cdot\vec{\theta}}$ 时我们可以清晰地知道它的表达式. 在这种情况下, 它简化为 $\cos(2\phi_l)$, 这里的 ϕ_l 是 2 维矢量 $\vec{l}$ 与 x 轴的夹角. 因此, $Q(\vec{\theta})$ 的傅里叶变换是

$$\tilde{Q}(\vec{l}) = \tilde{\Theta}_{Pl} \cos(2\phi_l). \tag{10.85}$$

$U(\vec{l}) = \Theta_{Pl} \sin(2\phi_l)$. 因此, Q 和 U 的功率谱是

$$C_{QQ}(\vec{l}) = C_{P,l} \cos^2(2\phi_l) \\ C_{UU}(\vec{l}) = C_{P,l} \sin^2(2\phi_l). \tag{10.86}$$

回顾在弱引力透镜的例子中, 我们注意到当将 γ_1, γ_2 进行线性组合时, 其中一个线性组合的功率谱被消掉 (见 (10.40) 式), 另一个等于汇聚场功率谱 (见 (10.39) 式). 这里, 我们做同样的计算. 假设

$$E(\vec{l}) \equiv \tilde{Q}(\vec{l}) \cos(2\phi_l) + \tilde{U}(\vec{l}) \sin(2\phi_l), \\ B(\vec{l}) \equiv -\tilde{Q}(\vec{l}) \cos(2\phi_l) + \tilde{U}(\vec{l}) \cos(2\phi_l). \tag{10.87}$$

然后

$$c_{BB}(\vec{l}) = 0. \tag{10.88}$$

在小尺度限制下,E 模式的功率谱等于 C_P:

$$\lim_{l \gg 1} C_{EE}(\vec{l}) = C_{P,l}. \tag{10.89}$$

图 10.18 展示了一系列功率谱的组合, 包括精确的数值结果和积分所有模式 (见 (10.79) 式) 得到的近似结果 (见 (10.78) 式). 根据第 8 章得到的温度各向异性谱也被展示在图中. 由于极化在紧密耦合极限下被抑制, 所以温度各向异性谱

高于极化谱. 因此可以预测, 极化功率谱中的振荡与温度谱中的振荡不同相.2002 年,DASI 实验声称首次探测到极化, 见图 10.18. 这类似首次探测到大尺度剪切, 为宇宙学研究开辟了一条新的道路.

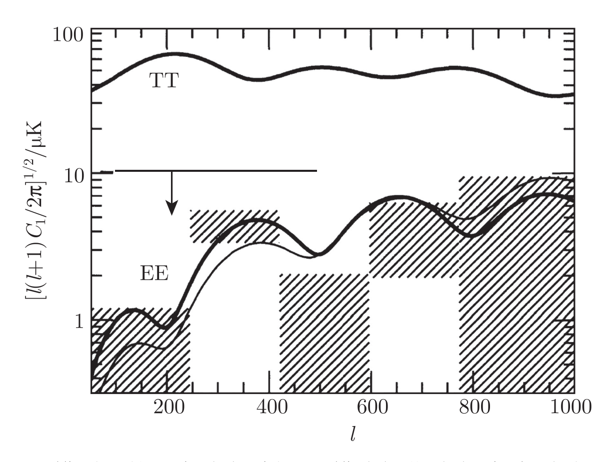


图 10.18　标准 CDM 模型下的温度功率谱与 E 模式极化功率谱. 粗线表示真实的结果; 细线是 (10.78) 式所示的近似结果. 如果仅存在标量扰动, 则没有 B 模式功率谱. 在 10μK 附近的直线是 Hedman 2002 年文章中给出的上限, 斜条纹盒子由 DASI 实验第一次探测到 (Kovac et al., 2002)

图 10.18 只展示了小尺度功率谱; 大尺度功率谱需要进行修正 (Kamionkowski, Kosowsky and Stebbins, 1997a; Seljak and Zaldarriaga, 1997). 毫无疑问, 组合功率谱在大尺度端衰减很快. 由于极化正比于偶极矩, 偶极矩在大尺度模中可以被消掉, 因此我们可以很好地预测结果. 尽管我没有系统研究过大角度功率谱, 但基本的思想不同于作勒让德展开或求普通的球谐函数, 而是要用到张量球谐函数.

到目前为止, 我们感兴趣的是标量扰动. 在计算平面波扰动 ((10.55) 式) 时我们就引入了这个假设. 如果是张量扰动, 则分解时还要考虑对方位角的依赖 (回顾 (4.115) 式).

10.9　引力波的探测

前面章节中探讨的标量扰动与张量扰动存在根本不同. 标量平面波扰动只与一个方向有关, 即波矢 $\vec{k}$ 的方向. 一旦该方向被固定, 则所有光子力矩仅依赖于波矢与入射光子的夹角. 一旦夹角被固定, 则存在一个关于 $\hat{k}$ 方向的方位角对称. 旋转对称是标量扰动仅产生 E 模式的原因. 一个极化场存在两个方向：(i) 极化强度改变的方向;(ii) 极化的方向. 对于标量扰动, 我们在图 10.16 中看到这两个方向是同

向的 (或互相垂直). 直观上看, 每个方向都仅依赖于 $\vec{k}$ 的方向. 同向是 E 模式的显著标志.

张量扰动的光子分布不存在对于 $\vec{k}$ 方向的旋转对称. 引力波是度规脉动, 这导致方位角依赖于光子分布. 回顾 (4.115) 式, 得到的分布是 $\sin(2\phi)$ 或 $\cos(2\phi)$, 其中 ϕ 是 $\vec{k}$ 轴方位角的角度. 分布依赖于 ϕ 意味着得到极化场时存在一个额外的可供选择的方向. 我们可以期望极化方向不再平行于极化强度改变的方向. 也就是, 我们可以期望引力波产生 B 模极化. 这就是我们将要在本节展示的内容.

在进行数学计算之前, 我们需要了解张量扰动产生 B 模式的重要性. 首先从难以通过 E 模式探测到张量说起. 标量和张量都对 E 模式有贡献, 唯一可以分别提取二者的方法是利用它们功率谱的差别, 该功率谱是关于 l 的函数. 在温度各向异性中我们可以看到, 这是一个微妙的游戏, 因为其他参量可以引起类似于张量的对功率谱的变化. 因此, 就算我们可以完美地得到 $C_{E,l}$ 功率谱 (不存在噪声), 我们也不知道是否存在张量扰动. 但是,B 模式就不同. 由于不存在标量扰动的污染, 只要探测到 B 模式极化, 就可以说它来自引力波. 也就是说, 不论来自暴胀的张量信号多么小 (不论 $H/m_{\rm Pl}$ 多么小), 我们最终都可以通过 B 模式探测到该信号. 实际上, 由于非线性存在信号的污染, 但这种污染的影响很小. 预测 (Knox and Song, 2002; Kesden, Cooray and Kamionkowski, 2002) 给出张量/标量的比率 r 的探测极限的量级是 10^{-4}.

让我们来计算由于张量扰动产生的单平面波的极化模式. 该问题的处理与 10.6 节一样. 为了得到 z 轴附近的出射极化, 我们需要积分入射光子分布. 参见 (10.52),(10.53) 式

$$\begin{aligned}\begin{pmatrix} Q \\ U \end{pmatrix} &\propto -\int \mathrm{d}\Omega' \Theta^T(\Omega') \sin^2\theta' \begin{pmatrix} \cos(2\phi') \\ \sin(2\phi') \end{pmatrix} \\ &\propto -\int \mathrm{d}\Omega' \Theta^T(\Omega') \begin{pmatrix} Y_{2,2}(\Omega') + Y_{2,-2}(\Omega') \\ \frac{1}{\mathrm{i}}[Y_{2,2}(\Omega') - Y_{2,-2}(\Omega')] \end{pmatrix},\end{aligned} \tag{10.90}$$

这里, 由于存在张量扰动 Θ^T 引入了光子分布项; 认识到 $\sin^2\theta'$ 和方位角的组合依赖于 $Y_{2,2} \pm Y_{2,-2}$; 并且忽略极化的完全标准化.

为了完成计算, 我们需要确定 Θ^T 对于角度的依赖. 这比原先预计得要困难. 尽管我们知道对于 $\vec{k}$ 沿 z 轴的情况该角度依赖于 $\sin^2\theta' \cos(2\phi')$ (对于 h_+) 或 $\sin^2\theta' \sin(2\phi')(h_\times)$, 我们仍需要得到对于普遍的波矢量 $\vec{k}$ 的依赖关系. 找到这种依赖关系的方法之一是旋转坐标系, 使得一个指向 z 轴方向的单位矢量旋转到指

向 $\hat{k}$ 方向. 相关的旋转矩阵是

$$R=\begin{pmatrix}\cos\theta_k\cos\phi_k & -\sin\phi_k & \sin\theta_k\cos\phi_k\\ \cos\theta_k\sin\phi_k & \cos\phi_k & \sin\theta_k\sin\phi_k\\ -\sin\theta_k & 0 & \cos\theta_k\end{pmatrix}. \tag{10.91}$$

读者可以通过 R 的导数 (参见练习 13) 来证明 R 确实从 z 方向旋转到 k 方向. 我们希望了解 R 如何对 Θ^T 起作用. 具体说来, 让我们关注 $h_\times$, 因此 $\Theta^T \propto \sin^2\theta'\sin(2\phi')$. 首先, 我们可以用角对单位矢量 $\hat{n}'$ 的依赖来重新表述入射光子的方向:

$$\begin{aligned}\sin^2\theta'\sin(2\phi') &= 2\sin^2\theta'\sin\phi'\cos\phi'\\ &= 2\hat{n}'_x\hat{n}'_y.\end{aligned} \tag{10.92}$$

现在, 旋转坐标系, 使 z 轴方向指向 $\vec{k}$ 方向. 由于 $h_\times$ 模式产生的各向异性谱正比于 $\hat{n}'_x\hat{n}'_y$. 在新的坐标系中,

$$\Theta^T \propto (R^{\mathrm{t}}\hat{n}')_x(R^{\mathrm{t}}\hat{n}')_y \tag{10.93}$$

这里上标 “t” 表示转换矩阵.

现在, 我们通过矩阵乘法运算得到

$$\begin{aligned}\Theta^T &\propto (\cos\theta_k\cos\phi_k\sin\theta'\cos\phi' + \cos\theta_k\sin\phi_k\sin\theta'\sin\phi' - \sin\theta_k\cos\theta')\\ &\quad\times(-\sin\theta'\sin\phi_k\cos\phi' + \cos\phi_k\sin\theta'\sin\phi')\\ &= \sin\theta'\sin(\phi'-\phi_k)(\cos\theta_k\sin\theta'\cos(\phi'-\phi_k) - \sin\theta_k\cos\theta')\\ &= \frac{1}{2}\cos\theta_k\sin^2\theta'\sin[2(\phi'-\phi_k)] - \sin\theta'\cos\theta'\sin\theta_k\sin(\phi'-\phi_k).\end{aligned} \tag{10.94}$$

最后一项可以用球谐函数重新表述: 它是 $Y_{2,\pm2}, Y_{2,\pm1}$ 和 $Y_{2,0}$ 的线性组合, 即当 k 沿 z 轴方向时, 由于引力波 ($h_\times$ 模式) 引起的波矢 $\vec{k}$ 的各向异性谱依赖于 $Y_{2,2}-Y_{2,-2}$. 当 $\hat{k}$ 取普遍方向时, 这种依赖混合了 $Y_{2,m}$ 的影响. 我们感兴趣的是由 Θ^T 产生的极化模式; 由 (10.90) 式和球谐函数的正交态特征, 这意味着我们感兴趣的仅是 Θ^T 的 $Y_{2,\pm2}$. 现在, 我们可以从 (10.94) 式中进行提取. 等号右边最后一项的因子是 $\sin(\phi'-\phi_k)$, 它正比于 $Y_{2,\pm1}$, 我们可以忽略之. 第一项是

$$\begin{aligned}&\frac{1}{2}\cos\theta_k\sin^2\theta'\sin[2(\phi'-\phi_k)]\\ &= -\sqrt{\frac{32\pi}{15}}\frac{\cos\theta_k}{4\mathrm{i}}[\mathrm{e}^{-2\mathrm{i}\phi_k}Y^*_{2,-2}(\Omega') - \mathrm{e}^{2\mathrm{i}\phi_k}Y^*_{2,2}(\Omega')].\end{aligned} \tag{10.95}$$

为了得到 Q 与 U, 我们将其表示成 $Y_{2,2}\pm Y_{2,-2}$, 因此对 (10.90) 式积分得到

$$\begin{pmatrix} Q(\hat{z}) \\ U(\hat{z}) \end{pmatrix} \propto \Theta_0^T \cos\theta_k \begin{pmatrix} -\sin(2\phi_k) \\ \cos(2\phi_k) \end{pmatrix}. \tag{10.96}$$

如果我们移除 z 轴的小角度, 方位角的依赖性将不再变化,$\cos\theta_k \to \hat{n}\cdot\hat{k}$, 因此

$$\begin{pmatrix} Q(\hat{n}) \\ U(\hat{n}) \end{pmatrix} \propto \Theta_0^T \hat{n}\cdot\hat{k} \begin{pmatrix} -\sin(2\phi_k) \\ \cos(2\phi_k) \end{pmatrix}. \tag{10.97}$$

(10.97) 式描述的极化模式包含非零的 B 模式. 为了研究这一点, 首先考虑 (10.87) 式中 B 模式的定义. 该定义应用于傅里叶空间, 但是, 通过 $D_{Q,U}$, 我们可以用波矢 $\vec{k}$ 代替 $\vec{l}$. 因此, 对于 $\vec{k}$ 位于 $\hat{x}$-$\hat{z}$ 面的情况 $\phi_k = 0$,B 模式只对应于 U 极化. 实际上，这也是 (10.97) 式所精确表示的，即它由引力波的 $h_\times$ 模式产生. 引力波导致的各向异性谱确实会产生极化的 B 模式.

图 10.19 展示了对于 4 个不同的波矢 $\vec{k}$ 由于单平面波 $h_\times \propto \mathrm{e}^{\mathrm{i}\vec{k}\cdot\vec{x}}$ 产生的极化模式. 例如, 左上图考虑 $\vec{k}$ 沿 x 轴的情况. 在这种情况下, 由于 $\phi_k = 0$, 由 (10.97) 式可知极化都是 U 模式并且增强的尺度为

$$\hat{n}\cdot\hat{k} = \hat{n}_x. \tag{10.98}$$

当远离 y 轴时, 极化强度增加. 这种情况的显著特征是, 在 x 轴方向极化的强度不同, 其方向位于 $\hat{x} \pm \hat{y}$ 方向. 这两个方向 (不同的强度与极化方向) 互相之间既不平行也不垂直. 其余的模式展示了同样的特征.

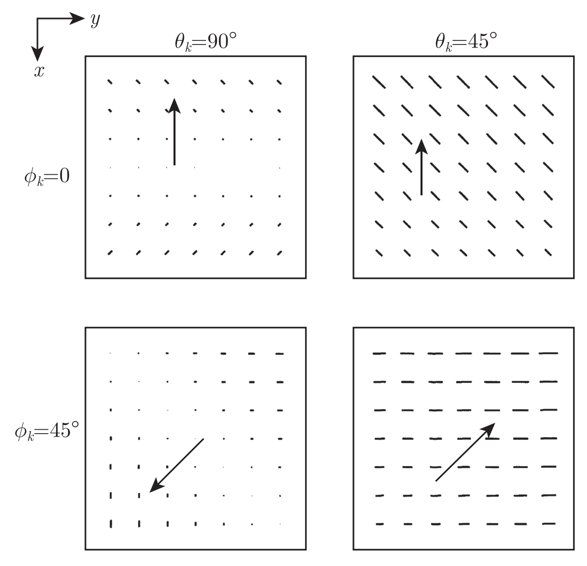


图 10.19　在一个垂直于 z 轴的平面由单平面波 $h_x(k)$ 产生的极化模式. 图中展示了 4 个不同的 $\vec{k}$ 产生的模式. 箭头方向代表极化增强的方向. 该方向不平行于极化的方向

图 10.20 展示了标准 CDM 模型中由于等量的标量与张量扰动 ($r = 1$) 产生的各向异性谱. 其中 T、E 谱与不存在张量扰动的图 10.18 相似. 当存在张量扰动时, 尽管 B 谱量级很小, 但是非零. 研究表明极化研究对探测较小的 r 非常有帮助.

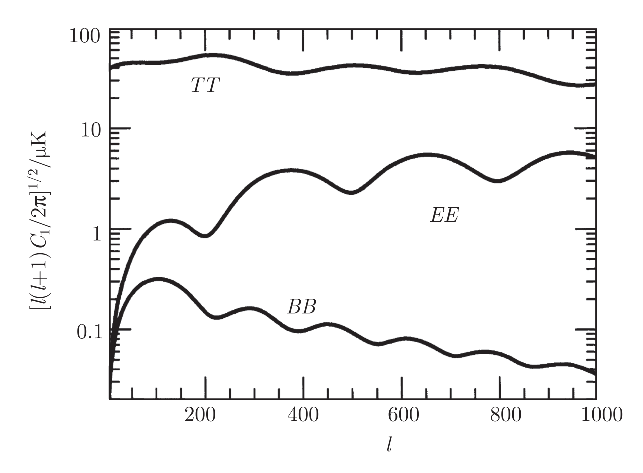


图 10.20　标准 CDM 模型中由于等量的标量与张量扰动 ($r = 1$) 产生的各向异性谱.T、E 谱来自于标量、张量共同作用的结果,B 模式仅由于张量扰动产生

推 荐 读 物

引力透镜在*Gravitational Lenses* 一书 (Schneider, Ehlers and Falco) 中有优美的描述. Bartelmann 和 Schneider (2001) 对弱引力透镜做了精彩、详细的概述. 电磁极化在一些课本中有涉及, 例如*Classical Electromagnetic* (Jackson), *Radiative Processes in Astrophysics* (Rybicki and Lightman). 关于大尺度结构引力透镜的早期文章包括文献 (Blandford et al., 1991; Miralda-Escude, 1991; Kaiser, 1992). 目前涉及透镜观测数据对宇宙学参数限制的文章包括 (Jain and Seljak, 1997; Bernardeau, van Waerbecke and Mellier, 1997; Hu and Tegmark, 1999). 进入 21 世纪以来首次探测到大尺度结构的透镜现象, 例如 (van Waerbecke et al., 2000; Kaiser, Wilson and Luppino, 2000; Maoli et al., 2001). 工作进展仍在继续. 毫无疑问, 未来将会有大量大视场弱引力透镜的观测. 其中的两个观测项目是 SuperNova Acceleration Probe (SNAP; http://snap.lbl.gov) (该项目目前计划将其观测时间的 20%分给弱引力透镜观测) 和 Large Scale Synaptic Telescope (LSST; http://www.dmtelescope.org).

20 世纪 80 年代出现了研究 CMB 极化的文章：(Bond and Efstathiou, 1984; Polnarev, 1985). Kosowsky 的理论 (1996) 是关于该工作的玻尔兹曼的详细讨论. 首先认识到 E/B 分解重要性的是 Stebbins (1996); Seljak (1997); Kamionkowski,

Kosowsky 和 Stebbins (1997a,b), Zaldarriaga 和 Seljak (1997). 本书中我选择了 Seljak 的小角度限制, 因为该限制在数学上表述简单. Hu 和 White (1997b) 的综述文章也许是了解 CMB 极化进展的理想综述, 但是 CMB 极化仍然是一个难以理解的领域. 尽管该综述包含了许多富于启发意义的图, 我们仍需要付出巨大努力才能真正理解这一现象.

DASI (Kovac et al., 2002) 在 5 个 sigma 范围内探测到极化. 在此之前, 极化的严格上限 (其在大尺度仍然有效) 由 Hedman 等 (2000) 和 Keating 等 (2001) 得到.

练　　习

1. 位于红移 z 的类星体与我们之间存在一个大质量透镜星系的可能性大致正比于我们与类星体之间的体积. 计算

$$V(z) \equiv \int_{x<\chi(z)} \mathrm{d}^3 x. \tag{10.99}$$

该积分是平凡的, 但不依赖于红移 z. 在存在宇宙学常数的平坦宇宙中数值计算 $V(z)$. 画出红移 $z=2,3,4$ 处的 $V(z)$ 随 Ω_Λ 的变化图. 假设星系密度不依赖于宇宙学模型, 则可以简单地根据体积预测透镜数目. 当红移 $z=3$ 时,$\Omega_\Lambda=0.7$ 的平坦宇宙学模型下的透镜数目与物质为主导的平坦宇宙学模型中透镜数目的比是多少?

注意, Keeton (2002) 指出透镜频率不会如此戏剧性地随宇宙学改变, 因为不同模型中的星系密度不同.

2. 用汇聚 κ 与剪切 γ_1,γ_2 来计算图像的放大率. 在弱场情况下, 放大率 μ 通过下式与汇聚相关

$$\mu \simeq 1+2\kappa. \tag{10.100}$$

3. 给定一个引力势 ϕ, 写出透镜的显著特征 (如偏角和剪切) 是非常必要的.

(a) 应用 (10.14) 式, 计算 $\vec{\theta}_S=\vec{\theta}+\nabla\phi$ 中的 ϕ, 其中 ∇ 是关于 2 维角变量 $\vec{\theta}$ 的梯度.

(b) 用投影势来描述 (10.15) 式中的转置矩阵.

4. 固定红移 z_L 处的透镜离我们的共动距离是 χ_L, 证明前面所述问题中的投影势 ϕ 可以表述为

$$\phi(\vec{\theta};z_L)=4G\frac{\chi_S-\chi_L}{\chi_S\chi_L}\int \mathrm{d}^2R\,\Sigma(\vec{R})\ln|\vec{R}-\chi_L\vec{\theta}|. \tag{10.101}$$

其中 χ_S 是距离源的共动距离;$\vec{R}$ 是在垂直于视线方向的平面中的半径;$\Sigma(\vec{R})$ 是在该平面的投影面密度.

5. 从一个圆形源中计算一个椭率 ε_2 的观测部分; 将其表述成转置矩阵、κ、γ_1、γ_2 的函数.

6. (a) 证明汇聚场功率谱可以用方程 (10.35) 式表述. 证明 γ_2 的功率谱可以用 (10.36) 式表述. (b) 用 CMBFAST 或 BBKS 转移函数来数值计算 P_κ(假设 $\Omega_m=1,h=0.5,n=1$ 的标准宇宙学模型). 假设所有的背景星系位于 $z=1$ 处. 在线性功率谱基础上, l 为何值时由于非线性效应而使计算的 P_k 无效?

7. (10.34) 式给出了小角度极限 ($l \gg 1$) 下的汇聚场功率谱. 更一般的表达形式是 (Stebbins, 1996, 由于存在不同的功率谱的表示法则而多出了 $(2\pi)^3$ 的额外因子)

$$C_{\kappa,l} = 4\pi l^2(l+1)^2 \int \frac{\mathrm{d}^3k}{(2\pi)^3} k^2 I_l^2(k\chi) P_\Phi(k) \tag{10.102}$$

此时所有的背景星系在共动距离 χ 处并且

$$I_l(x) \equiv \int_0^1 \frac{\mathrm{d}y}{y}(1-y)j_l(xy). \tag{10.103}$$

(a) 解析或数值地证明在小角度极限下,(10.102) 式可以化简为 (10.34) 式中 $P_\kappa(l)$ 的表达式.

(b) 重新计算练习 6 中 sCDM 模型下的汇聚场功率谱. 这次使用 (10.102) 式的一般表达式.

8. 在本书中, 我们计算了星系的角相关函数 (第 9 章) 和弱引力透镜相关函数 (本章). 我们也可以计算交叉相关, 即测量星系怎样与质量相关. 一种方法是将星系样本分为前景星系和背景星系, 然后在两个样本中计算交叉相关. 由于它们之间距离很远, 所以唯一可能的相关原因是前景质量对背景星系有放大作用. 该问题使我们可以计算背景/前景相关函数 (例如 Moessner and Jain, 1998). 另一方面,QSO/星系相关函数也可以被用来计算交叉相关函数. 假设前景星系的 2 维密度扰动由内秉的非均匀性引起, 见 (9.3) 式. 又假设背景星系的 2 维密度扰动由透镜放大现象引起, 即本来由于暗于极限星等而不能被探测到的星系因为被放大而变得明亮. 如果放大率是 μ, 在一个角片内的背景星系的数目是

$$n_b = \bar{n}_b \mu^{2.5s-1}. \tag{10.104}$$

这里 $\bar{n}_b$ 是背景星系的平均数目;s 被定义为 $\mathrm{d}\log N(m)/\mathrm{d}m$, 其中 $N(m)$ 是星等极限 m 内的星系数目. 现在不考虑相关的来源 (Broadhurst, Taylor and Peacock, 1995, 解释了这样处理的原因).

(a) 利用 (10.100) 式, 用 κ 与 s 表示背景密度扰动 δ_b.

(b) 根据质量密度扰动给出汇聚 $\kappa(\vec{\theta})$ 的表达式. 首先根据 (10.17) 式中的转置矩阵 A 中的相关部分给出表述, 然后用密度场 δ 取代这里的引力势.

(c) 用前景与背景星系的高密度 (见 (9.3) 式与上面 (b) 中的答案) 的两种表达式来计算角交叉相关函数 $w_bg(\theta) \equiv \langle\delta_b(\theta)\delta_g(0)\rangle$.

9. 假设波矢 $\vec{k}$ 自 $\hat{x}$-$\hat{z}$ 平面出射, 证明 z 方向出射辐射的 Q 极化的改变量是 $\cos(2\phi_k)$. 为解该题, 首先计算 $\hat{k}\cdot\hat{n}'$, 然后根据权重因子 $\sin^2\theta'\cos(2\phi')$ (由 (10.52) 式得到) 对立体角积分 $\mathcal{P}_2(\hat{k}\cdot\hat{n}')$.

10. 该题针对极化的 U 部分.

(a) 我们已经证明非极化入射辐射得到的极化的 Q 部分可以用 (10.52) 式来表述. 因此极化的 Q 部分依赖于 $|\hat{\varepsilon}_i\cdot\hat{x}|^2$ 与 $|\hat{\varepsilon}_i\cdot\hat{y}|^2$ 之间的差别. 对于极化的 U 部分来说,$\hat{x}$ 与 $\hat{y}$ 被旋转 $45°$ 的单位矢量(例如, $(\hat{x}+\hat{y})/\sqrt{2}$ 和 $(\hat{x}-\hat{y})/\sqrt{2}$) 所代替. 在这种情况下, 导出方程 (10.53) 式.

(b) 证明位于 $\hat{x}$-$\hat{z}$ 平面的波矢 $\vec{k}$ 造成的平面波扰动不会产生 z 轴方向出射辐射的 U 极化.

(c) 对于任意角度的波矢 $\hat{k} = (\sin\theta\cos\phi, \sin\theta\sin\phi, \cos\theta)$, 证明 (10.60) 式中的 U 极化.

11. 画出下列情况下 z 轴附近由平面波标量扰动产生的极化模式: (a) $\theta_k = \pi/8,\ \phi_k = \pi/8$; (b) $\theta_k = 3\pi/4,\ \phi_k = \pi/4$, (c) $\theta_k = 3\pi/4,\ \phi_k = 0$; (d) $\theta_k = 3\pi/2,\ \phi_k = 0$. 在每一种情况下, 证明极化平行或垂直于极化强度改变的方向.

12. 在紧密耦合极限下, 存在下述表述 $\Pi \equiv \Theta_2 + \Theta_{P2} + \Theta_{P0}$.

(a) 当 $\dot{\tau}$ 值很大时,(10.63) 式中乘以 $\Theta_{P(\mu)}$ 的右边项可以消掉. 写出用 $\Theta_2, \Theta_{P2}, \Theta_{P0}$ 表示的 $\Theta_P(\mu)$ 的表达式.

(b) 对 $\Theta_P(\mu)$ 作勒让德展开, 仅保留单极和四极项. 使 $\mathcal{P}_0, \mathcal{P}_2$ 的系数相等.

(c) 这导致具有三个未知量的两个方程. 温度四极矩给出 $\Theta_{P0} = 5\Theta_2/4, \Theta_{P2} = \Theta 2/4$, 使用上述条件解极化力矩.

(d) 利用 (c) 中的结论, 用 Θ_2 表示 Π.

13. 该问题涉及 (10.91) 式中提及的旋转矩阵 R.

(a) 令 R 作用在单位矢量 (0,0,1) 上，并证明其能转化为 $\hat{k}$.

(b) 导出 R. 方法是, 旋转 x-y-z 坐标系, 将 z 轴转动角度 ϕ', 将 y 轴转动角度 $-\theta'$, 两次旋转的产物就是 R.

14. 本章中, 我们从引力波引起的单个平面波扰动出发考虑极化模式. 其实这里存在两个方向. 我们只考虑了 $h_\times$. 在本题中, 考虑 h_+ 引起的极化. 在一个坐标系中,k 沿 z 轴方向, 各向异性依赖于系数 $\sin^2\theta\cos(2\phi)$.

(a) 在一个 $\hat{k}$ 不沿 z 轴方向的较为一般化的坐标系中, 寻找 Θ^T 对角度的依赖关系.

(b) 从入射分布中得到 Q 与 U.

(c) 画出图 10.19 中所示的 θ_k, ϕ_k 的四种情况下的近出射 z 轴方向的各向异性模式.

15. 用 Θ_l, Θ_{Pl} 给出温度各向异性 $C_{TQ}(\vec{l})$ 与极化各向异性 $C_{TU}(\vec{l})$ 之间的交叉功率谱的表达式. 假设只存在标量扰动. 用这些参量表示 $C_{TE,l}$.

第 11 章　数据分析方法

越来越多的理论家甚至繁忙的实验物理学家正将他们的注意力转向如何最好地分析一组数据这样基本的问题. 其主要原因是在过去的十年中, 数据的数量和质量得到了极大的提高. 我们有充分的理由相信, 这一趋势将持续下去. 已经有数十个实验测量了宇宙微波背景辐射的温度的各向异性. WMAP 和普朗克会将这些测量推进到下一个阶段, 但这还不是最后的阶段, 仍然会有极化和非常小尺度的各向异性将被测量到. 物质功率谱也会以各种各样的方式来探测; 这里的探测活动, 也没有显示减少的迹象. 在完成迄今为止最大的两个红移巡天 —— 斯隆数字巡天和 $2DF$ 之后, 科学家已经开始规划大型弱引力透镜项目和更深场的星系巡天. 这些较大的数据带来了数据分析方面的新挑战.

Julian Borrill 给出了关于那些挑战的一个美妙的例子. 他利用定标参数表明, 从 Boomerang CMB 各向异性的实验得到的原始数据来作图的直接算法在当前计算机中运行需要 12 年! 现在得到的数据对于蛮力算法来说已经太大了, 而且我们得到的数据变得越来越多. 因为通常算术运算的数量尺度与数量的像素的立方成比例, 以及 WMAP 和普朗克的数据是 Boomerang 的 10∼100 倍, 我们迫切需要创造性的解决方案.

最近重点在分析的另一个原因是我在这一章希望传达的: 数据分析非常令人兴奋. 已经提出的处理即将产生的复杂数据的技术是精湛的. 当然这些技术的重要性提高了它的优雅性. 但是, 优雅就在那里; 仅凭这一点, 就值得通过一些最近的进展好好研究.

11.1　似 然 函 数

似然函数是当代分析中的基本模块. 它定义了给定实验中已知随机变量输出结果时, 未知参数的可能取值. 这个看似简单的定义其实是非常强大的. 一旦我们有似然函数, 有其中的一个或两个条件, 就可以确定该理论中的参数 (在参数空间中似然函数取最大值时得到最佳估计值) 随着误差 (由似然函数的宽度确定) 的变化情况. 我们先从一个简单的例子开始, 进而到 CMB 的似然函数, 然后再到星系巡天.

11.1.1　简单的例子

假设你要称某人的体重, 因为你是一个科学家, 所以你应该知道, 除了测量体

重本身之外, 你也应该报告该测量结果的不确定性. 所以你开始用 100 个不同的秤记录称得的被测人的体重. 对于这 100 个数字, 哪一个才是你应该报告的体重, 哪一个才是这些数据的不确定性呢? 我们都知道这个问题的答案, 让我们用这个简单的背景介绍一下似然函数的形式.

似然函数描述的是通过分析这 100 个数能够得到一个理论的概率. 我们的理论是, 每个测量都是恒定信号 (一个人的体重)w 的总和和噪声, 这些噪声从均值为零、方差为 σ_w^2 的高斯分布得到. 因此, 我们的 “理论” 有两个自由参数,w 和 σ_w. 如果只有一个数据点 d, 那么得到的理论概率为

$$P[d|w,\sigma_w] \equiv \mathcal{L}(d;w,\sigma_w) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_w^2}}\exp\{-\frac{(d-w)^2}{2\sigma_w^2}\}. \tag{11.1}$$

在这个公式中,$P[x|y]$ 描述了用 y 表示 x 的概率,(11.1) 式只是重申了假设 $d-w$ 等于噪声, 噪声是由高斯分布与标准差 σ_w 得到的, 在一定范围内 σ_w 变得非常小, 这种极限情况往往在 $d=w$ 的峰值取得. 当我们作了 $N_m=100$ 次独立测量时, 似然函数是各个独立似然函数的乘积, 也就是

$$\mathcal{L} = \frac{1}{(2\pi\sigma_w^2)^{N_m/2}}\exp\left\{-\frac{\sum\limits_{i=1}^{N_m}(d_i-w)^2}{2\sigma_w^2}\right\}. \tag{11.2}$$

注意, 虽然数据分布为高斯分布, 似然函数并不是在所有的理论参量中都呈高斯分布 (在 w 中是, 在 σ_w 中就不是).

我们对 w 和 σ_w 的理论值很感兴趣, 因此, 并不想只得到似然函数 $P[d_i|w,\sigma_w]$ 来表示我们得到的似然函数, 而是希望得到 $P[w,\sigma_w|d_i]$. 只用基础的概率理论中的简单关系, 就能由前面的数据得到后面的数据.

$$\begin{aligned} P[B\cap A] &= P[B|A]P[A] \\ &= P[A|B]P[B]. \end{aligned} \tag{11.3}$$

在这个背景下,$A=\{d_i\}$,$B=\{w,\sigma_w\}$, 所以 (11.3) 式中等式两边的等量关系是

$$P[w,\sigma_w|\{d_i\}] = \frac{P[\{d_i\}|w,\sigma_w]P[w,\sigma_w]}{P[\{d_i\}]}. \tag{11.4}$$

因为当我们把参量 w 和 σ_w 在 P 中的所有可能取值的概率合起来的时候, 其值为 1, 因此可以重写这个等式的分母. 所以这个等式的分母等于分子对 w 和 σ_w 的积分. 这在参数空间不影响似然函数的峰值或者似然函数的宽度. 大多数情况下, 我们可以忽略它们.

为了得到概率我们需要似然函数 — 分子的第一项 — 和先验概率 $P[w, \sigma_w]$. 如果我们拥有这些数量的先验信息, 可以在这里使用这个信息. 如果我们想保守起见, 并不进行假设, 可以提出一个统一的先验的参数. 那么

$$P[w, \sigma_w | \{d_i\}] \propto \mathcal{L}. \tag{11.5}$$

比例常数是独立的参数, 因此可以先不考虑. 许多人认为这种利用先验信息的想法令人不安. 事实上, 即使是保守选择一个统一先验也不像看起来那么简单. 如果选择的参数是 σ_w^2 而不是 σ_w, 并且假设一个统一的先验 (即等间隔的 σ_w^2 是等可能的), 我们可以得到一个不同的最终概率的答案 (试着做一下!). 然而, 对于先验的依赖仅仅当数据差别不大时才成问题. 如果数据有区分能力, 那么似然函数 $P[d_i|w, \sigma_w]$ 将得到一个很陡的峰值, 任何合理的先验都不影响最终结果.

现在我们可以得到参数 w 和 σ_w 的最佳拟合值, 只需找到在参数空间中似然函数最大的地方. 在这个简单的例子中, 我们可以解析地求 $\mathcal{L}$ 对各个参数的导数. 首先考虑对 w 的导数.

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial w} = \frac{\sum_{i=1}^{N_m}(d_i - w)}{\sigma_w^2 (2\pi\sigma_w^2)^{N_m/2}} \exp\left\{-\frac{\sum_{i=1}^{N_m}(d_i - w)^2}{2\sigma_w^2}\right\}. \tag{11.6}$$

为了使该导数为零, 我们令前因子

$$\sum_{i=1}^{N_m}(d_i - w) = 0 \tag{11.7}$$

或等价地, 似然函数在此时取最大值

$$w = \bar{w} = \frac{1}{N_m}\sum_{i=1}^{N_m} d_i, \tag{11.8}$$

同样地, 我们可以得到 σ_w^2 最可能的值

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \sigma_w^2} = \mathcal{L}\left[-\frac{N_m}{2\sigma_w^2} + \frac{\sum_{i=1}^{N_m}(d_i - w)^2}{2\sigma_w^4}\right] \tag{11.9}$$

并令其为零. 求解方差 σ_w^2 我们得到一个最可能的值为

$$\sigma_w^2 = \frac{\sum_{i=1}^{N_m}(d_i - \bar{w})^2}{N_m}, \tag{11.10}$$

我们已经得到理论参数的最佳拟合值. 这些最佳拟合值误差是多少?误差的宽度与似然函数的宽度成正比. 得到近似的宽度的一个简单的方法是假设 $\mathcal{L}$ 在参数

中是高斯化的, 或等价地,$\mathcal{L}$ 是二次参数. 我们知道,一般来说, 高斯分布的方差是两倍的二次项系数的倒数, 所以我们可以通过计算该系数简单地确定方差 (误差的平方). 对于 w 有

$$\begin{aligned}\ln \mathcal{L}(w) &= \ln \mathcal{L}(\bar{w}) + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 \ln \mathcal{L}}{\partial w^2}\Big|_{w=\bar{w}}(w-\bar{w})^2 \\ &= \ln \mathcal{L}(\bar{w}) - \frac{N_m}{2\sigma_w^2}(w-\bar{w})^2. \end{aligned} \tag{11.11}$$

因此, 似然函数的最大宽度是 $\sigma_w/N_m^{1/2}$, 这是确定 w 的 1σ 误差：随着采取方法越来越多, 噪声被减少到独立测量数的平方根分之一. 重要的是重申我们对体重的估计的不确定性不等于 σ_w.

两组数加起来得到最后的测量结果：我们对体重的最好的猜测 — 此时 $\bar{w}$ 由 (11.8) 式给定 — 以及这个估计的误差, 在这里等于 $\sigma_w/N_m^{1/2}$. 因此, 我们可以通过改写似然函数把 100 次测量的结果表达成

$$\mathcal{L} = \frac{1}{\sqrt{2\pi C_N}}\exp\left\{\frac{-(w-\bar{w})^2}{2C_N}\right\}, \tag{11.12}$$

由于噪声产生的方差是

$$C_N = \frac{\sigma_w^2}{N_m}. \tag{11.13}$$

这种似然函数的形式与所有的 N_m 个数据点的最大值和宽度一致.因此它把所有的信息压缩到了两个参量 $\bar{w}$ 和 C_N 中.

我们可以将上述测量体重的例子应用到 CMB 上.用信号 s 代替体重, 表示在天空中一个给定的点的真实的 CMB 温度. 对信号的多次测量对应对这一点的温度的多次测量.那一点的信号是一个常数, 数据是常数信号与噪声之和 (噪声可能来自大气和仪器设备). 把所有不同的测量压缩到一个数据点,相关误差公式为 (11.12) 式, 这被称为绘制 CMB 图. 我们将在 11.5 节中更详细地进行介绍. 现在,我们必须探讨比似然函数 (11.12) 式更深入的内容. 我们知道, 没有理论能够预测天空中特定位置的温度,即没有理论能够对 s 作出预测. 所有的理论预言的都是温度的分布,能够给定每个像素的 s. 我们现在必须把这种分布合并成似然函数.

11.1.2 CMB 似然函数

让我们把上一节的 CMB 的定义作一下变换.用天空中给定点的真正的温度各向异性 s 代替 w, 而数据点 $\bar{w}$(真实的多次测量的平均值)成为温度各向异性的估计

值, 称之为 Δ.[①] 估计量 C_N 的方差, 代表测量结果的分布, 也已经给出.(Δ, C_N) 这组数据怎样与理论相比较呢？最简单的理论, 例如暴胀, 预测在天空中给定位置的信号服从高斯分布.因此天空的温度在 s 和 $s+\mathrm{d}s$ 的范围的概率为

$$P(s)\mathrm{d}s = \frac{1}{\sqrt{2\pi C_S}}\exp\left\{\frac{-s^2}{2C_S}\right\}\mathrm{d}s. \tag{11.14}$$

C_S 是仅由于信号产生的方差, 独立于其他噪声. 该方差直接与 C_l 相关, 我们将在 11.2 节进行讨论.

为了得到似然函数, 我们卷积概率分布公式 (11.14), 其中似然函数是 (11.12) 式, 得到

$$P[\Delta|C_S] = \sum_s P[\Delta|s]P[s|C_S]. \tag{11.15}$$

更具体地说, 似然函数是对所有真正的各向异性所有可能值的积分：

$$\mathcal{L} = \int_{-\infty}^{\infty}\frac{\mathrm{d}s}{\sqrt{2\pi C_S}}\exp\left\{\frac{-s^2}{2C_S}\right\}\frac{1}{\sqrt{2\pi C_N}}\exp\left\{\frac{-(\Delta-s)^2}{2C_N}\right\}. \tag{11.16}$$

指数项是 s 的二次项, 所以可以直接得到 s 的积分. 重写参数的指数

$$-\frac{s^2C}{2C_SC_N} + \Delta s/C_N - \frac{\Delta^2}{2C_N} = -\frac{C}{2C_SC_N}\left[s-\frac{C_S\Delta}{C}\right]^2 + \frac{C_S\Delta^2}{2CC_N} - \frac{\Delta^2}{2C_N} \tag{11.17}$$

其中总协方差矩阵的定义是

$$C \equiv C_S + C_N. \tag{11.18}$$

改变积分变量 s 为 $x \equiv s - C_S\Delta/C$ 得到

$$\begin{aligned}\mathcal{L} &= \frac{1}{\sqrt{2\pi C_N}}\exp\left\{\frac{C_S\Delta^2}{2CC_N} - \frac{\Delta^2}{2C_N}\right\}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{2\pi C_S}}\exp\left\{-\frac{Cx^2}{2C_SC_N}\right\}\\ &= \sqrt{\frac{1}{2\pi C}}\exp\left\{\frac{-\Delta^2}{2C}\right\}.\end{aligned} \tag{11.19}$$

对于一个像素的实验, 这是似然函数的最终表达式. 这种形式正是我们期望得到的: 被测温度的分布是高斯的, 且方差是噪声和信号方差的和.

我们可以很容易地推广 (11.19) 式到更现实的情况, 测量 N_p 个像素. 此时似然函数为

$$\mathcal{L} = \frac{1}{(2\pi)^{N_p/2}(\det C)^{1/2}}\exp\left\{-\frac{1}{2}\Delta C^{-1}\Delta\right\} \tag{11.20}$$

①在 11.5 节中给出了从原始数据, 时间序列得到由 Δ 表示的像素化制图的方法.

这里 Δ 是由 N_p 次测量组成的数据向量, C 是总协方差矩阵. 在一般情况下, 噪声的协方差矩阵接近对角矩阵, 但理论的协方差矩阵是非对角的. 因此, 估算似然函数的计算部分非常复杂, 用行列式和 $N_p \times N_p$ 阶矩阵 C 的逆. 从理论参数 (C_S) 到参数矩阵产生了出了计算之外的复杂问题. 如果只有参数, 观测者能引用一个数字的形式的结果. 现在, 所有相关的都需要考虑, 需要允许许多不同的理论参数, 原则上所有的 $N_p(N_p+1)/2$ 个元素的 (对称) 协方差矩阵 C_S. 实际上我们当然不是这样做的. 首先, 所有理论的协方差都依赖于两点之间的角距离, 因此矩阵的元素对应距离相等的两组数. 等价地, 一个给定的理论与所有的 C_l 有关; 正如我们很快就会看到的, 它们可以用来构建 C_S 的所有元素. 第二, 简化是大多数实验对单独的 C_l 不敏感, 而是对 l 在一定范围内的平均功率, 即在一个给定的波段. 因此, 我们通常拟合波段功率, 该拟合需要确定的参数更少.

正如之前提到的, 矩阵 $C = C_S + C_N$ 通常不是对角矩阵. 然而, 通过考虑 C 是对角矩阵且正比于单位矩阵 (对角线上的元素相等) 的特殊情况, 我们可以更好地洞察似然函数的本质. 在这种情况下,

$$\mathcal{L} \propto \frac{1}{(C_S+C_N)^{N_p/2}} \exp\left\{-\frac{1}{2}\frac{\sum_{i=1}^{N_p}\Delta_i^2}{C_S+C_N}\right\}. \tag{11.21}$$

我们可以很容易地得到这种情况下使似然函数取最大值的 C_S. 对 C_S 求导得到

$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial C_S} = \mathcal{L}\times\left[\frac{-(N_p/2)}{(C_S+C_N)} + \frac{1}{2}\frac{\sum_{i=1}^{N_p}\Delta_i^2}{(C_S+C_N)^2}\right]. \tag{11.22}$$

如果我们把它的值设为零, 发现似然函数在此时取得最大值

$$C_S = \frac{1}{N_p}\sum_{i=1}^{N_p}\Delta_i^2 - C_N. \tag{11.23}$$

因此估算 CMB 实验中信号的一个有用的经验方法是计算数据点的方差 ((11.23) 式右边的第一项), 并将它与每个像素上的平均噪声相比 ((11.23) 式右边的第二项). 如果数据的方差比噪声大, 那么理论信号就是简单的两者之差.

我们也可以计算 C_S 的误差. 如同 11.1.1 节, 误差与似然函数的对数的二阶导数相关:

$$\sigma_{C_S} = \left(\frac{-\partial^2\ln\mathcal{L}}{\partial C_S^2}\right)^{-1/2}. \tag{11.24}$$

此时微分的计算是很容易的. 再次对 (11.22) 式求微分可得

$$\frac{\partial^2\ln\mathcal{L}}{\partial C_S^2} = \frac{(N_p/2)}{(C_S+C_N)^2} - \frac{\sum_{i=1}^{N_p}\Delta_i^2}{(C_S+C_N)^3}. \tag{11.25}$$

在似然函数的峰值处, 我们用 $N_p[C_S + C_N]$ 代替 $\sum_{i=1}^{N_p} \Delta_i^2$, 因此

$$\sigma_{C_S} = \sqrt{\frac{2}{N_p}}(C_S + C_N). \tag{11.26}$$

(11.26) 式是一个非常有用的简化版本, 可以用来得到给定实验的参数的准确度. 这个简化版本给出了理论参数 C_S 的误差. 更一般的公式给出了自由参数是 C_l 的相关误差. 此时

$$\sigma_{C_l} = \sqrt{\frac{2}{(2l+1)f_s}}(C_L + C_{N,L}). \tag{11.27}$$

从 (11.26) 式到 (11.27) 式的唯一变化是像素的数目 — 或独立测量的次数 — 变为 $(2l+1)f_s$,f_s 是天空覆盖的部分. 这是很有道理的, 在全天的情况下, 最多只能测量 $(2l+1)a_{lm}$, 也就是说可以用 C_l 把分布样本化 $2l+1$ 次. 事实上, 这是我们可以测量的 C_l 的基本精度限制. 即使没有噪声 ($C_N = 0$), 理论参数 (C_N 或 C_l) 也有基本的不确定度, 因为我们只有一个可以测量的天空. 这个限制我们在第 8 章中就已经遇到过, 称之为样本方差, 或所有全天巡天中的宇宙方差限制.

11.1.3 星系巡天

首先, 有人可能会认为, 星系巡天的分析会完全不同于 CMB 的分析. 它们是有一些差异. 星系的分布从根本上说是三维的, 而 CMB 各向异性只是角位置的函数. 同时,CMB 测量的是连续的温度场, 是位置的函数. 星系巡天针对的是离散的对象 (星系). 巡天只是简单的这些天体位置的列表. 另一个区别是 CMB 服从高斯分布, 而星系可能示踪了潜在的质量分布 — 至少在小尺度上 — 已经是非线性的了. 非线性不可避免地产生非高斯性, 即使原始的分布为高斯分布也不例外.

尽管存在这些差异, 我们近年来认识到许多相同的技术可以应用到 CMB 和星系巡天的数据处理之中. 为了巩固 CMB 和星系巡天之间的联系, 我们需要确定像素的概念. 对于 CMB 来说, 一个像素的概念很容易理解, 不需要再进行定义. 而对星系巡天来说, 根据 Tegmark 等 1998 年的文章, 我们可以将像素 i 中的数据定义为

$$\Delta_i \equiv \int \mathrm{d}^3x \psi_i(\vec{x}) \left[\frac{n(\vec{x}) - \bar{n}(\vec{x})}{\bar{n}(\vec{x})}\right]. \tag{11.28}$$

这里 $n(\vec{x})$ 是 $\vec{x}$ 处的星系数密度, $\bar{n}$ 是 $\vec{x}$ 处的预期星系目, 即均匀分布的星系数目. 加权函数 ψ_i 决定了如何像素化, 不久之后会进行讨论, 但首先我们需要了解在巡天中如何确定 n 和 $\bar{n}$. 一个简单的方法是把体积分成更小的子体积, 每个子体积都比总的巡天小得多, 但足够包含许多星系 (例如, 大于 10 个星系). 一个给定的子体

积密度则是星系的数目除以该子体积. 对于均匀分布的巡天来说, 平均密度 $\bar{n}$ 就是总的星系数目除以总体积.①

对于 ψ_i 有两个常用的选择. 第一个是 "counts-in-cells", 其中

$$\psi_i^{\text{CIC}}(\vec{x}) = \begin{cases} \bar{n}(\vec{x}) & \text{当 } \vec{x} \text{ 在第 } i \text{ 个子体积中} \\ 0 & \text{不在任何一个子体积中} \end{cases}. \tag{11.29}$$

在这种情况下, 子体积本身就是像素,Δ_i 是第 i 个子体积中的高密度或者低密度扰动. 另一个有用的像素化方案是一组傅里叶像素, 其中令

$$\psi_i^{\text{Fourier}}(\vec{x}) = \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\vec{k}_i\cdot\vec{x}}}{V} \begin{cases} 1 & \vec{x} \text{ 在巡天体积内} \\ 0 & \vec{x} \text{ 在巡天体积外} \end{cases}. \tag{11.30}$$

此时 V 是巡天的体积. 在这种情况下, 像素不是在实空间, 而是存在于傅里叶空间中. 但是尽管在这种情况下, Δ_i 仍是在每个像素中的密度扰动.

无论选择哪种像素化方法, 都不能写出简单的似然函数表达式, 给定理论得到一组 Δ_i 的概率. 星系形成的理论太过复杂. 事实上, 即使假定星系密度可以完美地示踪物质密度, 仅考虑引力的复杂性就使似然函数是非高斯分布. 然而, 仍然可以通过定义 Δ_i 的期望值为零做出一些进展, 协方差矩阵为②

$$\langle \Delta_i \Delta_j^* \rangle = (C_S)_{ij} + (C_N)_{ij} \tag{11.31}$$

与 CMB 的情况完全相同. 我们将在 11.2 节详细讨论信号协方差矩阵. 噪声协方差矩阵实际上比相应的 CMB 矩阵容易,CMB 取决于大气、指向、仪器噪声、扫描策略和其他实验细节. 在星系巡天中, 即使没有信号, 密度期望值的平方 $n^2(\vec{x})$ 也与 $\bar{n}^2$ 不同, 因为在给定的子空间中只有有限个星系. 因此由于泊松噪声, 即使没有任何内禀星系团,$\langle \Delta_i \Delta_j^* \rangle$ 也不为零. 在练习 3 中你将证明由于泊松噪声产生的协方差矩阵为

$$(C_N)_{ij} = \int \mathrm{d}^3x \frac{\psi_i(\vec{x})\psi_j^*(\vec{x})}{\bar{n}(\vec{x})}. \tag{11.32}$$

有了噪声协方差矩阵和之后我们要探讨的信号协方差矩阵, 就可以运用许多研究 CMB 时相同的技术到星系巡天中来.

11.2 信号的协方差矩阵

到此为止, 我们回避了实验中期望方差是怎样与相关的功率谱联系起来的. 也

①注意: 如果由 ψ_i 定义的像素有重叠, 则在计算 $\bar{n}$ 时需要小心处理, 因为此时同一个星系可能出现在多个像素中.

②这里的尖括号表示得到 Δ_i 的平均分布.

就是说, 我们已经知道理论预言是一系列的 C_l 和 $P(k)$. 如果我们想将理论与实验联系起来, 需要知道如何把这些预言变成协方差矩阵 C_S.

11.2.1　CMB 窗函数

为了简单起见, 我们首先考虑协方差矩阵的对角元素:

$$C_{S,ii} \equiv \langle s_i s_i \rangle \quad (\text{不对 } i \text{ 求和}). \tag{11.33}$$

在产品实现的理论分布下标我标签的像素. 在每个像素的温度差可以表示为

$$s_i = \int \mathrm{d}\hat{n}\Theta(\hat{n})B_i(\hat{n}) \tag{11.34}$$

其中, B_i 是第 i 个像素的波束模式, Θ 是温度. 例如, MSAM 实验中的波束模式如图 11.1 所示. 这是许多 CMB 实验中典型的波束模式: 天空中两 (多) 个区域温度的差别, 每个区域的温度由一个波束采样, 它近似为高斯分布.

为了得到 C_S, 我们对温度场进行球谐展开, 如 (8.60) 式, 然后取 (11.34) 式的平方:

$$\frac{C_{S,ii}}{T^2} = \int \mathrm{d}\hat{n} \int \mathrm{d}\hat{n}' B_i(\hat{n}) B_i(\hat{n}') \sum_{lm} Y_{lm}(\hat{n}) \sum_{l'm'} Y^*_{l'm'}(\hat{n}') \langle a_{lm} a^*_{l'm'} \rangle. \tag{11.35}$$

利用 (8.63) 式, 我们得到对 l、m 求和后的结果

$$\frac{C_{S,ii}}{T^2} = \int \mathrm{d}\hat{n} \int \mathrm{d}\hat{n}' B_i(\hat{n}) B_i(\hat{n}') \sum_l C_l \sum_m Y_{lm}(\hat{n}) Y^*_{lm}(\hat{n}'). \tag{11.36}$$

但是

$$\sum_m Y_{lm}(\hat{n}) Y^*_{lm}(\hat{n}') = (2l+1) P_l(\hat{n}\cdot\hat{n}')/4\pi,$$

所以

$$\frac{C_{S,ii}}{T^2} = \sum_l \frac{2l+1}{4\pi} C_l W_{l,ii}. \tag{11.37}$$

其中, 窗函数的定义为

$$W_{l,ii} \equiv \int \mathrm{d}\hat{n} \int \mathrm{d}\hat{n}' B_i(\hat{n}) B_i(\hat{n}') P_l(\hat{n}\cdot\hat{n}'). \tag{11.38}$$

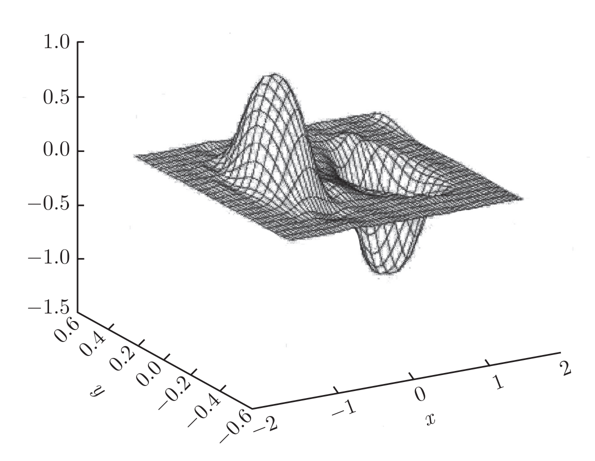


图 11.1　MSAM 实验中的波束模式 (参见 Wilson et al., 2000). 给定像素相对于像素中心的各向异性差别大概在正负 0.5°. 波束宽度也在半度的量级

到此为止, 我们将 $\hat{n}$ 和 $\hat{n}'$ 看作三维单位矢量. 如果 $\hat{n}'$ 和 $\hat{n}$ 足够接近, 我们可以用平坦空间近似. 三维单位矢量可以近似为切向方向的二维矢量 $\hat{x}$ 和 $\hat{x}'$. $\hat{x}$ 和 $\hat{x}'$ 之间的距离 (用弧度来度量) 等于 $\hat{n}$ 和 $\hat{n}'$ 之间的夹角. 在这个极限下, (11.38) 式勒让德多项式的参数为

$$\vec{n}\cdot\vec{n}' = \cos(|\vec{x}-\vec{x}'|). \tag{11.39}$$

因此对角窗函数为

$$W_{l,ii} = \int \mathrm{d}^2x \int \mathrm{d}^2x' B_i(\vec{x})B_i(\vec{x}')P_l(\cos(|\vec{x}-\vec{x}'|)). \tag{11.40}$$

勒让德多项式的一个有用的性质是在 l 的值很大的极限下 (即小角度极限下), 勒让德多项式等于零阶贝塞尔函数. 因此,

$$\begin{aligned} P_l(\cos(|\vec{x}-\vec{x}'|)) &\to J_0(l|\vec{x}-\vec{x}'|) \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \mathrm{d}\phi \mathrm{e}^{-\mathrm{i}l|\vec{x}-\vec{x}'|\cos\phi}, \end{aligned} \tag{11.41}$$

此时等式后面的积分代表贝塞尔函数 ((C.21) 式). 将 l 变为给定方向的二维矢量使得 $\hat{l}$ 和 $\hat{x}-\hat{x}'$ 的夹角等于 ϕ. 那么, 指数项的参数化简为 $-\mathrm{i}\vec{l}$

$$\int \mathrm{d}^2x B_i(\vec{x})\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\vec{l}\cdot\vec{x}} \equiv \tilde{B}_i(\vec{l}), \tag{11.42}$$

其中,$\tilde{B}_i$ 是波束模式的傅里叶变换. $\tilde{x}'$ 是它的复共轭, 因此窗函数可以简化为

$$W_{l,ii} = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \mathrm{d}\phi|\tilde{B}_i(\vec{l})|^2. \tag{11.43}$$

因此计算窗函数简化到两步:

- 计算光束模式的二维傅里叶变换.
- 得到角均方变换.

窗函数是该实验的函数, 包含波束大小和正负变化的信息. 然而, 它没有包含全部. 完整的估算似然函数需要计算协方差矩阵 C_S 的所有元素. 矩阵的非对角元素由 (11.37) 式和 (11.38) 式给出, 下标 i 变为 j. 该矩阵是对称的, 所以它由 $N_P(N_P+1)/2$ 个元素描述, 其中 N_P 是像素的数量. 因此, 对于 N_P 个像素的实验来说, 窗函数的个数为 $N_p(N_p+1)/2$ 个!

11.2.2 CMB 窗函数的例子

我们先计算一个简单的 (对角) 窗函数. 考虑高斯波束, 这对于许多 CMB 实验来说是一个很好的近似. 第 i 个像素的波束模式为

$$B_i(\vec{x}) = \frac{1}{2\pi\sigma^2}\exp\left(-\frac{(\vec{x}-\vec{x}_i)^2}{2\sigma^2}\right). \tag{11.44}$$

计算窗函数时, 我们可以令 $\vec{x}_i$ 为零. 波束的傅里叶变换也是高斯的,

$$\begin{aligned}\tilde{B}_i(\vec{l}) &= \frac{1}{2\pi\sigma^2}\int \mathrm{d}^2x\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\vec{l}\cdot\vec{x}}\exp\left(-\frac{x^2}{2\sigma^2}\right)\\ &= \mathrm{e}^{-l^2\sigma^2/2}.\end{aligned} \tag{11.45}$$

在这个简单的例子中,$\tilde{B}$ 不依赖于方向 $\vec{l}$, 所以没有必要取角平均. 窗函数是傅里叶变换的平方,

$$W_{l,ii} = \mathrm{e}^{-l^2\sigma^2}. \tag{11.46}$$

当 l 的值很大时, 窗函数急剧下降. 较大的 l 对应于小角尺度. 尺度小于光束大小的结构不可避免地被抹平不能探测到. 图 11.2 展示了这一系列步骤, 从波束函数到傅里叶变换再到窗函数.

与高斯窗函数相关的有两个精妙之处. 首先. 你必须避免令 σ 等于文章中经常被引用的半高全宽 (FWHM) 这个数的诱惑. 后者是 x 值的两倍, 此时 $B(\vec{x})$ 是其最大值的一半, 因此 $\sigma = \mathrm{FWHM}/(\sqrt{8\ln(2)}) = 0.4245$ FWHM. 第二个精妙之处在于归一化. 这是对于观测者如何决定输出的归一化至关重要. (11.44) 式前面的因子保证了如果温度场均匀, 那么得出的温度与实际的温度相等. 在这个简单的情况中, 选择是显而易见的; 因子 2 很容易丢掉.

差分高斯波束. 作为另一个直观的例子, 让我们考虑在天空中两个相邻的点的温度差异. 为了简化, 我们首先假设高斯波数无限小, 所以它可以近似为狄拉克 δ 函数. 然后,

$$B(x,y) = \delta(y)[\delta(x-x_0)-\delta(x+x_0)], \tag{11.47}$$

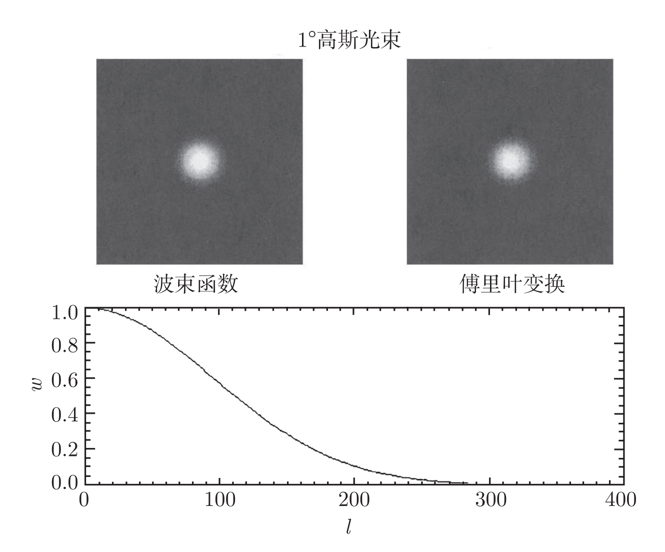


图 11.2　左上图展示了 1° 的高斯光束, 右上图是其傅里叶变换, 也是高斯的. 下图是得到的窗函数

其中的斜劈角, 或正负位置之间的距离是 $2x_0$. 傅里叶变换为

$$\tilde{B}(\vec{l}) = 2\mathrm{i}\sin(l_x x_0). \tag{11.48}$$

窗函数是在 $\vec{l}$ 的所有方向取角平均. 令 $\vec{l}$ 与 x 轴之间的夹角为 ϕ, 得到

$$\begin{aligned} W_l &= \frac{4}{2\pi}\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\phi\sin^2[lx_0\cos\phi] \\ &= \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\phi(1-\cos[2lx_0\cos\phi]) \\ &= 2(1-P_l[\cos(2x_0)]), \end{aligned} \tag{11.49}$$

到此为止, 我们忽略了有限的波束宽度. 然而这个修正证明是很简单的. 实际的波束是由 (11.47) 式描述的斜劈函数与有限大小波束的卷积:

$$\begin{aligned} B(x,y) = \frac{1}{2\pi\sigma^2}\int \mathrm{d}x'\mathrm{d}y'\exp\left\{-\frac{(x-x')^2+(y-y')^2}{2\sigma^2}\right\} \\ \times\delta(y')[\delta(x'-x_0)-\delta(x'+x_0)]. \end{aligned} \tag{11.50}$$

这两个函数的卷积的傅里叶变换简单地等于两个傅里叶变换的乘积. 由于高斯无角度依赖性, 因此对该乘积的角平均不受影响. 最终的窗函数为

$$W_l = \mathrm{e}^{-l^2\sigma^2}(1-P_l[\cos(2x_0)]). \tag{11.51}$$

窗函数以及两种不同的斜劈角的波数模式如图 11.3 和图 11.4 所示. 需要注意的是, 当 l 远小于 l/x_0 时, 傅里叶变换为零. 因此, 与非差分波束不同, 这里不支持较小的 l. 也就是说, 斜劈消除了大尺度上的结构信息. 随着斜劈角的增大, 所获得的关于大尺度的信息也越来越多.

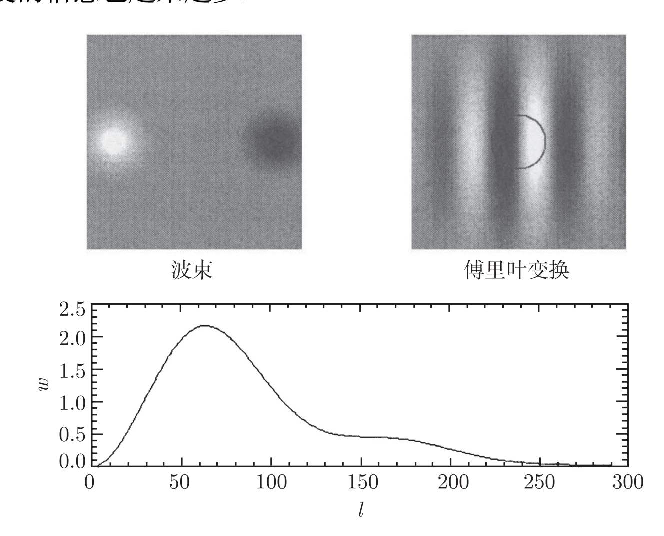


图 11.3　差分高斯波束. 左上图展示了波束模式, 右上图为其傅里叶变换. 右上图中的圆对应于 $l = 50$. 下图展示的是窗函数

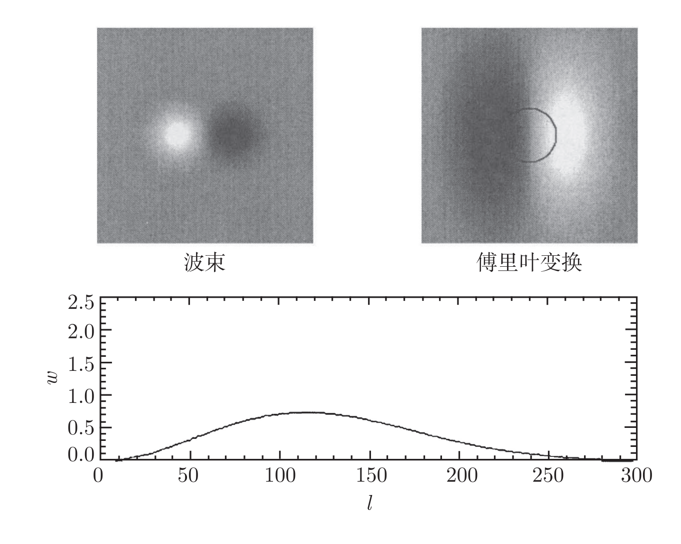


图 11.4　与图 11.3 一样, 除了斜劈角小很多外. 注意由于斜劈角的减少在大尺度上缺乏支持, 这也可以从傅里叶变换在圆圈中心附近消失看出

11.2.3 星系巡天的窗函数

我们现在考虑星系巡天的信号协方差矩阵. 通过令 (11.28) 式方括号中的项等于 $\delta(\vec{x})$, 我们可以看到, 信号协方差矩阵等于

$$(C_S)_{ij} = \langle \Delta_i \Delta_j \rangle \Big|_{\text{no noise}} = \int \mathrm{d}^3x \mathrm{d}^3x' \psi_i(\vec{x}) \psi_j(\vec{x}') \xi(\vec{x} - \vec{x}'). \tag{11.52}$$

出现相关函数 ξ 因为它等于两个高密度乘积的期望值, 参见 (9.7) 式. 由于 ξ 是功率谱的傅里叶变换, 所以星系巡天的信号协方差矩阵为

$$\begin{aligned}(C_S)_{ij} &= \int \mathrm{d}^3x \mathrm{d}^3x' \int \frac{\mathrm{d}^3k}{(2\pi)^3} \frac{\mathrm{d}^3k'}{(2\pi)^3} \frac{\mathrm{d}^3k''}{(2\pi)^3} \tilde{\psi}_i(\vec{k}) \tilde{\psi}_j^*(\vec{k}') P(k'') \mathrm{e}^{\mathrm{i}[\vec{k}+\vec{k}''] \cdot \vec{x} - \mathrm{i}[\vec{k}'+\vec{k}''] \cdot \vec{x}'} \\ &= \int \frac{\mathrm{d}^3k}{(2\pi)^3} P(k) \tilde{\psi}_i(\vec{k}) \tilde{\psi}_j^*(\vec{k}). \end{aligned} \tag{11.53}$$

第二个等式积分了 $\vec{x}$ 和 $\vec{x}'$ 后得到了三维狄拉克 δ 函数, 并用它对 $\vec{k}'$ 和 $\vec{k}$ 积分. 把窗函数定义为积分的角度部分是非常方便的

$$W_{ij}(k) \equiv \int \frac{\mathrm{d}\Omega_k}{4\pi} \tilde{\psi}_i(\vec{k}) \tilde{\psi}_j^*(\vec{k}), \tag{11.54}$$

所以,

$$(C_S)_{ij} = \int_0^\infty \frac{\mathrm{d}k}{k} \left[\frac{k^3 P(k)}{2\pi^2} \right] W_{ij}(k). \tag{11.55}$$

请注意, 星系巡天的窗函数与 CMB 实验的窗函数具有相同的形式. 在这两种情况下, 它是权重函数 (B, 或者 ψ) 傅里叶变换的平方的角平均. 此外, 你也应该认出 (11.55) 式方括号中的量为 $\Delta^2(k)$, 即每 $\ln(k)$ 对方差的贡献. 让我们举一些星系巡天窗函数的例子.

有限体积巡天是观测距离我们半径为 R 的区域中的所有星系的巡天. 如果我们用傅里叶像素化 ((11.30) 式), 那么权重函数的傅里叶变化为

$$\tilde{\psi}_i(\vec{k}) = \int_{|\vec{x}|<R} \frac{\mathrm{d}^3x}{V} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\vec{k} \cdot \vec{x}} \mathrm{e}^{\mathrm{i}\vec{k}_i \cdot \vec{x}}. \tag{11.56}$$

我们之后会对这个积分进行处理, 求平方然后对所有角度作平均来得到 (11.54) 式的对角窗函数. 不过, 首先让我们定性地考虑期望得到的结果. (11.56) 式是以 $\vec{k} - \vec{k}_i$ 为函数的巡天体积的傅里叶变换. 巡天体积是以 R 为半径的球体. 一般来说, 当函数被限制在 $x < R$ 的区域内, 那么傅里叶变换就被限制在 $k < 1/R$. 然后只有当 $|\vec{k} - \vec{k}_i|$ 小于 $1/R$ 时,$\tilde{\psi}$ 不等于零. 因此窗函数会在 $k = k_i$ 时达到峰值, 且宽度为 $1/R$ 量级.

更定量的说,(11.56) 式中的积分为

$$\begin{aligned}\tilde{\psi}_i(\vec{k}) &= \frac{4\pi}{V|\vec{k}-\vec{k}_i|}\int_0^R \mathrm{d}x\ x\ \ \sin(|\vec{k}-\vec{k}_i|x) \\ &= \frac{4\pi}{V(|\vec{k}-\vec{k}_i|)^3}[-|\vec{k}-\vec{k}_i|R\cos(|\vec{k}-\vec{k}_i|R)+\sin(|\vec{k}-\vec{k}_i|R)]. \end{aligned} \tag{11.57}$$

对角窗函数是对其求平方后的角平均. 定义 $y \equiv |\vec{k}-\vec{k}_i|R$, 这个角平均值为

$$\begin{aligned}W_{ii}(k) &= \frac{(4\pi R^3)^2}{V^2}\int_{-1}^{1}\frac{\mathrm{d}\mu}{2}\int_0^{2\pi}\frac{\mathrm{d}\phi}{2\pi}\frac{(\sin y - y\cos y)^2}{y^6} \\ &= \frac{8\pi^2 R^6}{V^2}\int_{-1}^{1}\frac{\mathrm{d}\mu}{y^6}(\sin y - y\cos y)^2 \end{aligned} \tag{11.58}$$

其中 μ 是 $\vec{k}$ 和 $\vec{k}_i$ 之间的夹角的余弦值. 巡天体积 $V = 4\pi R^3/3$, 积分 y 来代替对 μ 求积分, 得到

$$W_{ii}(k) = \frac{9}{2kk_iR^2}\int_{|k-k_i|R}^{(k+k_i)R}\frac{\mathrm{d}y}{y}j_1^2(y) \tag{11.59}$$

图 11.5 中给出了不同 k_iR 值的窗函数. 请注意波长远远小于巡天尺度 $k_iR \gg 1$ 的模式确实有窗函数在 $k = k_i$ 处有尖锐的峰, 并且宽度为 $1/R$ 量级. 然而, 最大的波长模式, 得到了所有尺度的贡献 (如图 11.5 所示 $k_iR = 3$ 的曲线). 不出意外的, 巡天在测量这么大尺度的功率谱时表现不佳.

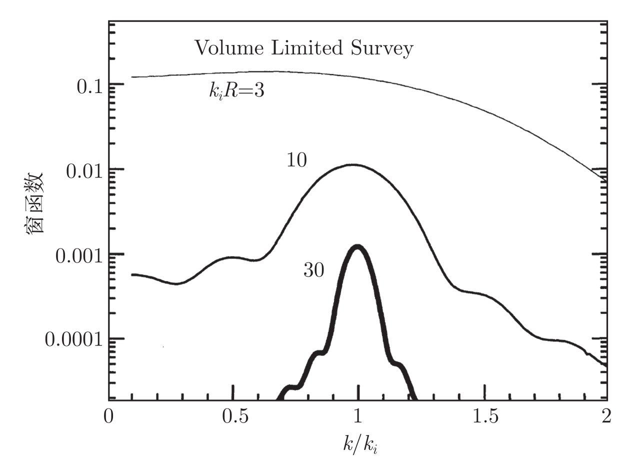


图 11.5 有限体积巡天的窗函数. 窄窗函数能够在感兴趣的波数上确定更精确的功率谱. 波长具与巡天大小可比的模式有更广的窗函数 (如这里的 $k_iR = 3$)

窗函数的高度也很重要, 因为它决定了信号协方差矩阵的振幅. 当考虑波长 k_i^{-1}

远小于 R 的模式时, 读者将在练习 7 中证明

$$(C_S)_{ii} \simeq \frac{P(k_i)}{V}. \tag{11.60}$$

将它与 (11.32) 式给出的噪声矩阵相应的元素做比较是有益的. 对于对角元素, 只要 $\vec{x}$ 在巡天体积中, 被积函数中的 $|\psi_i|^2$ 等于 $1/V^2$. 因此

$$(C_N)_{ii} = \frac{1}{\bar{n}V}, \tag{11.61}$$

等于巡天中星系总数的倒数. 因此, 信号和噪声的协方差矩阵的对角元素的比是

$$\frac{(C_S)_{ii}}{(C_N)_{ii}} \simeq P(k_i)\bar{n}. \tag{11.62}$$

回想 (11.27) 式, 我们确定这个比值为宇宙方差与泊松噪声的比值. 粗略估计 $\bar{n} \sim 1\ h^3\text{Mpc}^{-3}$, 所以只要功率谱大于 $1h^{-3}\text{Mpc}^3$, 那么宇宙的方差占主导地位. 回顾图 7.11, 我们看到在大尺度上, 总满足这种情况. 在小尺度上, 最终功率谱下降到 $1h^{-3}\text{Mpc}^3$ 以下, 标准 CDM 模型的线性功率谱在 $k \sim 10h\text{Mpc}^{-1}$, 因此, 在非常小的尺度上, 泊松噪声变得很重要.

笔形波束巡天. 现在考虑深场但是范围比较窄的巡天, 形状如同铅笔一般 (图 11.6). 这种情况下的权重函数的傅里叶变换为

$$\tilde{\psi}_i(\vec{k}) = \int \frac{\mathrm{d}^3x}{\pi R^2 L} \mathrm{e}^{\mathrm{i}(\vec{k}_i - \vec{k})\cdot\vec{x}} \Theta(z + L/2)\Theta(L/2 - z)\Theta(R^2 - x^2 - y^2), \tag{11.63}$$

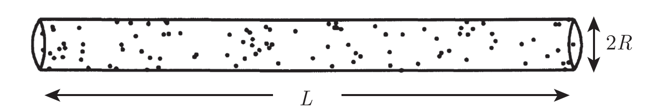


图 11.6　深度为 L 的笔形波束巡天,L 远大于 R. 此时 z 轴为沿 L 的方向

其中 Θ 是阶梯函数, 如果它的参数为正, 则 Θ 等于 1, 否则 Θ 等于零. 最简单的求此积分的方法是采用柱坐标系, 其中 $x^2 + y^2 = r^2$. 如果我们定义 $\vec{q} \equiv \vec{k}_i - \vec{k}$, 那么

$$\tilde{\psi}_i(\vec{k}) = \frac{1}{\pi R^2 L} \int_{-L/2}^{L/2} \mathrm{d}z \mathrm{e}^{\mathrm{i}q_z z} \int_0^R \mathrm{d}r r \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\theta \mathrm{e}^{\mathrm{i}q_r r\cos\theta}. \tag{11.64}$$

可以利用 (C.17) 式求对于角度的积分, 利用 (C.15) 式求对 z 的积分, 从而得到

$$\tilde{\psi}_i(\vec{k}) = \frac{2}{R^2} j_0(q_z L/2) \int_0^R \mathrm{d}r r J_0(q_r r). \tag{11.65}$$

最后对于 r 的积分是 $RJ_1(q_r R)/q_r$, 利用 (C.22) 式得到. 因此, 加权函数的傅里叶变换是

$$\tilde{\psi}_i(\vec{k}) = \frac{2}{(q_r R)} j_0(q_z L/2) J_1(q_r R). \tag{11.66}$$

通过 (11.66) 式我们可以看出加权函数的傅里叶变换是各向异性的. 事实上, 在导出这个贝塞尔函数之前, 我们就预计这个傅里叶变换得到一个 q_z 方向窄, 横向截面宽的盘子状函数. 从我们直觉上看,$1/R$ 区域内的函数的傅里叶变换应在半径为 R 的区域内. 实际上, 在 z 方向, 一旦 q_z 大于 $2/L$, $j_0(q_zL/2)$ 就减小. 这同样适用于 $j_1(q_rR)$: 当 $q_r > 1/R$ 时它就会变小. 伴随这些贝塞尔函数振铃的事实, 表现为高帽函数的傅里叶变换对于大波数振荡 (如练习 6).

为了得到笔状巡天的窗函数, 我们需要对 (11.66) 式的所有 $\hat{k}$ 方向求平均. 不同的 $\vec{k}_i$ 值的平均有所不同. 举一个具体的例子, 选择 $\vec{k}_i$ 的方向为 z. 只有当 $\vec{q} \equiv \vec{k}_i - \vec{k}$ 中 z 分量小于 L^{-1} 并且横向分量小于 R^{-1} 时, 平均值才会产生到贡献. 由于在这个例子中, $\vec{k}_i$ 的横向分量是零, 所以只有在它们的横向分量小于 R^{-1} 时, 很多 $\vec{k}$ 才会起到作用. 因此, 我们预期窗函数会从许多波数中获得贡献, 而不会在 $|\vec{k}_i|$ 峰左右大幅波动. 类似的说法也同样适用于其他方向的 $\hat{k}_i$. 图 11.7 展示的是笔状巡天的窗函数. 正如预期的那样, 这比对称的、有限体积的巡天更宽: 给定的 k_i 尺度会从更小的尺度 $k > k_i$ 中得到贡献.

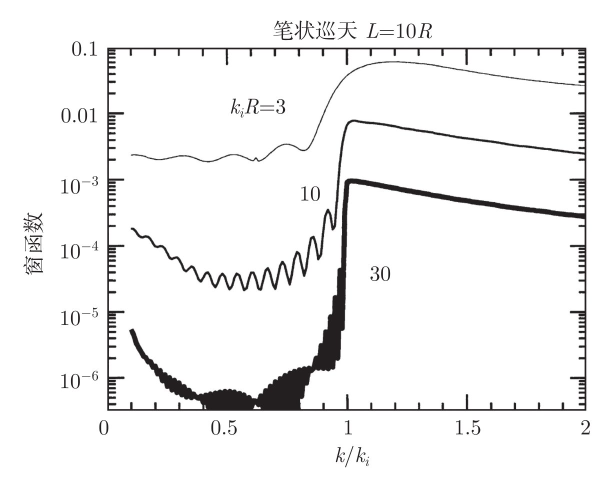


图 11.7　笔状巡天的窗函数, 长度是宽度的 10 倍. 这些窗函数是 $\vec{k}_i$ 指向 z 轴方向的巡天

11.2.4　总结

我们已经确定了 CMB 实验的信号协方差, 测量给定像素下的温度, 对于星系来说, 测量给定像素下的密度扰动. 不出意外地, 协方差矩阵和功率谱之间的基本关系在两种情况下是相似的. 这种联系是由实验/观测确定的窗函数提供的. 有趣的是, 我们在第 9 和第 10 章已经遇到过自然窗函数. 9.1 节中的角相关函数是简单的 $2D$ 星系分布测量的信号协方差矩阵. 回想 (9.13) 式可以看出, 这也是三维功率谱的积分与窗函数卷积 (当时我们把它称为核函数). 对于本动速度 ((9.29) 式) 和

剪切场来说也一样, 可以用弱引力透镜 ((10.32) 式) 测量. 在所有这些情况下, 窗函数部分取决于观测策略 (例如, 有多深), 还取决于测量本身的内在本质. 例如, 二维的星系分布本质上是三维分布的投影. 所以把 CMB 各向异性实验和 $3D$ 星系巡天作为功率谱的原始测量是很诱人的. 然而分析人员很难被吸引. 他们认识到, 从数学上来说, 不同的测量都可以用同样的方式分析. 因此, 似然函数可用于几乎所有的宇宙学观测, 这是一个非常有用的工具.

这种方法也很简单. 如果没有现代宇宙学数据的大小, 我们也可以完成. 至少在高斯的情况下 (CMB 甚至大尺度星系巡天), 该似然函数由 (11.20) 式给出. 数据点是简单的像素化的温度或高密度, 协方差矩阵是噪声和信号的协方差的总和. 噪声协方差矩阵的估计通常是从数据本身, 而信号的协方差矩阵的计算方法是通过卷积理论 (即 $C_l's$ 或功率谱) 和窗函数. 原则上, 可以在参数空间计算许多点的似然函数, 找到其最大值 (这组成了最佳拟合参数), 例如 95% 的体积在等高线图之内的区域. 这个等高线图就是这组参数的 95% 的置信区间. 之前几十年间的许多实验, 特别是 CMB 实验, 分析了这种“蛮力”算法. 然而随着时代的变化, 这种“蛮力”方法已经变得越来越不切实际了.

11.3 似然函数的估计

为了展示对计算似然函数新技术的需要, 让我们考虑一个具体的例子: Boomerang 各向异性实验的数据 (Netterfield et al., 2001). 此数据来自天空中的 57000 个像素. 理论和噪声协方差矩阵都是非对角的, 两个都是 57000×57000 的矩阵. 用现在的计算机转化这些矩阵虽然慢, 但是还是可行的①. 如果我们只需要转化一次, 这是可以接受的. 但是, 我们需要在参数空间从多个角度估计似然函数, 以发现它的最大限度和其将落入的区域, 比如说最大值的 5%. 如果参数空间是一维的, 那这将几乎是不可控制的. 一维体系将丢失包含在图中的大部分信息. 实际上, 数据在不同尺度上对于功率是敏感的. 因此, 参数空间 — 不同尺度的功率的振幅 — 是多维的, 这里的 “多” 是 20 阶. 似然函数原则上在不同维度应该被计算 10 次, 总共是 10^{20} 次计算. 因为每个转化都需要几个小时, 因此这种方法是不可取的. 所有的估计都是针对 Boomerang 实验. WMAP 将有 10 倍于此的像素, 并且对更大范围尺度敏感. 普朗克的精度更高, 因此, 我们需要新的技术和更快捷的方式, 来估计似然函数, 找到其最大值和它的宽度.

11.3.1 Karhunen-Loeve 技术

第一种技术是很多年前发明的, 在过去几年间由很多人进行了改进来处理 CMB

①注意这里提出的问题假设我们处理的是 57000 个像素图像. 制图是数据处理中最困难的计算部分!

数据 (Bunn,1995;Bond,1995) 和星系巡天的数据 (Vogeley and Szalay,1996). 这是一个能加快似然函数计算的方法. 基本思想很简单: 任何实验, 无论多么好, 都会有很多模式是无用的, 从根本上受到噪声污染的.[①] 如果一些模式明显有很大噪声, 我们就不使用这些模式计算似然函数, 这样可以大大减少计算量. 如果只有 10% 的模式携带有用的信息 — 这基本上是现在许多实验中的大致数据 — 那么数据将会减少 10 倍. 现在的协方差矩阵就是 $(N/10)\times(N/10)$, 转换 (尺度是 N^3) 将加速 1000 倍. 这是一个又简单又好的想法, 唯一的问题是找到有用的模式.

如果信号和噪声协方差矩阵是对角的, 那么就可以简单地确定哪些模式有很高的信噪比. 对角元素 $C_S > C_N$ 的像素具有大于 1 的信噪比; 其他的就是低信号模式. 困难在于要在更为真实的场景下识别低信号模式, 这种更为真实的场景的协方差矩阵不是对角的. 这正是 Karhunen-Loeve 的价值所在. 为了说明该技术, 让我们先写出它的形式, 然后举一个简单明了的例子.

我们假设有 N_p 个数据点 Δ_i. 每个数据点都假设是信号 S_i 和噪声 n_i 的和. 每个数据点都被认为是不相关的 (噪声对信号一无所知, 反之亦然), 因此完整的协方差矩阵是

$$\langle\Delta_i\Delta_j\rangle \equiv C_{ij} = C_{S,ij} + C_{N,ij}. \tag{11.67}$$

Karhunen-Loeve 方法的优势在于它不是用 Δ_i 及其协方差矩阵 C 计算似然函数, 而是用转动数据

$$\Delta_i' \equiv R_{ij}\Delta_j \tag{11.68}$$

这里的 R 是实矩阵, 与 Δ' 相关的协方差矩阵为

$$\begin{aligned} C_{ij}' &= \langle(R\Delta)_i(R\Delta)_j\rangle \\ &= R_{ii'}R_{jj'}C_{i'j'}. \end{aligned} \tag{11.69}$$

用矩阵符号简单地表示为

$$C' = RCR^{\mathrm{T}} \tag{11.70}$$

这里 R^{T} 是 R 的转置.

Karhunen-Loeve 方法包括三个这样的转换：

(1) R_1: 对角化 C_N;

(2) R_2: 令 $C_N' = I$;

(3) R_3: 对角化 C_S'.

第一步总是可行的, 因为 C_N 是实对称矩阵. 一旦 C_N 对角化之后, 那么执行步骤 2 是很容易的: 选择对角矩阵 R_2, 其对角元素等于 1 除以第一步得到的对角

①此处的模式定义为数据点的线性组合.

矩阵的对角元素的平方根. 最后, 由于 C_S 也是实对称矩阵, 所以第三步是简单的. 让我们估算新理论和噪声协方差矩阵. 理论矩阵是

$$C_S' = R_3 R_2 R_1 C_S R_1^{\mathrm{T}} R_2 R_3^{\mathrm{T}}. \tag{11.71}$$

注意, 因为 R_2 是对角的, 它等于它的转置. 矩阵 C_S' 是对角矩阵. 现在考虑 C_N'. 步骤 2 后, 它仅仅是单位矩阵. 所以我们只要需要考虑第三步的影响. 事实上, 由于 R_3 是单位的, 它没有影响 ($R_3 I R_3^{\mathrm{T}} = I$). 因此 C_N' 仍等于单位矩阵. 这有着深远的含义. 它意味着 (对角矩阵)C_S' 的元素是对这些模式的信噪比平方的测量! 数据点是

$$\Delta_i' = (R_3 R_2 R_1)_{ij} \Delta_j \tag{11.72}$$

那么我们有对角协方差矩阵

$$\langle \Delta_i' \Delta_j' \rangle = \begin{cases} 1 + C_{S,ii}' & i = j \\ 0 & i \neq j \end{cases}. \tag{11.73}$$

这些模式可以根据它们的信噪比排序. 保留 C_S' 值较大的模式; 那些 C_S' 明显小于 1 的可以忽略.

让我们通过一个简单的例子看看 Karhunen-Loeve 是怎样选出最高信噪比的模式的. 这个例子是简单的两个像素实验, 对角噪声为

$$C_N = \begin{pmatrix} \sigma_n^2 & 0 \\ 0 & \sigma_n^2 \end{pmatrix}. \tag{11.74}$$

两个像素之间的信号协方差矩阵的确有相关性, 因此

$$C_S = \sigma_s^2 \begin{pmatrix} 1 & \varepsilon \\ \varepsilon & 1 \end{pmatrix}. \tag{11.75}$$

其中 σ_s 是像素中预期的均方根,$-1 < \varepsilon < 1$ 测量了信号在两个像素之间是如何相关的. 因为 C_N' 是对角矩阵, 因此, Karhunen-Loeve 方法的第 1、2 步是特别简单的. 因此,

$$R_1 = I; \quad R_2 = \frac{1}{\sigma_n} I. \tag{11.76}$$

为了完成步骤 3, 我们需要将下式对角化:

$$R_2 R_1 C_S R_1^{\mathrm{T}} R_2 = \frac{\sigma_s^2}{\sigma_n^2} \begin{pmatrix} 1 & \varepsilon \\ \varepsilon & 1 \end{pmatrix}. \tag{11.77}$$

为了将 (11.77) 式的矩阵对角化, 我们必须解决

$$\frac{\sigma_s^2}{\sigma_n^2}\begin{pmatrix}\cos\theta & \sin\theta\\ -\sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & \varepsilon\\ \varepsilon & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\cos\theta & -\sin\theta\\ \sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}C'_{S,11} & 0\\ 0 & C'_{S,22}\end{pmatrix}, \tag{11.78}$$

θ 为旋转角度. 求左侧的乘法后得到

$$\frac{\sigma_s^2}{\sigma_n^2}\begin{pmatrix}1+\varepsilon\sin(2\theta) & \varepsilon\cos(2\theta)\\ \varepsilon\cos(2\theta) & 1-\varepsilon\sin(2\theta)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}C'_{S,11} & 0\\ 0 & C'_{S,22}\end{pmatrix}. \tag{11.79}$$

等式两边的非对角元素如果相等, 则公式成立, 所以新的理论协方差矩阵是

$$C'_S=\frac{\sigma_s^2}{\sigma_n^2}\begin{pmatrix}1+\varepsilon & 0\\ 0 & 1-\varepsilon\end{pmatrix}. \tag{11.80}$$

将理论矩阵对角化的旋转矩阵则是 (11.78) 式中的第一个矩阵, 并且 $\theta=\pi/4$, 因此

$$R_3=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1 & 1\\ -1 & 1\end{pmatrix}. \tag{11.81}$$

新的模式是 $\Delta'=R_3R_2\Delta$, 它们分别是

$$\begin{aligned}\Delta'_1&=\frac{(\Delta_1+\Delta_2)}{\sqrt{2}\sigma_n},\\ \Delta'_2&=\frac{(-\Delta_1+\Delta_2)}{\sqrt{2}\sigma_n}.\end{aligned} \tag{11.82}$$

如果我们考虑 $\varepsilon=0$ 和 $\varepsilon=+l$ 的两个特殊模式, 则新的模式 ((11.82) 式) 和它们的协方差矩阵 ((11.80) 式) 很容易理解. 如果 $\varepsilon=0$, 那么两种模式具有相同的信噪比,σ_s/σ_n. 如果预期信号较强, 这两种模式都携带信息; 反之, 噪声将淹没信号. 在任意一种情况下, 每个模式的和、差是同样 (不) 重要的. 如果 $\varepsilon=+1$ 理论预言每个像素中的信号相同, 在这种情况下, 不同的模式 (Δ'_2) 是毫无价值的, 因为只有噪声对其有贡献. 我们从随着 $\varepsilon\to 1,(C'_S)_{22}$ 趋于零可以看出, 它的信噪比是零. 其他模式 — 两个像素的总和 — 信噪比为 $\sqrt{2}\sigma_s/\sigma_n$, 因为两种测量将噪声降低了 $\sqrt{2}$. 这当然会在全部 2×2 的似然分析中浮现出来. 但是, 两种模式都用的分析在时间上是一种浪费, Karhunen-Loeve 方法避免了这种浪费.

Bunn(1995) 和 Bond(1995) 分别独立用 Karhunen-Loeve 方法分析了 COBE 数据. 图 11.8 展示了几个这样的模式：很明显大尺度模式具有最高的信噪比, 这表明 COBE 对大角度各向异性敏感. 最小的信噪比模式是小尺度模式,COBE 没有那么高的分辨率对其进行测量.

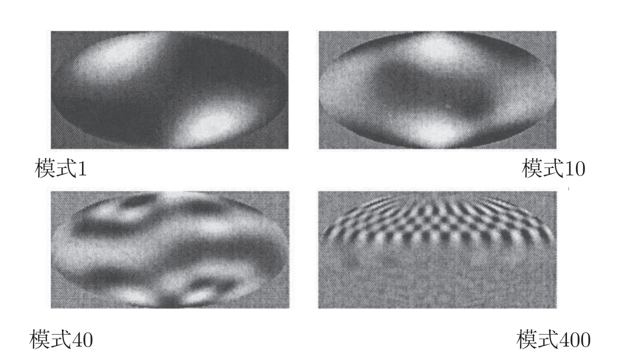


图 11.8 COBE 各向异性实验的四种模式 (来自 Bunn,1995), 根据信噪比排列. 信噪比最大的模式 (左上) 主要对四极矩非常敏感, 而信号最小的模式 (右下) 对尺度更小的结构敏感

Vogeley 和 Szalay(1996) 首先在星系巡天中应用 Karhunen-Loeve 方法. 在这种情况下, Karhunen-Loeve 方法有另一个有用的功能. 回忆 11.2.3 节, 在大尺度上, 信号协方差矩阵大于泊松噪声, 在小尺度上则相反. 当我们给模式排序时, 大尺度模式的信噪比最大. 因此, Karhunen-Loeve 方法将优先挑选出大尺度模式. 这是非常实用的, 因为我们往往对消除小尺度模式更感兴趣, 因为小尺度模式在数据分析中受非线性和偏差的影响最大. Karhunen-Loeve 方法自动对此进行了处理! 一个例子在图 11.9 中给出. 例如, 第一个本征模式大致称量那些只基于它们到我们的距离的基础上的像素. 它本质上是在我们近处的和中等距离处的星系数目之差. 第二个模式是偶极子的不同成分, 左右两边星系的数目之差. 较低权重的模式逐次地取星系分布的高阶矩.

Karhunen-Loeve 方法也存在一些缺点. 首先, 我们在开始时为了识别哪些模式是没用的, 需要假设一个 C_S. 尽管这可能看起来像是一个大问题 — 被某个 C_S 选出的模式可能对于其他 C_S 很重要 — 然而有人对此进行了研究证明我们不会遇到这种情况. 他们声称对重要模式的选择对于输入量 C_S 是相对不敏感的. 另一个缺点是计算. 一旦选定了重要模式, 就需要在参数空间的许多点重新计算 C'_S. 在大多数的参数空间它不能对角化 (只有特殊点能对角化,C_S 为初始输入谱). 因此在参数空间的每一个点, 我们仍然需要转换非对角协方差矩阵. 这个缺点当然可以由因为更小的矩阵而计算快得多来部分地抵消. 然而在很多情况下, 这不足以做出完整的可管理的计算. 我们仍然必须找到其他方法来减少计算量.

在转向其他方法之前, 我再介绍一下 Karhunen-Loeve 方法的另一个用途. 这是一个非常有用的一致性检查. 我们最好通过一个具体实例来说明. Python 实验 (Coble et al.,1999) 在当时测量了一个很大区域的各向异性, 它的信噪比非常低. 原则上, 这是一个好主意, 因为大面积减少了宇宙方差. 然而, 在实践中, 它面临了严峻的挑战, 因为我们难以检查数据的一致性. 我们想把这些数据分成几个子集, 确

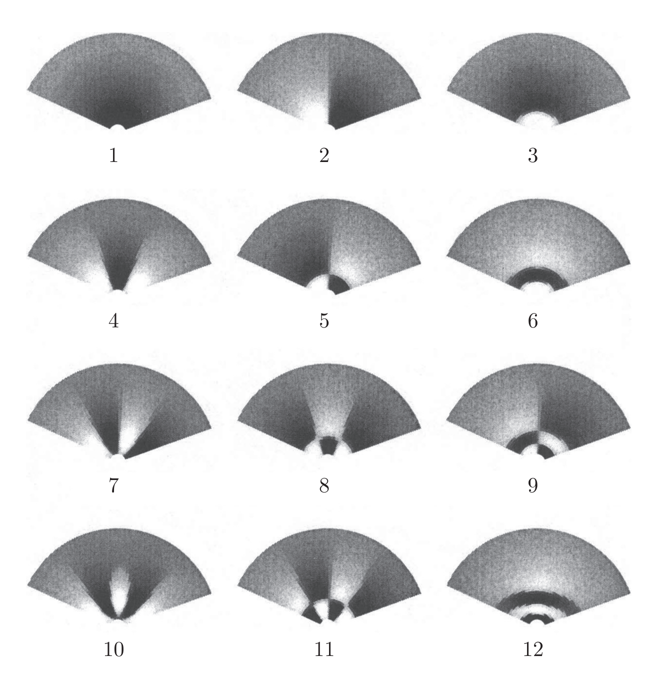


图 11.9 CFA2 巡天中 12 个信噪比最高的模式 (来自 Vogeley and Szalay,1996), 模式选出了星系分布的大尺度结构. 在每种情况中, 我们都位于底部, 顶部区域离我们最远

保每个子集得到相同的信号. 对于 Python 实验来说, 这是非常困难的, 因为噪声主导了每个子集. 检验一致性的方法之一是 Karhunen-Loeve 方法. 在此基础上, 每个数据点 d_i' 应该来自高斯分布, 且方差等于 $1 + C'_{S,ii}$. $d_i'/(1 + C'_{S,ii})^{1/2}$ 的直方图应该是高斯的. 图 11.10 用初步的噪声矩阵画出了该直方图, 包含 650 个测量值, 其中大约有 70 个数值因为各种原因设置为零, 因此可以忽略中间 $d = 0$ 处的峰. 如果剩下的 580 个数据点分布为高斯分布, 那么我们预期约有 (0.3%) 的数据点的绝对值大于 3, 并且没有绝对值大于 4 的数据点. 事实上, 图 11.10 显示有九个模式超出零 4σ. 用这个噪声模型的分布绝对不可能是高斯分布.

这个分析启发使 Python 团队开始质疑他们建造的噪声协方差模型 (相邻的点比他们认为的更具相关性). 重新用新的噪声矩阵作分析得到的结果见图 11.11. 这种测试数据的技术已经被应用到许多其他场合, 经常被用来识别麻烦的迹象.

11.3.2 最优二次估计量

加速计算似然函数的一个简单方法是采用寻根算法. 我们要得到似然函数的最大值, 也就是

$$\left.\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda}\right|_{\lambda=\bar{\lambda}} = 0. \tag{11.83}$$

为简单起见, 假设似然函数只依赖于一个参数 λ(我们将在之后进行一般化),$\bar{\lambda}$ 是似然函数取最大值时的值.

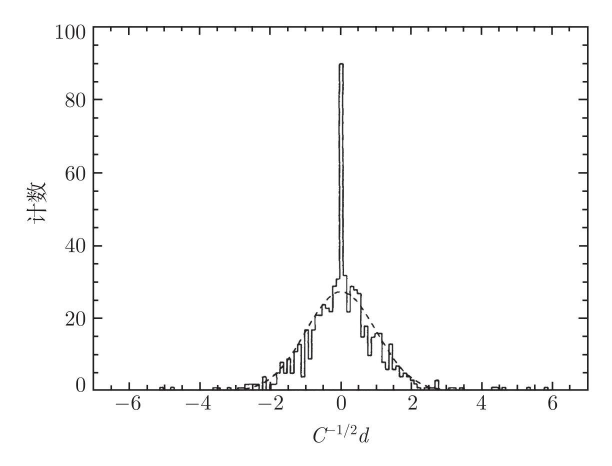


图 11.10　应用初步的噪声矩阵得到的 Python 各向异性测量的一个调制模式的数据直方图. 这些数据处在 Karhunen-Loeve 的协方差矩阵是对角的基上, 因此 $C^{-1/2}d$ 应该为方差等于 1 的高斯分布. 中间的峰值应该被忽略, 因为有 70 个模式被设置为零, 最佳高斯拟合由实线表示. 计数低于最佳高斯拟合的中心区域, 但是在尾部高于最佳高斯拟合的中心区域

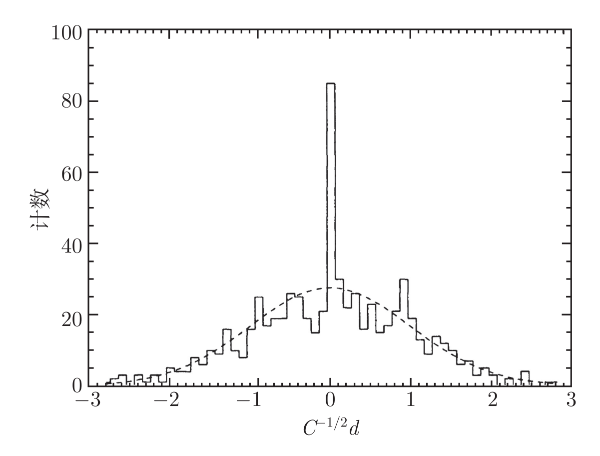


图 11.11　和图 11.10 相同, 但是这次应用改进过的噪声矩阵; 注意, 没有绝对值大于 $3C^{1/2}$ 的数据点. 这些数据点与高斯分布一致

找到实根的有效方法之一是考虑似然函数在某些点 $\lambda = \lambda^{(0)}$ 的导数. 在 $\lambda^{(0)}$ 附近对该导数作泰勒展开, 得到

$$\mathcal{L}_{,\lambda}(\bar{\lambda}) = \mathcal{L}_{,\lambda}(\lambda^{(0)}) + \mathcal{L}_{,\lambda\lambda}(\lambda^{(0)})(\bar{\lambda} - \lambda^{(0)}) + \cdots \tag{11.84}$$

其中, 用下角标来表示偏微分的定义如下所示

$$\mathcal{L}_{,\lambda} \equiv \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda}; \quad \mathcal{L}_{,\lambda\lambda} \equiv \frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial \lambda \partial \lambda}. \tag{11.85}$$

因为 $\mathcal{L}$ 在 $\bar{\lambda}$ 处取得最大值, 那么此时它的导数为零；因此 (11.84) 式右边也为零. 令它为零可以得到 $\bar{\lambda}$ 的一个简单表达式

$$\bar{\lambda} \simeq \lambda^{(0)} - \frac{\mathcal{L}_{,\lambda}(\lambda^{(0)})}{\mathcal{L}_{,\lambda\lambda}(\lambda^{(0)})}. \tag{11.86}$$

这里 $\simeq$ 符号表明我们忽略了 (11.84) 式泰勒展开的高阶项.

(11.86) 式的解假设似然函数是参数 λ 的二次函数. 事实上, 这是不可能的: 即使是在最简单的情况下, 似然函数也不可能是一个二次函数. 例如, 当远离它的最大值时, $\mathcal{L}$ 通常会呈指数减小. 因此更好的近似是高斯函数, 此时 $\ln(\mathcal{L})$ 是 λ 的二次函数. 我们可以重复上面的推导, 因为 $\mathcal{L}$ 取得最大值处 $\ln(\mathcal{L})$ 也取得最大值. 此时对 λ 的估计量为

$$\hat{\lambda} = \lambda^{(0)} - \frac{(\ln \mathcal{L})_{,\lambda}(\lambda^{(0)})}{(\ln \mathcal{L})_{,\lambda\lambda}(\lambda^{(0)})}. \tag{11.87}$$

图 11.12 说明这个算法的第一次迭代, 称为牛顿–拉夫逊算法.

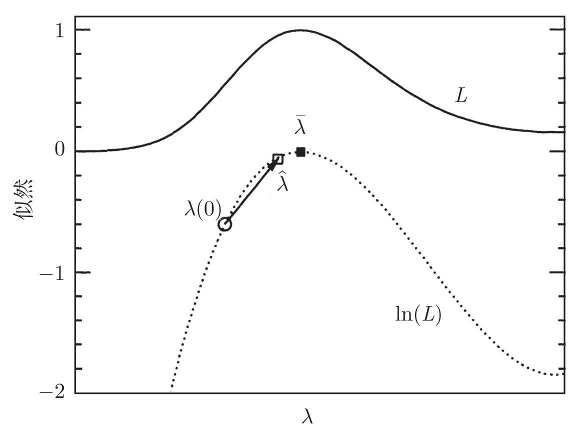


图 11.12 一个似然函数及其导数的例子. 寻根算法从 $\lambda^{(0)}$ 点开始 (圆圈) 移动到 $\hat{\lambda}$(方框), 此时已经相当接近似然函数真正的最大值. 牛顿–拉夫逊算法通过估算实验点 $\lambda^{(0)}$ 处 $\ln(\lambda)$ 的第一和第二阶导数得到. 如果用到了 L 的导数, 这个方法会不起作用, 因为 L 在远离 $\bar{\lambda}$ 时甚至不会近似为二次形式

为了得到 λ 的最优拟合, 我们需要计算 (11.87) 式中的导数. 在 CMB 实验中,$\mathcal{L}$ 明确由 (11.20) 式给出. 因此, 我们需要求 (11.20) 式对数的微分

$$(\ln \mathcal{L})_{,\lambda} = \frac{\partial}{\partial \lambda}\left[-\frac{1}{2}\ln(\det C) - \frac{1}{2}\Delta C^{-1}\Delta\right]. \tag{11.88}$$

这里的协方差矩阵 C 取决于理论参数 λ, 我们可以利用恒等式 $\ln \det(C) = \mathrm{Tr} \ln(C)$ 和 $C^{-1}_{,\lambda} = -C^{-1}C_{,\lambda}C^{-1}$ 来得到

$$(\ln \mathcal{L})_{,\lambda} = \frac{1}{2}\Delta C^{-1}C_{,\lambda}C^{-1}\Delta - \frac{1}{2}\mathrm{Tr}[C^{-1}C_{,\lambda}]. \tag{11.89}$$

在这里,$C^{-1}C_{,\lambda}$ 的迹是 $(C^{-1}_{ij})\partial C_{ji}/\partial\lambda$ 对 i, j 的和. 要得到二阶导数需要更多的相同的步骤. 我们发现

$$(\ln \mathcal{L})_{,\lambda\lambda} = -\Delta C^{-1}C_{,\lambda}C^{-1}C_{,\lambda}C^{-1}\Delta + \frac{1}{2}\mathrm{Tr}[C^{-1}C_{,\lambda}C^{-1}C_{,\lambda}] + \frac{1}{2}(\Delta C^{-1}C_{,\lambda\lambda}C^{-1}\Delta - \mathrm{Tr}[C^{-1}C_{,\lambda\lambda}]). \tag{11.90}$$

(11.90) 式给出了 $\ln\mathcal{L}$ 关于参数 λ 的二阶导数. 根据定义, 这是似然函数的曲率的负值:

$$\mathcal{F} \equiv -\frac{\partial^2 \ln \mathcal{L}}{\partial \lambda^2}. \tag{11.91}$$

曲率在估算似然函数最大值时是至关重要的, 因为它测量了似然函数偏离最大值的速度 (因为一阶导数为零). 如果曲率很小, 那么似然函数的变化就比较缓慢, 数据的限制没有那么强: 参数的不确定性将是巨大的. 相反, 大曲率会得到较小的不确定性.①

我们可以用 (11.89) 式和 (11.90) 式的比得到似然函数最大值的估计. 这不是一般的做法. 相反, 在二阶导数中设 $\Delta\Delta \rightarrow \langle\Delta\Delta\rangle = C$. 这样做之后,(11.90) 式最后一行为零, 得到

$$\hat{\lambda} = \lambda^{(0)} + F^{-1}_{\lambda\lambda}\frac{\Delta C^{-1}C_{,\lambda}C^{-1}\Delta - \mathrm{Tr}[C^{-1}C_{,\lambda}]}{2} \tag{11.92}$$

其中,F 定义为

$$\begin{aligned} F_{\lambda\lambda} &\equiv \langle\mathcal{F}\rangle \\ &= \frac{1}{2}\mathrm{Tr}[C_{,\lambda}C^{-1}C_{,\lambda}C^{-1}]. \end{aligned} \tag{11.93}$$

也就是说,F 是曲率在信号和噪声多次实现的平均, 信号和噪声这种情况下都认为来自高斯分布. 这里 C 及其导数在输入点给定它们的值 $C(\lambda^{(0)})$.

关于 (11.92) 式, 似然函数取最大值的 λ 值的估计量, 存在几个重要的特性. 与本节的标题相符合, 是一个二次估计量: 它的一般形式是 $A\Delta^2 + B$. 这是一般形式, 唯一的困难部分是确定系数, 找到寻根算法的最优算法. 根据牛顿–拉夫

①曲率矩阵与参数的不确定性的对应关系通常可以更定量地分析. 参见 Numerical Recipes(Press et al., 1992) 第 15 章的详细讨论. 然而在许多情况中, 曲率矩阵的逆对参数的误差矩阵有着很好的近似. 例如, 在我们现在考虑的一个参数的情况中, 参数 $\lambda(1-\sigma)$ 的 68%的置信区间等于曲率矩阵平方根的逆.

逊算法,(11.92) 式最好使用迭代. 假设一个输入谱, 用它来确定一个新的输入参数 ((11.92) 式中的 $\hat{\lambda}$), 然后用新的输入参数来得到一个新的最佳拟合值, 重复这个过程直至收敛. 在实践中, 分析人员发现只需要几次迭代就可以收敛. 尽管如此, 我们必须谨慎对待二次估计量. 因为我们得到的很可能是参数空间中的局部极大值. 最后, 上述讨论假设只有一个自由参量, 然而 (11.92) 式和 (11.93) 式很容易进行一般化来对应更一般的情况, 此时有许多的可变参数. 如果我们考虑很多参数 $\lambda_\alpha = \lambda_1$, λ_2, $\cdots$, 那么每个参数的二次估计量为

$$\hat{\lambda}_\alpha = \lambda_\alpha^{(0)} + F_{\alpha\beta}^{-1} \frac{\Delta C^{-1} C_{,\beta} C^{-1} \Delta - \mathrm{Tr}[C^{-1} C_{,\beta}]}{2}, \tag{11.94}$$

其中费舍尔矩阵的定义为

$$\begin{aligned} F_{\alpha\beta} &\equiv \left\langle -\frac{\partial^2 (\ln \mathcal{L})}{\partial \lambda_\alpha \partial \lambda_\beta} \right\rangle \\ &= \frac{1}{2} \mathrm{Tr}[C_{,\alpha} C^{-1} C_{,\beta} C^{-1}]. \end{aligned} \tag{11.95}$$

抛开得到 (11.94) 式的细节不谈, 我们现在得到的结果是非常出色的. 我们现在有希望得到使似然函数取得最大值的参数值而不用盲目地在整个参数空间进行计算. 少量的矩阵运算就可以确定最佳拟合值. 这是一个巨大的优势, 我们甚至不用考虑其他算法.

我们还需要找到一种方法来计算参数的误差. 如果我们计算了所有的 $\mathcal{L}$, 那么我们可以很容易地识别参数空间置信区间在 95%的区域. 用二次估计量怎样识别这个区间呢? 要回答这个问题, 我们先忘掉以上的推导, 仅仅关注 (11.94) 式, 它是参数真实最佳拟合值的一个估计量. 如果我们这么考虑, 而不是把它看作寻根算法的结果, 那么我们就可以研究它的分布了. 因为信号和噪声的分布都是已知的 (假设它们都是高斯分布, 协方差矩阵分别为 C_S 和 C_N), 我们可以计算出估计量的期望值和方差.

首先, 我们考虑它的期望值:

$$\langle \hat{\lambda}_\alpha \rangle = \lambda_\alpha^{(0)} + F_{\alpha\beta}^{-1} \frac{\langle \Delta C^{-1} C_{,\beta} C^{-1} \Delta \rangle - \mathrm{Tr}[C^{-1} C_{,\beta}]}{2}. \tag{11.96}$$

这里的协方差矩阵, 它的导数和费舍尔矩阵都在试验点 $\lambda_\alpha = \lambda_\alpha^{(0)}$ 处赋值. 另一方面期望值 $\langle \Delta\Delta \rangle$ 等于真正的协方差矩阵,$C(\bar{\lambda}_\alpha)$. 在 $\lambda_{\alpha_{(0)}}$ 展开 $C(\bar{\lambda}_\alpha)$ 得到

$$C(\bar{\lambda}_\alpha) \simeq C + C_{,\alpha'} (\bar{\lambda}_{a'} - \lambda_{\alpha'}^{(0)}). \tag{11.97}$$

因此期望值的二次估计量是

$$\langle \hat{\lambda}_\alpha \rangle = \lambda_\alpha^{(0)} + \frac{1}{2} F_{\alpha\beta}^{-1} \{ \mathrm{Tr}[C^{-1} C_{,\beta} C^{-1} C]$$

$$+ \mathrm{Tr}[C^{-1}C_{,\beta}C^{-1}C_{,\alpha'}](\bar{\lambda}_{\alpha'} - \lambda_{\alpha'}^{(0)}) - \mathrm{Tr}[C^{-1}C_{,\beta}]\}. \tag{11.98}$$

括号中的第一项与第三项抵消, 剩下的迹是两倍的费舍尔矩阵, 所以再乘以 F^{-1} 得到,

$$\langle\hat{\lambda}_\alpha\rangle = \bar{\lambda}_\alpha. \tag{11.99}$$

所以二次估计量是无偏的: 无论开始的参数设为什么, $\hat{\lambda}_\alpha$ 的期望值等于真值 $\hbar\lambda_\alpha$.

我们还要考虑估计量的方差,

$$\langle(\hat{\lambda}_\alpha - \bar{\lambda}_\alpha)(\hat{\lambda}_\beta - \bar{\lambda}_\beta)\rangle = (F^{-1})_{\alpha\beta}. \tag{11.100}$$

同样, 如果我们得到了似然函数最大值并且数据点分布确实是高斯的, 那么这个式子成立, 其中的证明我将留作练习. 假设这些条件得到满足, 那么预期参数误差等于 F^{-1} 对角元素的平方根. 这是一个神奇的极限, 因为存在一个定理, Crumer-Rao 不等式, 即没有方法可以测量误差小于它的参数 (例如, Kendall and Stuart,1969). 这是很有道理的, 因为完整的似然函数计算的误差不太可能小于似然函数的宽度. 这个宽度反过来由曲率决定, 费舍尔矩阵仅是总体均值的曲率.(11.100) 式告诉我们, 平均而言,(11.94) 式的二次估计量将达到这个最优极限.

对于参数空间的任意一点, 我们可以计算出相关的费舍尔矩阵. 因此确定由二次估计量带来的参数误差棒的一个简单的方法是在参数空间计算那一点的费舍尔矩阵. Bond, Jaffe 和 Knox (1998) 证明了这个方法是非常有效的, 即它与更完备的对似然函数等高线图的示踪一致.

(11.100) 式也很有用, 因为它明显地从 (11.95) 式得到, 因此任意参数的预期误差可以不通过数据得到. 在 11.4.3 节我们开始确定未来实验中参数测量精度时也有所帮助.

我们已经推导出了二次估计量, 推导的方法可能会让你误以为它仅限于 CMB. 也就是说, 我们的推导假设似然函数是高斯的, 适用于 CMB 而不适用于星系巡天. 即使没有假设高斯的似然函数,(11.94) 式的二次估计量也可以应用于星系巡天. 同任何二次估计量一样, 它有均值和方差. 我们已经看到, 高斯分布有最小的方差. 在大尺度上, 星系的分布是高斯的, 因此它是非常相关的. 即使在小尺度上, 方差中存在非线性因素, 二次估计量得到的结果可以同其他传统估计量相媲美.

11.4 Fisher 矩阵

费舍尔矩阵在描述一个给定的实验限制参数的能力时起着关键作用, 尽管很难通过 (11.95) 式的定义得到更多的观点. 不过幸运的是, 对于全天覆盖的情况, 费舍

尔矩阵可以解析计算. 这种分析解可以—通过合理性论证—扩展到更现实的覆盖部分天区的情况. 接下来将介绍这种算法对 CMB 和星系巡天的应用. 费舍尔矩阵最流行的应用是作为预测的工具. 我们期待给定的实验 (甚至是假设实验) 能够对宇宙学参数给出多好的限制? 费舍尔矩阵非常适合完成这个任务, 我们将从接下来的实验中看到令人吃惊的期望结果.

11.4.1 CMB

(11.95) 式的迹是对矩阵 $[C_{,\alpha}C^{-1}C_{,\beta}C^{-1}]_{ij}$ 的对角元素求和后得到的, 其中 i, j 代表图中各个像素的下标. 在计算费舍尔矩阵之前要决定两件事. 首先, 我们应该用什么像素化方案. 其次, 我们对哪个参数 λ_α 感兴趣. 对于全天 CMB 实验来说, 我们选择 C_l 作为我们的参数. 也就是说, 我们把每个独立的 C_l 作为自由参数, 然后希望得到这个实验能够对它进行多好的限制. 为了避免混淆, 我们用 λ_l 代替 C_l. 这回答了第二个问题. 对于 CMB 来说, 解决第一个问题—如何像素化—最好的方法是利用 a_{lm}. 也就是说, 相较于利用像素化的温度 $\Theta(\hat{n})$, 我们利用 a_{lm}

$$a_{lm} = \int \mathrm{d}\Omega Y_{lm}^*(\hat{n})\Theta(\hat{n}) \tag{11.101}$$

作为数据值. 每个像素的下标由 l 和 m 表示, 所以给定的行 (或列) 在协方差矩阵对应于一个固定值 l 或 m. 我们从四极矩开始,

$$C = \begin{pmatrix} C_{l=2,m=-2;l'=2,m'=-2} & C_{2,-2;2,-1} & \cdots & C_{2,-2;2.2} & C_{2,-2;3,-3} & \cdots \\ C_{2,-1;2,-2} & C_{2,-1;2,-1} & \cdots & C_{2,-1;2,2} & C_{2,-1;3,-3} & \cdots \\ & & & \vdots & & \\ C_{3,-3;2,-2} & C_{3,-3;2,-1} & \cdots & C_{3,-3;2,2} & C_{3,-3;3,-3} & \cdots \\ & & & \vdots & & \end{pmatrix}. \tag{11.102}$$

像往常一样, 协方差矩阵是信号和噪声协方差矩阵的和. 从 (8.63) 式得到, 如果窗函数是一致的, 信号协方差矩阵为 $\delta_{ll'}\delta_{mm'}\lambda_l$ (为了避免混淆我们现在用 λ_l 代替 C_l). 我们假设实验测量各向异性的波束尺寸为 σ, 那么信号协方差矩阵须乘以 $\mathrm{e}^{-l^2\sigma^2}$. 噪声协方差矩阵则需要一点小技巧. 在练习 10 中, 读者需要证明在不相关、统一的情况下, 噪声为 $\delta_{ll'}\delta_{mm'}w^{-1}$. 这里权重 w 定义为

$$w = [(\Delta\Omega)\sigma_n^2]^{-1} \tag{11.103}$$

$\Delta\Omega$ 是实空间像素弧度大小,σ_n 是每个像素的噪声. 把这两个放在一起, 我们得到

$$C_{lm;l'm'} = \delta_{ll'}\delta_{mm'}[\lambda_l \mathrm{e}^{-l^2\sigma^2} + w^{-1}]. \tag{11.104}$$

有了这些简单的假设, 我们可以得到协方差矩阵 C 的逆, 并得到对参数 λ_l 的导数. 协方差矩阵的逆为

$$(C^{-1})_{lm;l'm'} = \delta_{ll'}\delta_{mm'}[\lambda_l \mathrm{e}^{-l^2\sigma^2} + w^{-1}]^{-1}, \tag{11.105}$$

而协方差矩阵对参数 λ_α 的导数是

$$C_{lm;l'm',\alpha} = \delta_{ll'}\delta_{mm'}\delta_{l\alpha}\mathrm{e}^{-l^2\sigma^2}. \tag{11.106}$$

我们现在可以构建费舍尔矩阵; 唯一困难的任务是弄清上下标. 非常明显

$$\begin{aligned} F_{\alpha\alpha'} &= \frac{1}{2}C_{lm;l'm',\alpha}C^{-1}_{l'm';l''m''}C_{l''m'';l'''m''',\alpha'}C^{-1}_{l'''m''';lm} \\ &= \frac{1}{2}(\delta_{ll'}\delta_{mm'}\delta_{l\alpha}\mathrm{e}^{-l^2\sigma^2})\left(\frac{\delta_{l'l''}\delta_{m'm''}}{\lambda_{l'}\mathrm{e}^{-l'^2\sigma^2}+w^{-1}}\right)(\delta_{l''l'''}\delta_{m''m'''}\delta_{l''\alpha'}\mathrm{e}^{-l''^2\sigma^2}) \\ &\quad \times \left(\frac{\delta_{l'''l}\delta_{m'''m}}{\lambda_l \mathrm{e}^{-l^2\sigma^2}+w^{-1}}\right). \end{aligned} \tag{11.107}$$

对 $ll'l''l'''mm'm''m'''$ 隐含求和. 首先考虑下标为 m, m', m'', m''' 的克氏符. 对这四个指标中 m 以外的三个量求和后压缩为

$$\sum_{m'm''m'''}\delta_{mm'}\delta_{m'm''}\delta_{m''m'''}\delta_{m'''m} = \delta_{mm}, \tag{11.108}$$

那么对所有的 m 求和后得到因子 $2l+1$. 剩下的对 l 求和得到 $\delta_{ll'}$. 因此对于全天的限制,CMB 实验的费舍尔矩阵为

$$F_{ll'} = \frac{2l+1}{2}\delta_{ll'}\mathrm{e}^{-2l^2\sigma^2}[C_l\mathrm{e}^{-l^2\sigma^2}+w^{-1}]^{-2}, \tag{11.109}$$

此处用回 C_l.

对于全天巡天,C_l 的费舍尔矩阵是对角的. 相邻的 C_l 之间没有相关性. 全天巡天的给定 C_l 的误差预期可以从 (11.109) 式看出. 它等于 $\sqrt{F^{-1}}$, 因此

$$\sqrt{\frac{2}{(2l+1)}}[C_l + w^{-1}\mathrm{e}^{l^2\sigma^2}]. \tag{11.110}$$

与 (11.26) 式预期的一样, 误差来源与以下两个方面:(1) 宇宙的方差, 与信号 C_l 本身成正比;(2) 来自大气或仪器的噪声, 包涵在权重 w 和由波束宽度 σ 决定的平滑中. 分母中的因子 $2l+1$ 也可以追溯到 (11.26) 式; 它是用来估算给定 C_l 的独立样本的数量.

没有实验能够覆盖整个天空, 因为我们银河系平面的宇宙微波背景辐射不能被观测到. 即便是 WMPA 和普朗克这两个专门为了绘制 CMB 各向异性的卫星覆盖

的范围也只涵盖一小部分天区 $f_{\rm sky} < 1$. 回忆 (11.26) 式分母中的因子 $2l+1$, 我们可以猜测这个因子必须乘以 $f_{\rm sky}$.

$$\delta C_l = \sqrt{\frac{2}{(2l+1)f_{\rm sky}}}[C_l + w^{-1}{\rm e}^{l^2\sigma^2}]. \tag{11.111}$$

这一公式可以计算任一给定实验的误差. 决定实验误差 C_l 的三个特征量分别是天空覆盖率、权重和波束宽度.

11.4.2　星系巡天

全天 CMB 实验与体积有限的星系巡天相似, 只是它的体积任意大. 这个极限应用到波长 k^{-1} 远小于巡天特征尺度的所有模式. 我们已经计算了在此极限下信号和噪声的协方差矩阵 (11.60) 式和 (11.61) 式, 所以傅里叶像素的协方差矩阵是

$$C_{\vec{k}_i,\vec{k}_j} = \frac{\delta_{ij}}{V}\left(P(k_i) + \frac{1}{\bar{n}}\right). \tag{11.112}$$

为了计算费舍尔矩阵, 我们需要它的逆和对参数的导数. 求逆很简单

$$C^{-1}_{\vec{k}_i,\vec{k}_j} = \frac{\delta_{ij}V}{P(k_i) + \frac{1}{\bar{n}}}. \tag{11.113}$$

对于参数, 我们将选择窄 k- 隔段振幅的功率谱, 每个的宽度为 Δk. $k_\alpha < k < k_\alpha + \Delta k$ 的功率用 P_α 表示. 协方差矩阵对 P_α 求导得到

$$C_{ij,\alpha} \equiv \frac{\partial C_{\vec{k}_i,\vec{k}_j}}{\partial P_\alpha} = \frac{\delta_{ij}}{V}d_{i\alpha} \tag{11.114}$$

其中

$$d_{i\alpha} \equiv \begin{cases} 1 & k_\alpha < |\vec{k}_i| < k_\alpha + \Delta k \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}. \tag{11.115}$$

现在费舍尔矩阵变为

$$\begin{aligned} F_{\alpha\alpha'} =& \frac{1}{2}C_{ij,\alpha}C^{-1}_{jj'}C_{j'i',\alpha'}C^{-1}_{i'i} \\ =& \frac{1}{2}\delta_{ij}d_{i\alpha}\frac{\delta_{jj'}}{P(k_j) + \frac{1}{\bar{n}}}\delta_{j'i'}d_{i'\alpha'}\frac{\delta_{i'i}}{P(k_i) + \frac{1}{\bar{n}}}. \end{aligned} \tag{11.116}$$

对下标 j, j, i' 求和后得到

$$F_{\alpha\alpha'} = \frac{1}{2}\frac{\sum_i d_{i\alpha}d_{i\alpha'}}{\left(P_\alpha + \frac{1}{\bar{n}}\right)\left(P_{\alpha'} + \frac{1}{\bar{n}}\right)}. \tag{11.117}$$

只要 k- 隔段不重叠, k_i 就不能在两个不同的并中, 所以 $d_{i\alpha}d_{i\alpha'}$ 的乘积要求 $\alpha=\alpha'$. 那么求和就是对所有球壳中半径为 k_α, 宽度为 Δk 的矢量 $\vec{k}_i$ 求和. 求和结果为 $4\pi k_\alpha^2\Delta kV$. 因此, 费舍尔矩阵是对角的, 各个元素为

$$F_{\alpha\alpha'}=\delta_{\alpha\alpha'}\frac{4\pi k_\alpha^2\Delta kV}{2\left(P_\alpha+\dfrac{1}{\bar{n}}\right)^2} \tag{11.118}$$

在此极限下功率谱的误差是平方根的倒数,

$$\delta P_\alpha=\sqrt{\frac{2}{4\pi k_\alpha^2\Delta kV}}\left(P_{\alpha+}\frac{1}{\bar{n}}\right) \tag{11.119}$$

这个误差与 C_l 的误差形式相同. 前面因子的分母给出了给定估计中模式的数量; 第一项是宇宙方差; 最后一项是泊松噪声.

11.4.3　预测

接下来的宇宙学实验有希望确定目前的许多未知的宇宙学参量. 如何预测未来实验测得的宇宙学参量的预期的不确定性呢? 答案是非常简单的. 以 CMB 实验为例, 从以下几点着手:

- 假设一组 C_l 来描述真实的宇宙;
- 假设给定实验的 C_l 的不确定度 δC_l 由 (11.111) 式给出;
- 我们要预测宇宙学参数 $\{\lambda_\alpha\}$ 的误差.

宇宙中观测到的 C_l 会很接近真实的 C_l; 事实上, 如果

$$\chi^2(\{\lambda_\alpha\})=\sum_l\frac{(C_l(\{\lambda_\alpha\})-C_l^{\rm obs})^2}{(\delta C_l)^2}, \tag{11.120}$$

那么 χ^2 会在 $\lambda_\alpha=\bar{\lambda}_\alpha$ 这一点达到最小值, 也就是实际的参数值. 当然, 我们现在还不知道这些值是什么, 但即使没有这些信息, 我们可以知道随着 λ_α 远离 $\bar{\lambda}_\alpha$, $\chi^2(\{\lambda_\alpha\})$ 的变化快慢. 如果它增加迅速, 那么参数的误差较小; 如果作为一个离开 Xc. 如果 χ^2 的变化很小, 那么参数的误差就会比较大.

为了将其量化, 我们可以在最小值点 $\bar{\lambda}_\alpha$ 对 χ^2 作展开. 我们首先考虑一个参数的情况; 对于更多参数的一般化情况是很直接的. 在一个参数的情况下有

$$\chi^2(\lambda)=\chi^2(\bar{\lambda})+\mathcal{F}(\lambda-\bar{\lambda})^2. \tag{11.121}$$

因为 χ^2 在 $\bar{\lambda}$ 为最小值, 因此 (11.121) 式中的线性项为零. 二次项的系数为

$$\tag{11.122}$$

这里的曲率 $\mathcal{F}$ 衡量了 χ^2 从最小值变化的快慢,λ 的误差为 $1/\sqrt{\mathcal{F}}$. 所以为了得到参数的误差, 需要我们做的是计算 $\mathcal{F}$. 注意只有似然函数等于 $\mathrm{e}^{-\chi^2/2}$ 时, $\mathcal{F}$ 是似然函数的曲率, 也就是说,C_l 的误差是高斯分布. 事实上, 它们不是, 所以 (11.122) 式给出的 $\mathcal{F}$ 不是真正的曲率 $-\partial^2 \ln \mathcal{L}/\partial\lambda^2$. 尽管如此, 这个分布非常接近高斯分布, 误差估计应当是相当准确的.

χ^2 的二阶导数包含两项:

$$\mathcal{F} = \sum_l \frac{1}{(\delta C_l)^2}\left[\left(\frac{\partial C_l}{\partial\lambda}\right)^2 + (C_l - C_l^{\mathrm{obs}})\frac{\partial^2 C_l}{\partial\lambda^2}\right]. \tag{11.123}$$

第二项对 l 求和通常忽略. 这是因为 $C_l - C_l^{\mathrm{obs}}$ 有时是正的有时是负的可以相互抵消, 所以第一项起主导作用. 因此, 通常取

$$F \to \sum_l \frac{1}{(\delta C_l)^2}\frac{\partial C_l}{\partial\lambda}\frac{\partial C_l}{\partial\lambda}. \tag{11.124}$$

同样, 你可以把这当成对整个分布取平均后第二项为零, 从而用费舍尔矩阵取代了曲率矩阵 (再一次提醒读者因为 C_l 的分布不是高斯分布, 因此这不是真正的曲率矩阵或费舍尔矩阵). 对于多个参数的情况有

$$F_{\alpha\beta} = \sum_l \frac{1}{(\delta C_l)^2}\frac{\partial C_l}{\partial\lambda_\alpha}\frac{\partial C_l}{\partial\lambda_\beta}. \tag{11.125}$$

为了预测参数有多精确, 我们仅仅需要知道实验的参数 (来确定 δC_l) 和 C_l 在它们 (假设的) 真值附近的导数.

假设高斯分布, 一个参数的 1σ 不确定度符合 $1/\sqrt{F}$. 如果不止一个参数可以变化又如何呢? 图 11.13 为我们展示了二维情况. 如果参数 λ_2 是已知的, 那么 λ_1 的误差仍然是 $1/\sqrt{F_{11}}$. 然而, 如果 λ_2 是可以变化的, 此时 λ_1 的误差为 $\sqrt{(F_{-1})_{11}}$. 对此进行证明是很有意义的, 我们假设两个参数的联合概率为

$$P(\lambda_1, \lambda_2) \propto \exp\left\{-\frac{1}{2}\lambda_i F_{ij}\lambda_j\right\} \tag{11.126}$$

为了简便起见, 假设该分布在 $\lambda_i = 0$ 处达到峰值.λ_2 可以变化等价于对 λ_2 所有可能值的概率密度分布积分, 得到

$$\begin{aligned} P(\lambda_1) &= \int \mathrm{d}\lambda_2 P(\lambda_1, \lambda_2) \\ &\propto \exp\left\{-\frac{\lambda_1^2}{2}\left(\frac{F_{11}F_{22} - F_{12}F_{21}}{F_{22}}\right)\right\}, \end{aligned} \tag{11.127}$$

其中第二行来自 λ_2 的积分. 指数项中的 $[F_{11}F_{22} - F_{12}F_{21}]/F_{22}$ 等于 $1/F_{11}^{-1}$, 所以 1σ 误差由 $\sqrt{(F^{-1})_{11}}$ 给定.

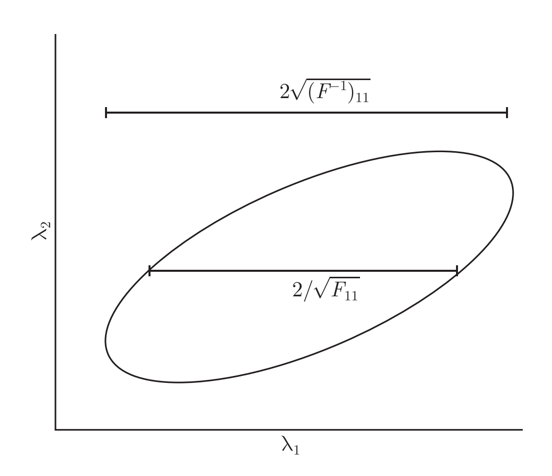


图 11.13　二维参数空间的误差椭圆. 如果没有 λ_2 的先验信息, 那么 λ_1 的误差为 $\sqrt{(F^{-1})_{11}}$. 如果 λ_2 取固定值, 那么 λ_1 的误差 $F_{11}^{-1/2}$ 较小

图 11.14 展示了 WMAP 和普朗克给出的两个决定原初谱的参量的期望不确定度. 注意我令"真实"模型的谱指数为 $n = 0.9$, 且张量标量比为 $r = 0.7$. 不同的基准模型往往会导致非常不同的误差棒. 图 11.14 中的椭圆是积分掉其他三个宇宙学参量 (归一化因子, 重子密度和哈勃常数) 后的结果. 要做到这一点, 需要求五维费舍尔矩阵的逆, 仅考虑 2×2 部分的逆. 这 2×2 部分决定了图中的椭圆.

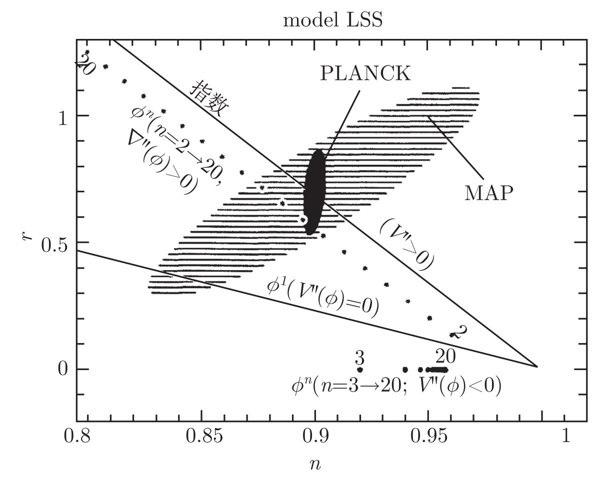


图 11.14　WMAP 和普朗克卫星给出的 95%的暴胀参数 n 和 r 的不确定度 (Dodelson, Kinney and Kolb, 1997). 另外三个参数 (归一化因子,Ω_B 和 h) 已经被积分掉了. 每一个暴胀模型都在这幅图中给出了一个独特的预测范围, 如图中所示

图 11.14 还画出了各种通胀模型的预言. 该图有力地论证了接下来的 CMB 实验数据, 我们将能够区分不同的暴胀模型. 这是一个非凡的发现: 利用 CMB 数据,

我们将了解 10^{15}GeV 乃至更高的物理学. 如果更多的参数可以变化, 那么其中任何一个参数的误差自然会变大. 然而, 这可以通过其他的观测予以抵消, 尤其是对大尺度结构的观测. 表 11.1 给出了 WMAP, 普朗克和斯隆数字巡天 (Eisenstein, Hu and Tegmark, 1999) 的一系列参数的边缘化误差. 这里的误差包括了 WMAP 和普朗克实验中极化的测量.

表 11.1 不同实验的边缘误差

	Map	Planck	Map+SDSS	Planck+SDSS
h	0.22	0.13	0.029	0.022
Ω_m	0.24	0.14	0.036	0.027
Ω_Λ	0.19	0.11	0.042	0.024
$\ln(\Omega_b h^2)$	0.060	0.010	0.050	0.010
m_ν(eV)	0.58	0.26	0.33	0.21
Y_P	0.020	0.013	0.020	0.013
n	0.048	0.008	0.040	0.008
r	0.18	0.012	0.16	0.012
τ	0.022	0.004	0.021	0.004

11.5 成图和反演

直到现在, 我们已经讨论了由一系列数据和噪声协方差矩阵 C_N 构成的像素集合而成的图像的分析方法. 这些数据如何成图呢? 如何从时间序列数据得到像素化的一组空间 Δ? 这个问题的大多数工作集中在 CMB 的温度图上, 所以我将用它作为一个例子. 我们将看到, 绘图本质上是一个反演问题, 所以这里讨论的方法适用于物理学和天文学中的广泛问题.

首先陈述一下问题. 实验得到了时间序列数据 d_t. 每个数字对应于天空中特定的一点. 数据是由信号加噪声组成的:

$$d_t = P_{ti} s_i + \eta_t, \tag{11.128}$$

下标 t 表示时间序列中的一个元素;i 代表空间像素;P 是指向矩阵;s 是实际的瞬时常数, 但是空间变化信号;η 是瞬时噪声. 指向矩阵编码了接收器指向方向的信息. 也就是说, 它将每个瞬时测试时间 t 与特定的像素 i 联系起来. 它是一个 $N_t \times N_p$ 的矩阵,N_t 是瞬时测量的数目,N_p 是空间像素的个数. 指向矩阵有一个特殊的形式: 每一行只有一个非零项等于 1, 代表天空中被观测到的像素. 然而每一列通常有许多非零项对应给定一点被观测的时间. 噪声 η 假设是高斯分布, 且协方差矩阵为 N. 有方法可以直接从数据得到 N, 但是为了简化讨论, 我们假设 N 是已知的.

从时间序列得到图像的最佳方法是什么? 定义 χ^2 为

$$\chi^2 \equiv \sum_{tt'ij}(d_t - P_{ti}s_i)N_{tt'}^{-1}(d_{t'} - P_{t'j}s_j), \tag{11.129}$$

求其对于信号 s 的最小值. 实际上, 如果噪声是高斯分布, 那么似然函数正比于 $\mathrm{e}^{-\chi^2/2}$, χ^2 的最小值等价于 $\mathcal{L}$ 的最小值. 对 s_i 求导得到

$$\frac{\partial\chi^2}{\partial s_i} = -2\sum_{tt'j}P_{ti}N_{tt'}^{-1}(d_{t'} - P_{t'js_j}). \tag{11.130}$$

令导数等于零

$$\sum_{tt'j}P_{ti}N_{tt'}^{-1}P_{t'j}s_j = \sum_{tt'j}P_{ti}N_{tt'}^{-1}d_{t'}. \tag{11.131}$$

左边与 s_i 相乘的项是一个 $N_t \times N_p$ 的矩阵

$$(C_N^{-1})_{ij} \equiv \sum_{tt'}P_{ti}N_{tt'}^{-1}P_{t'j}, \tag{11.132}$$

两边同时乘以 C_N 得到当 χ^2 取最小值时,s 等于

$$\Delta_i = C_{N,ij}P_{ti}N_{tt'}^{-1}d_{t'}. \tag{11.133}$$

矩阵符号中,

$$\Delta = C_N P^{\mathrm{T}} N^{-1} d, \tag{11.134}$$

其中 “T” 代表矩阵的转置. 噪声矩阵等于

$$C_N = (P^{\mathrm{T}}N^{-1}P)^{-1}, \tag{11.135}$$

上式可以通过取 $\langle\Delta\Delta\rangle$ 进行证明.

(11.134) 式的简单极限情况是时间序列噪声是对角且相等的 (这是不现实的). 这种情况下, C_N 中的元素为

$$C_{N,ij} \to N\left(\sum_t P_{it}^{\mathrm{T}}P_{tj}\right)^{-1} \tag{11.136}$$

此时 N 只是简单的一个数字, 时间序列噪声的对角元素. 回忆对于给定的 t,P_{ti} 仅对于一个像素 i 是非零的. 因此 $P_{ti}^{\mathrm{T}}P_{tj}$ 为零除非 $i = j$ 并且接收器在 t 时间指向像素 i; 此时称这个数为 π_i. 在噪声均匀不相关的情况下, 噪声协方差矩阵是对角的, 且元素为 N/π_i. 这是合理的: 随着给定像素多次抽样, 标准差下降到 $\pi_i^{-1/2}$. 图像现在变为

$$\Delta_i \to \frac{1}{\pi_i}\sum_t P_{it}^{\mathrm{T}}d_t. \tag{11.137}$$

也就是说, 我们对给定像素的所有数据点取平均 (正如 (11.8) 式).

图 11.15 展示了 (11.134) 式更实际的应用, 来自 1998 年 12 月 29 日发射的 Boomerang 气球实验 (Netterfield et al., 2001). 该天图覆盖了 7 弧分像素大约 700 平方度的区域. 因此,$N_p \simeq 50000$, 时间序列包含了 $2{\times}10^8$ 量级的数据点. 需要一些技巧避免直接对 P 和 N 求逆和乘法. 尽管如此, 对于 Boomerang 气球实验以及所有其他 CMB 实验来说, 它们的基础是 (11.134) 式.

绘制天图的原始数据不需要时间序列. 相反, 原始数据可以包含一系列的模块, 如两点之间的温度差. 从一组模块进行重建听起来与从时间序列进行重建是两个不同的问题. 在事实上, 它们在数学上是相同的: 数据 d 是信号和噪声的和. 信号可以看作是作用于底层温度场的矩阵. 这个矩阵没有像指向矩阵那样确切的形式 (即每行只有一个非零元素), 尽管如此它也是一个矩阵, 我们可以按照 (11.134) 式和 (11.135) 式对其进行操作. 这么做有一个巨大的优势. 最终, 数据的主要用途将在似然函数分析中进行参数估计. 正如我们所看到的, 必须构建出信号协方差矩阵才能进行这样的分析. 信号的协方差矩阵非常简单 —— 窗函数是 $P_l(\cos\theta_{ij})$, 而对模块调制数据是相当难获得的 (回忆 11.2 节).

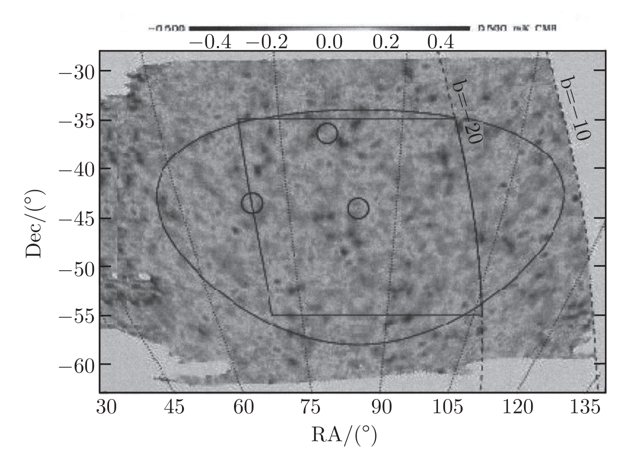


图 11.15 Boomerang(Netterfield et al., 2001) 观测到的 CMB 温度图. 热点和冷点的振幅有 500μK. 圆圈表示观测到的类星体射电辐射, 大椭圆区域勾勒出为了得到带通功率的数据, 矩形区域是早期的数据

(11.134) 式和相应的噪声矩阵 (11.135) 式比这更普遍. 它们适用于数据是信号和噪声之和的任何问题, 即适用于物理学和天文学的众多问题. 列举两个例子. 首先, 角相关函数是核函数加上噪声的三维功率谱. 读者可以应用 (11.134) 式得到三维功率谱, 只需要用核函数替换指向矩阵. 在下一节中, 我们将会看到另一个例子, 将宇宙微波背景的信号从有前景污染的数据中提取出来.

11.6 系 统 问 题

即使对许多数据样本进行平均后, 系统误差仍然会存在. 它是大多数宇宙学观测最担心的一点. 科学家通常采取多种预防措施来对付系统误差, 对原始数据进行广泛的一致性检查. 许多测试是常识和直觉的结果, 没什么正式说法. 在这里我想重点讲几个处理这些效应的系统方法.

11.6.1 前景

观测 CMB 各向异性的最大障碍之一就是前景, 即其他源也发出微波波段辐射. 前景的来源有很多, 包括任何可能出现在大爆炸之后遗留的辐射和我们之间的辐射. 有尘埃, 同步辐射, 自由–自由辐射或韧致辐射, 所有来自银河系的辐射 (延伸到远离银河系平面的区域). 也有银河系外的辐射源, 点源和星系团. 所有这些都可能污染 CMB 实验信号. 通过前景这个名字我们可以得到一些线索. 在科学中, 通常称可能的系统误差的来源为背景. 在 CMB 的研究中, 我们不能称它们为背景:CMB 本身就是背景辐射. 我们必须承认 CMB 的宇宙信号来自远比任何可能的污染源更远的地方, 我们必须面对 CMB 信号小于这些污染源的可能.

前景问题已经在过去的几年里被证明是可控的, 原因有许多 (我们的运气好在: 如果我们生活在银河系更深处, 那么前景的振幅会更大). 首先观测者成功找到了天空中最冷的部分, 并且只使用这些区域. 其次, 前景振幅已经被证明在一个相当宽的频率空间小于宇宙信号. 图 11.16 展示了几种前景辐射和宇宙微波背景的强度. 这几种的振幅在天空不同区域的强度有变化, 但在图 11.16 中给出的相对振幅是相当典型的. 在高频波段, 尘埃占主导地位, 在低频波段, 以同步和韧致辐射为主. 但是, 在范围从 30~200 GHz,CMB 各向异性的强度最大.

前景可控的最终原因同样可以从图 11.16 中看出. 前景的光谱形状各不相同, 也不同于宇宙微波背景各向异性辐射的黑体谱. 这使得我们可以通过探测不同波段的辐射之后从前景中提取出 CMB 信号. 作为科研工作者, 我们必须找到最优的方式来进行信号提取. 鉴于测量分布在几个不同的频率, 找到宇宙信号最优的算法是什么呢? 这个提取又有多大的效果呢?

首先我们定义一些符号. 我们不使用强度 (或亮度)B, 用亮温度或天线温度更加方便, 它的定义是

$$\begin{aligned} T_{\rm ant} &\equiv \frac{B}{2\nu^2} \\ &= 2\pi\nu f, \end{aligned} \tag{11.138}$$

它的量纲是开尔文 ($k_{\rm B}=\hbar=c=1$). 频率 ν 与我们在之前的章节用到的动量有关 $p=2\pi\nu$,f 是相空间密度.

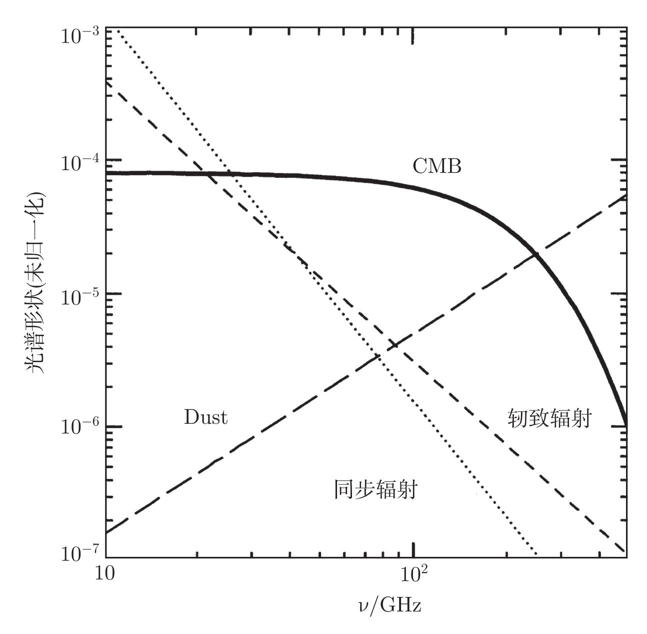


图 11.16 起主导作用的前景辐射的光谱形状和 CMB 各向异性黑体谱

对于 CMB 来说,f 由 (4.35) 式给定, 所以天线温度是

$$\frac{T_{\text{ant}}^{\text{cmb}}}{T} = \frac{x}{\mathrm{e}^x - 1} + \Theta \frac{x^2 \mathrm{e}^x}{(\mathrm{e}^x - 1)^2} \tag{11.139}$$

其中,

$$x \equiv \frac{p}{T} = \frac{2\pi\nu}{T}. \tag{11.140}$$

(11.139) 式中的第一项是单极矩, 我们对它不感兴趣. 第二项包含了 CMB 各向异性光谱形状的信息. 因此可以忽略第一项将其写作,

$$\frac{T_{\text{ant}}^{\text{cmb}}(\nu)}{T} = \Theta W^{\text{CMB}}(2\pi\nu/T) \tag{11.141}$$

其中 W^α 是不同组分的波形矢量. 对于 CMB 来说

$$W^{\text{CMB}} = \frac{x^2 \mathrm{e}^x}{(\mathrm{e}^x - 1)^2}. \tag{11.142}$$

所有的成分都可以写成这种方式: 振幅的乘积 (在这种 Θ 情况下), 它不依赖于频率和不携带有关振幅信息的波形矢量. 对于 CMB 这样的黑体分布, 振幅有一个名字: Θ 称为热力学温度. 注意,CMB 的波形向量在小频率极限下趋向于 1, 也就是瑞利–金斯 (Rayleigh-Jeans) 极限. 在高频波段, 它呈指数下降.

称 W 为波形矢量暗示了它包含许多成分. 这些成分是给定实验数据的不同的频率. 我们用下标 c 对不同的前景成分进行标记:

$$\vec{W}^{\alpha} = W_c^{\alpha} \quad c = 1, \cdots, N_{\mathrm{ch}}; \quad \alpha = 0, \cdots, N_{\mathrm{foregrounds}}. \tag{11.143}$$

这里 CMB 的相关指数为 $\alpha = 0$. 因此, 天空中给定实验给定像素 (我们只关注一个空间像素) 的数据的形式是一组所有不同的频率的天线温度,d_c. 我们的模型是 CMB, 前景和高斯噪声的和:

$$d_c = \sum_{\alpha=0}^{N_{\mathrm{forogrounds}}} W_c^{\alpha} \Theta^{\alpha} + n_c. \tag{11.144}$$

假设我们知道噪声 N 的协方差矩阵和所有的光谱形状①W_c^{α}. 问题是, 我们如何最好地确定宇宙微波背景辐射各向异性?

这个问题与 11.5 节的反演问题形式相同. 我们想要得到估计振幅 Θ^{α}, 可以立即写下 Θ^{α} 的最小方差估计量为

$$\Delta^{\alpha} = (C_N)_{\alpha\beta} W_c^{\beta} N_{cd}^{-1} d_d \tag{11.145}$$

协方差矩阵为

$$(C_N^{-1})_{\alpha\beta} = W_c^{\alpha} (N^{-1})_{cd} W_d^{\beta}. \tag{11.146}$$

我们来举一个简单的例子来说明这个公式.

考虑可以同时测量两个频率的实验, 它们同属于瑞利金斯范围. 那么 CMB 的波形矢量就有两个成分, 都等于 1:

$$\vec{W}^0 = (1, 1). \tag{11.147}$$

我们还假设两个不同频率的噪声是不相关且统一的, 对角元素为 σ_n^2. 首先考虑无前景的情况. 在这种情况下, 协方差矩阵是一个数,

$$\begin{aligned} WN^{-1}W &\to (1 \quad 1) \begin{pmatrix} 1/\sigma_n^2 & 0 \\ 0 & 1/\sigma_n^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \\ &= \frac{2}{\sigma_n^2}. \end{aligned} \tag{11.148}$$

平方根的倒数 $\sigma_n/\sqrt{2}$ 即为噪声. 两个波段将噪声减少了 $\sqrt{2}$ 倍 (如果是三个波段则减少 $\sqrt{3}$ 倍, 以此类推). 最小方差估计由 (11.145) 式给定,

$$\Delta \to \frac{\sigma_n^2}{2}(1, 1) \begin{pmatrix} 1/\sigma_n^2 & 0 \\ 0 & 1/\sigma_n^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \end{pmatrix}$$

①这个假设对于 CMB 来说成立, 对于全天形状接近常数的同步和韧致辐射来说近似成立. 该假设对于尘埃来说不成立. 许多研究团队对错误的波形假设对结果产生的影响以及放开波形的自由度进行了研究.

$$= \frac{d_1 + d_2}{2}. \tag{11.149}$$

我们仅对两个数据点取平均.

现在假设要考虑一种前景, 如同步辐射, 它的波形矢量为

$$\vec{W}^1 = (1, 1/2) \tag{11.150}$$

通常来说同步辐射的强度正比于 ν^{-1}(Rybicki and Lightman,1979), 所以它的天线温度随 ν^{-3} 下降. 因此波形矢量 (1, 1/2) 遵循如频率在 $\nu_1 = 20\text{GHz}$ 和 $\nu_2 = 25\text{GHz}$ 处的观测.

现在协方差矩阵 C_N 是一个 2×2 的矩阵, 那么 (11.146) 式变为

$$\begin{aligned} C_N^{-1} = W_c^\alpha (N^{-1})_{cd} W_d^\beta &= \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/\sigma_n^2 & 0 \\ 0 & 1/\sigma_n^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1/2 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{\sigma_n^2} \begin{pmatrix} 2 & 3/2 \\ 3/2 & 5/4 \end{pmatrix} \end{aligned} \tag{11.151}$$

到了这一步, 我们可以收集一些有关实验的重要信息. 回顾 11.4 节中的讨论,C_N^{-1} 对角元素的倒数是未边缘化的方差, 如果所有其他参数是已知的. 在这种情况下, 除了宇宙微波背景辐射的振幅外还有一个参数, 前景的振幅. 如果我们假设它是已知的, 那么 CMB 温度的误差为 (11.151) 式中的矩阵的 $_{00}$ 组分的平方根的倒数, $\sigma_n/\sqrt{2}$, 与之前的计算结果一致. 如果我们对于前景不甚了解, 为了得到误差, 取逆来得到协方差矩阵,

$$C_N = 4\sigma_n^2 \begin{pmatrix} 5/4 & -3/2 \\ -3/2 & 2 \end{pmatrix}. \tag{11.152}$$

$_{00}$ 组分给出了边缘化的方差为 $5\sigma_n^2$. 边缘化误差与未边缘化误差的比测量了未知前景对 CMB 温度探测的影响. 它被称为前景退化因子, 简写为 FDF. 在这个情况下,FDF 等于 $\sqrt{10}$.

在这个例子中, 我们可以确定 CMB 温度的最小方差估计量. 根据 (11.145) 式, 有

$$\begin{aligned} \Delta^0 &= 4\sigma_n^2(5/4, -3/2) \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/\sigma_n^2 & 0 \\ 0 & 1/\sigma_n^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \end{pmatrix} \\ &= -d_1 + 2d_2 \end{aligned} \tag{11.153}$$

这应该是意料之中的.CMB 温度的最优估计量对前景振幅完全不敏感. 因为, 如果前景确实有波形矢量 (1, 1/2), 前景的线性组合 $-d_1 + 2d_2$ 等于零.

现实中, 我们必须在许多不同的空间像素中找到最小方差估计.(11.145) 式在更普遍的情况下仍然是相同的: 只需要引入一个下标. 用 a_{lm} 表示通常比以角坐标为函数的温度更方便. 那么 a_{lm} 的最小方差估计量对于不同频率权重不同, 这取决于每个波段噪声随 l 的变化. 图 11.17 给出了一个例子, 基于五个频率的 WMAP 实验. 这个图展示了没有前景的情况下,a_{lm} 的最优估计量对五个不同波段的权重. 在低 l 处, 所有波段的噪声相似, 所以最优估计量是它们五个的平均. 波束大小依赖于频率, 在最低频率处波束最大. 因此, 在高 l 处, 最低的波段没有信号, 只有最高的频率可以使用. 事实上, 最小方差估计量随着 l 逐渐下降.

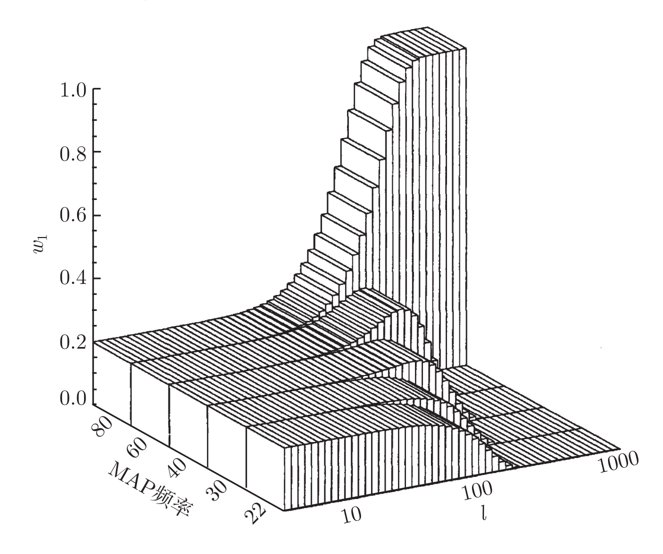


图 11.17　WMAP 实验中不存在前景的情况下的最小方差线性组合 (Tegmark et al., 2000). 低 l 处的噪声在所有波段相等, 所以最小方差估计权重相等. 在高 l 处, 频率最高的波段的噪声最低, 因此最优估计量仅使用这个波段

通常前景存在先验信息, 以不同前景成分的功率谱的估计的形式存在, 即它们的 C_l. 这个先验信息可以包含进最小方差估计, 例如练习 15. 图 11.18 展示了考虑前景的 WAMP 实验结果. 图 11.18 与图 11.17 的不同加权方式是很明显的, 特别是在低 l 处, 不再是对所有的波段取相同的权重, 而是用一组复杂的加权方式来反映前景污染.

注意到前景符合系统影响的定义. 如果在前面的例子中忽略同步辐射, 那么简单地估算 CMB 温度 $(d_1 + d_2)$ 就是错误的, 不论噪声多么小. 你可能会争辩这个错误可以对全天作平均来消掉, 因为前景冷点和热点的数量大体相同. 然而, 我们最感兴趣的功率谱会被污染: 它是 $C_l^{\rm CMB}$ 和 $C_l^{\rm synch}$ 的和.

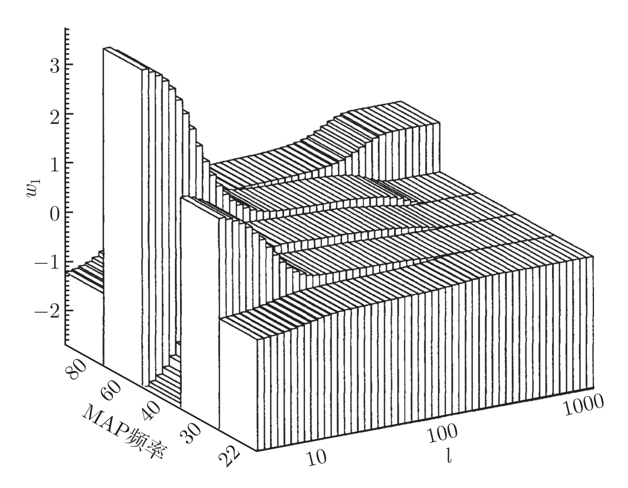


图 11.18 WMAP 实验中存在前景的情况下的最小方差线性组合 (Tegmark et al., 2000). 与图 11.17 对比, 特别是在低 l 处, 前景污染有更复杂的线性组合

11.6.2 模式去除

观测宇宙学中有一个常见的问题, 那就是一个特定的模式会被其他源所污染. 例如, 在非常接近银河系的空间区域, 前景问题尤为突出. 在星系巡天中, 这可能是尘埃区. 尘埃更容易吸收高频光子, 所以产生星际红化. 这导致了蓝光波段流量的减少, 从而影响巡天的结果. 再比如由于大气污染 CMB 实验对于几组像素的平均温度不敏感. 另外, 观测时 CCD 存在像素损坏也会污染观测数据. 这样的例子不胜枚举.

处理这些数据的方法之一是将它提取掉. 通常在星系巡天中是这么做的, 利用尘埃图 (目前最好的尘埃图来自 Schlegel,Finkbeiner and Davis, 1998) 进行红化修正.

另一种处理方法随着精确宇宙学成为现实而变得日益重要起来. 这项技术基于孪生观测: 其一, 这些污染的振幅通常有很大的不确定性, 其二, 给定实验通常测了很多模式. 由于第二点, 我们可以不管干扰模式而不会丢失太多信息. 第一点则告诉我们应当忽略干扰模式, 因为它可能会误导我们得到错误的结果.

怎样才能消除实验中的污染模式呢? 让我们从被污染的模式是单一空间像素入手. 在这种情况下, 确保像素本身在似然分析中权重为零的简单方法是在对应干扰像素的协方差矩阵对角元素中加入一个很大的数. 这样, 不论这个像素的观测值是什么, 似然函数都不会受到影响. 这个简单的想法 — 增大干扰模式的噪声 — 可以扩展到不只是一个像素的更复杂的模式.

举一个两个像素 CMB 实验的例子, 其中大气污染对这两个像素贡献相等的信

号. 因此, CMB 的平均温度不能确定. 这样在这两个像素中的噪声假定 100%相关, 我们在协方差矩阵中加入噪声之后得到

$$C_{\text{con}} = \kappa \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \tag{11.154}$$

这里的 κ 是非常大的数字. 假设噪声在没有这个约束的情况下是统一的和不相关的, 那么新的噪声协方差矩阵为

$$C_N = \sigma_n^2 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \kappa \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}. \tag{11.155}$$

在似然函数中, 我们在信号协方差矩阵中引入噪声协方差矩阵. 再次, 为简单起见, 假设像素距离足够远所以两个像素之间不相关. 那么似然函数依赖于完整的协方差矩阵

$$C = \begin{pmatrix} \sigma_n^2 + \sigma_s^2 + \kappa & \kappa \\ \kappa & \sigma_n^2 + \sigma_s^2 + \kappa \end{pmatrix}. \tag{11.156}$$

实际上, 似然函数依赖于矩阵的行列式和矩阵的逆 (回顾 (11.20) 式). 在 κ 非常大的极限下, 行列式为 $2\kappa(\sigma_n^2 + \sigma_s^2)$, 矩阵的逆为

$$C^{-1} \to \frac{1}{2(\sigma_n^2 + \sigma_s^2)} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}. \tag{11.157}$$

因此, 在此极限下, 似然函数为

$$\mathcal{L} \to \frac{\infty}{2\pi\sqrt{2\kappa(\sigma_n^2 + \sigma_s^2)}} \exp\left\{-\frac{(\Delta_1 - \Delta_2)^2}{2(\sigma_n^2 + \sigma_s^2)}\right\}. \tag{11.158}$$

也就是说, 除了不相关的归一化常数, 似然函数对于 $\Delta_1 - \Delta_2$(两个像素之间的温度差) 是高斯的, 且方差为 $\sigma_n^2 + \sigma_s^2$. 因此加入 (11.154) 式的约束矩阵是使似然函数忽略平均温度的方法.

在这个简单的例子中, 我们可以一开始就写出 (11.158) 式, 但是是用更复杂的模式, 约束形式非常强大. (11.154) 式的一般情况是什么? 假设污染模式的形式为 m_i, 其中 i 代表不同的像素. 因此, 在平均的例子中,m_i 等于 (1,1). 我们把噪声协方差矩阵乘以一个较大的数 κ

$$(C_{\text{con}})_{ij} = \kappa m_i m_j. \tag{11.159}$$

这就是我们为了平均所做的事情, 但是这个表达式是普适的, 适用于消除各种污染的模式. 这些矩阵通常被称为约束矩阵, 被广泛地用于近年来的 CMB 分析中, 特别是干涉实验 DASI 中.

推 荐 读 物

我 (本书作者) 并不是一位专业的统计学家, 本章无疑掩盖了统计学的一些重要概念. 尽管如此, 我认为这一章在最近对宇宙学的分析中是合理的. 对于一般的统计学处理方法读者可以参见*The Advanced Theory of Statistics*(Kendall and Stuart). 对于所有的数值工作, 必要的参考文献是*Numerical Pecipes*(Press et al.), 其中第 15 章特别讨论了一些分析问题. 对于 CMB 研究的不错的早期文章有 Readhead et al. (1989) 和 Bond et al. (1991). 前一篇文章比我们对似然函数有更深入的研究. 例如, 它处理了频率论的测试并定义了这些项, 它们在统计学中很重要. Bond 等的文章简述了 CMB 贝叶斯分析, 清楚地解释了存在 CMB 窗函数; 似然函数; 处理了未知平均; 除此以外, 最妙的是提出了 CMB 实验是重子密度指针的想法.

11.1.3 节中的讨论基于相似的处理手法 (Tegmark et al., 1998), 它发现了 CMB 分析和星系巡天之间的联系. 它同时还处理了像素化方案而不仅是 11.1.3 节中的这两个巡天本身. CMB 的窗函数在许多地方都得到了讨论. 最近有一篇很好的文章, 作者是 Souradeep 和 Ratra (2001).

Karhunen -Loeve 分解由 Bunn(1995) 和 Bond(1995) 引入到宇宙学, 他们用这个方法分析 COBE 数据,Vogeley 和 Szalay(1996) 把它用到了星系巡天中. 最优二次估计由 Tegmark(1997) 和 Bond, Jaffe 和 Knox(1998) 引入, 后者用到了我在书中强调的牛顿 - 拉夫逊方法. 前者重点在于最小方差方面, 读者将在练习 10 中进行证明. 更早的时候 Feldman, Kaiser 和 Peacock(1994) 计算出了星系巡天的最优二次估计, 这是小尺度极限下的最优二次估计. 费舍尔矩阵由 Fisher(1935) 首先提出.Knox(1995) 算出了全天 CMB 费舍尔矩阵,Tegmark 等 (1998) 计算了星系巡天的情况. Jungman 等 (1996) 利用费舍尔矩阵 (尽管他们不这么叫它) 给出了第一个对参数的限制. 后续有很多文章对此限制进行了改进. 例如, Eisenstein, Hu 和 Tegmark(1999). 曲率矩阵和参数误差的协方差矩阵在*Numerical Recipes*一书中有详细介绍.

制图和 CMB 中的许多分析问题可以参考 Bond 等 (1999) 的工作. 前景问题同样有许多作者进行了探讨. 本书主要参考 Dodelson(1997) 和 Tegmark 等 (2000) 的工作. 其他参考文献包括 Tegmark 和 Efstathiou (1996) 和 Bouchet 和 Gispert(1999) 的著作. 11.6.2 节中的模式提取参考了 Bond, Jaffe 和 Knox (1998) 的工作. 模式提取的一个很好的应用是Halverson 等 (2002) 的工作.

练 习

1. 在 11.1.1 节的简单例子中, 证明 σ_n^2 中均匀的先验给出了与 (11.5) 式不同的 σ_n 分布.

2. 在 11.1.1 节的简单例子中, 我们发现了信号的误差, 那么 σ_n 模型中其他理论参数的误差是多少?

3. 推导出泊松采样协方差矩阵的表达式,(11.32) 式.

(a) 将巡天区域分成小的子空间. 假设给定子空间的像素数量服从泊松分布, 且 $\bar{n}$ 取平均值 (为了简化假设 $\bar{n}$ 在所有子空间中是常数),

$$P(n) = \frac{(\bar{n})^n \mathrm{e}^{-\bar{n}}}{n!}. \tag{11.160}$$

求该分布的期望值 $\langle n \rangle$ 和 $\langle n^2 \rangle$;

(b) 将 (11.28) 式改写为

$$\Delta_i = v \sum_\alpha \psi_i(\vec{x}_\alpha) \left[\frac{n(\vec{x}_\alpha) - \bar{n}}{\bar{n}} \right], \tag{11.161}$$

其中 α 是每个子空间的下标, 每个子空间的体积为 v. 利用第一问的结果, 并假设不存在内秉成团, 确定 $\langle \Delta_i \Delta_j \rangle$. 证明它由 (11.32) 式给定. 读者需要变换求和代入到积分中.

4. 用细胞计数法确定星系巡天的噪声协方差矩阵. 假设每个细胞都是半径为 R 的球形, 并求出以两个细胞中心距离 r_{ij} 为函数的 $(C_N)_{ij}$. 假设巡天是体积有限的, 也就是说 $\bar{n}$ 在体积 V 内是常数.

5. 完成加州大学圣芭芭拉分校在南极的 CMB 实验似然分析 (Gaier et al., 1992).

(a) 确定窗函数. 斜劈角为 2.1°, 波束宽度 (FWHM) 为 1.35°. 在 9 个不同的位置测量了各向异性, 每个在天空中分开 2.1°. 忽视非对角元素.

(b) 利用以下数据拟合平坦的带通功率 (即取 $\mathcal{C} \equiv l(l+1)C_l/2\pi$ 为常数):

Position	$\delta T/\mu\mathrm{K}$	$\sigma_n/\mu\mathrm{K}$
1	−30.5	25.9
2	−3.2	26.5
3	29.2	26.1
4	−10.8	26.3
5	−8.7	28.8
6	23.1	26.4
7	4.7	26.5
8	−24.7	26.6
9	20.3	25.8

假设每个像素之间的噪声和信号都不相关.

(c) 读者得到的似然函数应当在band power处到达极值, 且等于零. 求 95%的 CL 上限, 定义

$$\int_0^{\mathcal{C}_U} \mathrm{d}\mathcal{C}\mathcal{L}(\mathcal{C}) = 0.95 \int_0^\infty \mathrm{d}\mathcal{C}\mathcal{L}(\mathcal{C}). \tag{11.162}$$

这个上限在 COBE 探测各向异性几乎同时被报道出来. 比较这两个结果.

6. 求高帽函数 $f(x) = \Theta(x+R)\Theta(R-x)$ 的傅里叶变换函数, 其中 Θ 是阶梯函数, 自变量是正数时等于 1, 否则等于零.

7. 求有限体积的巡天模式为 $K_i \geqslant R^{-1}$ 的协方差矩阵 C_S 的对角元素. 证明它们由 (11.60) 式给定.

8. 求 11.2.3 节中提到的两种星系巡天 — 体积有限巡天和铅笔束巡天 — 的非对角窗函数. 令 $\vec{i}$ 和 $\vec{j}$ 平行于 z 轴 (对于铅笔束巡天来说平行于长距离 L 方向). 画出 $k = k_i$ 处以 k_j 为函数的窗函数. 在 $k_i = k_j$ 点, 读者需要重取图 11.5 和图 11.7 的对应点的数据.

9. 证明 (11.100) 式. 假设只有一个参数 λ, 似然函数在高密度 Δ 服从高斯分布. 另外假设已经迭代许多次, 因此输入参数 $\lambda^{(0)}$ 等于真值 $\bar{\lambda}$.

10. 假设期望值是无偏的, 通过一般二次估计的最小方差推导 (11.92) 式的最优二次估计. 提示: 利用拉格朗日乘数加强限制.

11. 考虑空间像素面积为 $\Delta\Omega$ 的全天 CMB 实验. 假设实验测出每个像素的温度的高斯噪声为 σ_n. 因此假设噪声在全天是均匀且每个像素之间是不相关的. 确定噪声对于 $a_l m$ 的协方差矩阵. 如果像素大小减小一半 (对于同一个实验), 每个像素观测时间减少的因子为 2. 那么每个像素的噪声升高的因子为 $\sqrt{2}$. 证明这两个变化 (像素大小减小; 每个像素具有更多的噪声) 不影响噪声对于 a_{lm} 的协方差矩阵.

12. 估计下列实验的 C_l 的期望误差：(1)COBE,(2)Boomerang,(3)WMAP,(4)Planck.

13. 11.4 节中推导的费舍尔矩阵的全天极限可以用来求最优二次估计.

(a) 从一个全天 CMB 实验中给定一组 a_{lm} 且权重统一为 w, 求出 C_l 的最优二次估计量.

(b) 从三维星系巡天中给定一组像素化的傅里叶高密度, 求 $P(k)$ 的最优二次估计.

(c) 从 (1) 和 (2) 的结果出发, 定性讨论最优二次估计的有效性. 什么情况下最优二次估计的使用功能与 C_l 的二次估计量 $\sum_m |a_{lm}|^2/(2l+1)$ 以及 $P(k)$ 的 $\sum_{\vec{k}} |\delta_{\vec{k}}|^2/(4\pi k^2 \Delta k)(\Delta k$ 是 k 隔段的宽度) 不同?

14. 证明利用 (11.134) 式估计量的噪声协方差矩阵是 C_N, 且 C_N 由 (11.135) 式给定.

15. 假设我们对于前景有先验信息, 假设它的功率谱为 C_l^α, 上标 α 代表不同的前景成分.

(a) 求温度和相关协方差矩阵的最小方差估计量.

(b) 考虑 11.6.1 节中瑞利–金斯分布区域的两个频率的例子和一个形状矢量为 $\vec{W}^1 = (1, 1/2)$ 的前景. 如果假设前景的均值是零, 方差等于噪声的方差 (σ_n^2), 那么 CMB 温度的最佳估计量是什么? 在确定 CMB 温度中的新误差是多少? 与在课本中处理过的、没有关于前景幅度信息假设的情况下的两种情况进行比较.

附录 A　习题参考答案

每章课后习题的难度不一. 一些是课文中有些不同的内容的重复计算, 一些是基本公式的初级应用; 还有一些很难, 它们是从最近的文章中摘取的. 以下是一些问题的答案. 这些答案主要是前几章的, 尤其是第 2 章, 因为在解决扰动问题之前熟悉背景宇宙是非常重要的.

第一章

1. 式子

$$\frac{\rho_\Lambda}{3H^2/(8\pi G)} = (\rho_\Lambda/\rho_c)_0 \left(\frac{H_0}{H}\right)^2, \tag{A.1}$$

其中下标 0 表示现在的值, 这一项的值假设为 0.7. 假设宇宙一直由辐射占主导 (现在明显不正确, 但它是早期的一个很好的近似), 所以 $H/H_0 = a^{-2}$. 温度与 a^{-1} 有关, 所以 $H/H_0 = (T/T_0)^2$, 其中 $T_0 = 2.7\text{K} = 2.3 \times 10^{-4}\text{eV}$. 因此,

$$\frac{\rho_\Lambda}{3H^2/(8\pi G)} = 0.7\left(\frac{T_0}{T}\right)^4. \tag{A.2}$$

在普朗克尺度 (Plank scale),$T_0/T = 2.3 \times 10^{28}$, 因此,

$$\frac{\rho_\Lambda}{3H^2/(8\pi G)} = 9 \times 10^{-128}. \tag{A.3}$$

这就是所谓的微调问题 (fine-tuning problem): 因为现在宇宙学常数很重要, 所以它在早期被微调到非常小的值.这是一个很深刻的问题.

2. 我们需要作积分

$$t_0 = \frac{1}{H_0}\int_0^1 \frac{\mathrm{d}a}{a}\left[\Omega_\Lambda + \frac{1-\Omega_\Lambda}{a^3}\right]^{-1/2}, \tag{A.4}$$

其中 $\Omega_\Lambda = 0.7$ 或 0. 后一种情况可以得到解析解

$$\int_0^1 \frac{\mathrm{d}a}{a} a^{3/2} = \frac{2}{3}. \tag{A.5}$$

所以 $t_0 = 2/3H_0 = 0.67 \times 10^{10} h^{-1}\text{yrs}$. 当 Ω_Λ 不为零时, 积分式需要数值求解.

$$\int_0^1 \frac{\mathrm{d}a}{a}\left[0.7 + \frac{0.3}{a^3}\right]^{-1/2} = 0.96. \tag{A.6}$$

所以，对于固定的哈勃常数，宇宙学常数宇宙比物质为主的宇宙老，比率为 0.96/0.67=1.43. 当 $h = 0.7$ 时, 宇宙学常数宇宙的年龄为 140 亿年, 与宇宙年龄的一些观测相符.

4. 波长的倒数是 ν/c, 用 ν 代替 (1.8) 式中的 c/λ, 得到

$$I_\nu = \frac{4\pi\hbar c}{\lambda^3}\frac{1}{\exp\{2\pi\hbar c/\lambda k_{\rm B}T\}-1}. \tag{A.7}$$

这是单位 Hz 的能量, 我们需要的是单位 cm^{-1} 的能量, 因而需要乘以 c

$$I_{1/\lambda} = \frac{4\pi\hbar c^2}{\lambda^3}\frac{1}{\exp\{2\pi\hbar c/\lambda k_{\rm B}T\}-1}. \tag{A.8}$$

代入数值后得到,

$$I_{1/\lambda} = 1.2\times10^{-5}\text{erg sec}^{-1}\text{cm}^{-1}\text{sr}^{-1}\left(\frac{\text{cm}}{\lambda}\right)^3\frac{1}{\exp\{0.53\text{cm}/\lambda\}-1}. \tag{A.9}$$

快速检验后知其与图 1.10 相符.

为了找到峰值, 对 I 求 $1/\lambda$ 的导, 令其为零, 得到

$$\lambda = \frac{1}{3}\frac{(2\pi\hbar c/k_{\rm B}T)}{1-\exp\{-2\pi\hbar c/\lambda k_{\rm B}T\}}. \tag{A.10}$$

所以 $1/\lambda_{\rm peak}$ 是 $3/0.53\text{cm}^{-1}$. 对于这个指数, 准确的系数是 2.82, 所以 $1/\lambda_{\rm peak} = 5.3\text{cm}^{-1}$, 与图 1.10 严格相符.

第二章

1. (a) 利用 $k_{\rm B} = \text{eV}/(11605\text{K})$, 将 K 转化为 eV, 所以 $2.725\text{K} \to k_{\rm B}2.725\text{K} = (2.725/11605)\text{eV}$, 即 $2.348\times10^{-4}\text{eV}$.

(b) 对于 $T_0 = 2.348\times10^{-4}\text{eV}$,

$$\rho_\gamma = \frac{\pi^2 T_0^4}{15} = 2.000\times10^{-15}\text{eV}^4. \tag{A.11}$$

为了得到单位为 g cm^{-3} 的形式, 首先除以 $(\hbar c)^3 = (1.973\times10^{-5}\text{eV cm})^3$ 得到 0.2604eV cm^{-3}. 将 eV 变成克, 已知质子的质量为 1.673×10^{-24}g 或者 0.9383×10^9eV, 所以 1eV=1.783×10^{-33}g. 因而 $\rho_\gamma = 4.643\times10^{-34}\text{g cm}^{-3}$.

(c) 我们已经参数化 $H_0 = 100h\text{km sec}^{-1}\text{ Mpc}^{-1}$, 或者利用一个 Mpc 等于 3.1×10^{19}km, $H_0 = 3.23h\times10^{-18}\text{sec}^{-1}$. 为了将单位变成 cm^{-1}, 除以光速 $c = 3\times10^{10}\text{cm sec}^{-1}$; 那么 $H_0 = 1.1h\times10^{-28}$cm 或者 $H_0^{-1} = 9.3h^{-1}\times10^{27}$cm.

(d) 为了将普朗克质量 (1.2×10^{28}eV) 转化为开尔文, 需乘以 $k_{\rm B}^{-1} = 11605\text{K/eV}$; 那么 $m_{\rm Pl} = 1.4\times10^{32}$K. 为了变成 cm^{-1} 的形式, 除以 $\hbar c = 1.97\times10^{-5}$eV cm 得到

$m_{\mathrm{Pl}} = 6.1 \times 10^{32}\mathrm{cm}^{-1}$. 为了得到 $m_{\mathrm{Pl}} = 6.1 \times 10^{32} \times 3 \times 10^{10}\mathrm{cm\ sec}^{-1}$ 的形式, 需乘以光速得到, 或者 $m_{\mathrm{Pl}} = 1.8 \times 10^{43}\mathrm{sec}^{-1}$.

7.

$$\Gamma^0_{\mu\nu} = \frac{g^{0\alpha}}{2}\left[\frac{\partial g_{\alpha\mu}}{\partial x^\nu} + \frac{\partial g_{\alpha\nu}}{\partial x^\mu} - \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^\alpha}\right], \tag{A.12}$$

其中 μ, ν 从 0 变到 2,0 对应时间,1 对应 θ,2 对应 ϕ. 既然矩阵是对角的, 只有当 $a = 0$ 时 $g^{0\alpha}$ 不为零, 而为 -1. 所以

$$\Gamma^0_{\mu\nu} = \frac{-1}{2}\left[\frac{\partial g_{0\mu}}{\partial x^\nu} + \frac{\partial g_{0\nu}}{\partial x^\mu} - \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial t}\right]. \tag{A.13}$$

所有的项都为零:g_{00} 为常数, 所以前两项为 0; 矩阵中的元素都与 $x^0 = t$ 无关, 所以最后一项亦为 0. 因此, 对于所有的 μ, ν 来说 $\Gamma^0_{\mu\nu} = 0$.

接下来考虑

$$\Gamma^0_{\mu\nu} = \frac{g^{\theta\alpha}}{2}\left[\frac{\partial g_{\alpha\mu}}{\partial x^\nu} + \frac{\partial g_{\alpha\nu}}{\partial x^\mu} - \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^\alpha}\right]. \tag{A.14}$$

因为矩阵是对角的, 而且 $g^{\theta\theta} = 1/r^2$, 所以

$$\Gamma^\theta_{\mu\nu} = \frac{1}{2r^2}\left[\frac{\partial g_{\theta\mu}}{\partial x^\nu} + \frac{\partial g_{\theta\nu}}{\partial x^\mu} - \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial \theta}\right]. \tag{A.15}$$

只有 $g_{\phi\phi}$ 项与其中一个变量有关, 所以求导时只有它非零. 因此, 前两项等于零, 最后一项当 $\mu = \nu = \phi$ 时不为零, 其值为

$$\Gamma^\theta_{\phi\phi} = \frac{1}{2r^2}\left[-r^2\frac{\partial \sin^2\theta}{\partial \theta}\right] = -\sin\theta\cos\theta. \tag{A.16}$$

最后当上标为 ϕ 时, 有

$$\Gamma^\phi_{\mu\nu} = \frac{1}{2r^2\sin^\theta}\left[\frac{\partial g_{\phi\mu}}{\partial x^\nu} + \frac{\partial g_{\phi\nu}}{\partial x^\mu} - \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial \phi}\right]. \tag{A.17}$$

因为矩阵中的元素没有一个与 ϕ 有关, 因此最后一项等于零; 只有当 $\mu\nu$ 中的一个等于 ϕ, 另一个等于 θ 时, 前两项不为零. 此时有,

$$\Gamma^\phi_{\phi\theta} = \Gamma^\phi_{\theta\phi} = \frac{\cos\theta}{\sin\theta}. \tag{A.18}$$

测地线方程为

$$\frac{\mathrm{d}^2 x^\mu}{\mathrm{d}\lambda^2} = -\Gamma^\mu_{\alpha\beta}P^\alpha P^\beta \tag{A.19}$$

其中

$$P^\mu \equiv \frac{\mathrm{d}x^\mu}{\mathrm{d}\lambda}. \tag{A.20}$$

将此应用到 $\mu = \theta$ 项. 左边为

$$\frac{\mathrm{d}^2\theta}{\mathrm{d}\lambda^2} = \frac{d}{\lambda}\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}\lambda}\dot{\theta} = E^2\ddot{\theta}. \tag{A.21}$$

因为 $E = \mathrm{d}t/\mathrm{d}\lambda$ 为常数. 只有当 $\alpha = \beta = \phi$ 时, 等式右边的克氏符 $\Gamma^{\theta}_{\alpha\beta}$ 非零, 而为 $-\sin\theta\cos\theta$. 所以得

$$\ddot{\theta} - \sin\theta\cos\theta(\dot{\phi})^2 = 0. \tag{A.22}$$

对于第二个方程, 考虑测地线方程中的 ϕ 项

$$\frac{\mathrm{d}^2\phi}{\mathrm{d}\lambda^2} = -\Gamma^{\phi}_{\alpha\beta}P^{\alpha}P^{\beta}. \tag{A.23}$$

左边为 $E^2\ddot{\phi}$. 当 $\alpha = \theta, \beta = \phi$ 或 $\alpha = \phi, \beta = \theta$ 时右边非零. 因而

$$\ddot{\phi} + 2\frac{\cos\theta}{\sin\theta}\dot{\theta}\dot{\phi} = 0. \tag{A.24}$$

这恰等于下式

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\dot{\phi}\sin^2\theta\right) = 0 \tag{A.25}$$

括号里的守恒量就是角动量.

里奇标量为

$$\mathcal{R} = g^{\mu\nu}R_{\mu\nu} = -R_{00} + \frac{1}{r^2}R_{\theta\theta} + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}R_{\phi\phi}. \tag{A.26}$$

因为所有的时间项都是零, 因此时–时项为零. 我们需要计算两个空间项. 首先考虑

$$R_{\theta\theta} = \frac{\partial\Gamma^{\alpha}_{\theta\theta}}{\partial x^{\alpha}} - \frac{\partial\Gamma^{\alpha}_{\theta\alpha}}{\partial\theta} + \Gamma^{\alpha}_{\beta\alpha}\Gamma^{\beta}_{\theta\theta} - \Gamma^{\alpha}_{\beta\theta}\Gamma^{\beta}_{\theta\alpha}. \tag{A.27}$$

由于克氏符的两个 θ 下标项为零, 第一和第三项等于零. 同样, 第二项 α 必须等于 Φ, 最后一项的 β 和 α 必须等于 Φ:

$$R_{\theta\theta} = -\frac{\partial(\cos\theta/\sin\theta)}{\partial\theta} - \left(\frac{\cos\theta}{\sin\theta}\right)^2. \tag{A.28}$$

计算微分得

$$R_{\theta\theta} = \left[1 + \frac{\cos^2\theta}{\sin^2\theta}\right] - \left(\frac{\cos\theta}{\sin\theta}\right)^2 = 1. \tag{A.29}$$

另一空间项为

$$R_{\phi\phi} = \frac{\partial\Gamma^{\alpha}_{\phi\phi}}{\partial x^{\alpha}} - \frac{\partial\Gamma^{\alpha}_{\phi\alpha}}{\partial\phi} + \Gamma^{\alpha}_{\beta\alpha}\Gamma^{\beta}_{\phi\phi} - \Gamma^{\alpha}_{\beta\phi}\Gamma^{\beta}_{\phi\alpha}. \tag{A.30}$$

只有当 $\alpha=\theta$ 时, 第一项克氏符才不为零, 而第二项始终为零. 第三项 β 需等于 θ, 第二个克氏符才不为零, 那么 $\alpha=\phi$. 最后一项 β 可以等于 θ,$\alpha=\phi$, 或者相反, 所以

$$R_{\phi\phi}=\frac{\partial\Gamma^{\theta}_{\phi\phi}}{\partial\theta}+\Gamma^{\phi}_{\theta\phi}\Gamma^{\theta}_{\phi\phi}-\Gamma^{\phi}_{\theta\phi}\Gamma^{\theta}_{\phi\phi}-\Gamma^{\theta}_{\phi\phi}\Gamma^{\beta}_{\phi\theta}. \tag{A.31}$$

消去中间两项得

$$R_{\phi\phi}=-\frac{\partial(\sin\theta\cos\theta)}{\partial\theta}+\sin\theta\cos\theta\frac{\cos\theta}{\sin\theta}. \tag{A.32}$$

计算微分得

$$R_{\phi\phi}=-\cos^2\theta+\sin^2\theta+\cos^2\theta=\sin^2\theta. \tag{A.33}$$

加起来, 可得到

$$\mathcal{R}=\frac{1}{2r^2}. \tag{A.34}$$

因而里奇标量可用来测量空间曲率.

9. 聚集不同的 Γ's 得到

$$\frac{\mathrm{d}^2x^i}{\mathrm{d}\lambda^2}=-2\frac{\dot{a}}{a}\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}\lambda}\frac{\mathrm{d}x^i}{\mathrm{d}\lambda}. \tag{A.35}$$

利用 $\mathrm{d}t/\mathrm{d}\lambda=E$ 和 $\mathrm{d}\eta/\mathrm{d}\lambda=E/a$, 改为对 η 的微分. 测地线方程变为

$$\frac{E}{a}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\eta}\left(\frac{E}{a}\frac{\mathrm{d}x^i}{\mathrm{d}\eta}\right)=-2\frac{\dot{a}}{a}\frac{E^2}{a}\frac{\mathrm{d}x^i}{\mathrm{d}\eta}. \tag{A.36}$$

因为 $E/a\propto a^{-2}$, 当左边对 E/a 作微分时, 结果 (正比于 $\mathrm{d}x^i/\mathrm{d}\eta$) 和右边相消, 从而得到 (2.99) 式.

10. 年龄积分为

$$t(a)=\int_0^a\frac{\mathrm{d}a'}{a'H(a')}. \tag{A.37}$$

既然假设只有物质和辐射, 故可取

$$H(a)=H_0\sqrt{\rho/\rho_{\mathrm{cr}}}=\sqrt{\frac{1}{a^3}+\frac{\Omega_r}{a^4}}, \tag{A.38}$$

其中 $1/a^3$ 项来自物质, 其密度等于临界密度. 当物质密度等于临界值时,$\Omega_r=a_{\mathrm{eq}}=4.15\times10^{-5}h^{-2}$. 因而, 年龄积分得

$$t=\frac{1}{H_0}\int_0^a\frac{\mathrm{d}a'a'}{\sqrt{a'+a_{\mathrm{eq}}}}. \tag{A.39}$$

分部积分得

$$H_0t=2a\sqrt{a+a_{\mathrm{eq}}}-2\int_0^a\mathrm{d}a'\sqrt{a'+a_{\mathrm{eq}}}. \tag{A.40}$$

计算后面一积分得

$$H_0 t = 2a\sqrt{a + a_{\rm eq}} - \frac{4}{3}\{[a + a_{\rm eq}]^{3/2} - a_{\rm eq}^{3/2}\}. \tag{A.41}$$

早期, 例如当温度为 0.1MeV 时,a 比 $a_{\rm eq}$ 小得多, 所以

$$t \to \frac{a^2}{2H_0\sqrt{a_{\rm eq}}}; \quad a \ll a_{\rm eq}. \tag{A.42}$$

这个极限由 (A.39) 式积分显而易见, 亦可通过 (A.41) 式泰勒展开得到. 当温度为 0.1MeV 时, 尺度因子为 $2.35{\times}10^{-4}$eV/0.1 MeV=2.35×10^{-9}, 即现在的温度除以 0.1MeV. 代入上式有

$$t(0.1{\rm MeV}) = 4.28 \times 10^{-16} \times 9.78 \times 10^9{\rm yr} = 130{\rm sec}. \tag{A.43}$$

当 $T = 1/4{\rm eV}, a = 9.4 \times 10^{-4}$, 远大于 $a_{\rm eq} = 8.5 \times 10^{-5}$, 其中 $h = 0.7$, 所以 $H_0 t \to (2/3)a^{3/2}$, 即

$$t(1/4{\rm eV}) = 270\ 000{\rm yr}. \tag{A.44}$$

12. 张角等于物理距离除以角直径距离

$$\theta(z) = \frac{5{\rm kpc}(1+z)}{\chi(z)}. \tag{A.45}$$

在平坦、物质为主的宇宙中,χ 由 (2.43) 式给出. 当 $z = 0.1(1)$ 时,(2.43) 式括号中的项等于 0.0465(0.293). 因而共动距离为

$$\chi = \begin{cases} 280h^{-1}{\rm Mpc} & z = 0.1 \\ 1760h^{-1}{\rm Mpc} & z = 1 \end{cases}. \tag{A.46}$$

计算除式, 并将弧度化为角秒 (1 弧度等于 2.06×10^5 角秒) 得

$$\theta = \begin{cases} 4.0h'' & z = 0.1 \\ 1.2h'' & z = 1 \end{cases}. \tag{A.47}$$

一个 $\Omega_\Lambda = 0.7, \Omega_m = 0.3$ 的宇宙中,χ 需要数值求解. 当 $z = 1$ 时,χ 为平坦、物质为主的宇宙情况下的 1.3 倍, 角大小就应该相应变小, 为 $0.9h''$. 当 $z = 0.1$ 时, 二者之间的差距仅为 5%, 所以在宇宙学常数模型中角直径大小降至 $3.8h''$.

13. 利用动量 $p = h\nu/c = 2\pi\hbar\nu/c$ 重写 (1.8) 式, 并将分母写为 $1/f$,

$$I_\nu = f\frac{4\pi p^3}{(2\pi)^3} \tag{A.48}$$

其中已取 $\hbar = c = 1$. 所以能量密度是对上式在所有频率上积分, 并带有因子 4π 对所有方向上的光子计数 (即 I_ν 是每立方度的)：

$$\rho_\gamma = 4\pi \int_0^\infty \mathrm{d}\nu I_\nu. \tag{A.49}$$

利用 $\mathrm{d}\nu = \mathrm{d}p/(2\pi)$, 可转换成对动量的积分

$$\rho_\gamma = 2 \int_0^\infty \mathrm{d}p I_\nu. \tag{A.50}$$

15. 为得到 $\rho = -T_0^0$. 设 $\mu = \nu = 0$,

$$T_0^0 = -g_i \int \frac{\mathrm{d}P_1 \mathrm{d}P_2 \mathrm{d}P_3}{(2\pi)^3} (-\det[g_{\mu\nu}])^{-1/2} P^0 f_i. \tag{A.51}$$

矩阵 $g_{\mu\nu}$ 是对角的, 所以行列式是对角元素的乘积,$-a^6$. 由定义, $p^2 = g^{ij} P_i P_j = a^{-2} \delta_{ij} P_i P_j$. 因此 $p_i \equiv \hat{p}_i p = P_i/a$, $\hat{p}$ 为动量的单位方向矢量. 因而 $\mathrm{d}^3 P = a^3 \mathrm{d}^3 p$, 其中 a 因子恰好与行列式中的相消. 因而

$$T_0^0 = -g_i \int \frac{\mathrm{d}^3 p}{(2\pi)^3} P^0 f_i. \tag{A.52}$$

四矢量 P_μ 的平方等于 $-m^2$, 粒子的质量, 所以 $g_{00}(P^0)^2 = -m^2 - g_{ij} P^i P^j = -m^2 - p^2$. 因为 $g_{00} = -1, P^0 = \sqrt{p^2 + m^2}$, 与 (2.59) 式相符.

17. 零质量玻色子的能量密度为 $g\pi^2 T^4/30$, 费米子的能量密度为玻色子的 $7/8$. 所以

$$s = \frac{2\pi^2}{45} \left[\sum_{i=\mathrm{Bosons}} g_i T_i^3 + \frac{7}{8} \sum_{i=\mathrm{Fermions}} g_i T_i^3 \right] \tag{A.53}$$

说明不同种类物质可能有不同的温度.

第三章

1. 一物质简并度 $g = 2$ 时的数密度为

$$n = 2 \int \frac{\mathrm{d}^3 p}{(2\pi)^3} f(p). \tag{A.54}$$

对于所考虑的分布, 相空间密度 f 只与动量的大小有关, 所以上式对于角度部分的积分为 4π, 即

$$n = \frac{1}{\pi^2} \int_0^\infty \mathrm{d}p p^2 f(p). \tag{A.55}$$

首先考虑 m/T 取较大值的极限情况．这种情况下，玻尔兹曼分布的极限为 $\exp[-(m+p^2/2m)]$. 对于费米–狄拉克和玻色–爱因斯坦分布, 下式均成立：

$$\frac{1}{\mathrm{e}^{E/T}\pm 1}\to \mathrm{e}^{-E/T} \tag{A.56}$$

既然 $E\simeq m\gg T$ 分母可忽略 1. 所以所有三种分布的低温度极限为

$$n^{\text{low T}}=\frac{\mathrm{e}^{-m/T}}{\pi^2}\int_0^\infty \mathrm{d}pp^2\mathrm{e}^{-p^2/2mT}. \tag{A.57}$$

为计算积分, 定义无量纲参数 $x\equiv p/\sqrt{2mT}$. 变量 $\mathrm{d}pp^2=[2mT]^{3/2}\mathrm{d}xx^2$, 所以

$$n^{\text{low T}}=\frac{\mathrm{e}^{-m/T}}{\pi^2}[2mT]^{3/2}\int_0^\infty \mathrm{d}xx^2\mathrm{e}^{-x^2}. \tag{A.58}$$

积分等于 $\sqrt{\pi}/2$, 故

$$n^{\text{low T}}=2\mathrm{e}^{-m/T}\left(\frac{mT}{2\pi}\right)^{3/2}. \tag{A.59}$$

高温玻尔兹曼极限为

$$n^{\text{Hi T, Boltz}}=\frac{1}{\pi^2}\int_0^\infty \mathrm{d}pp^2\mathrm{e}^{-p/T}. \tag{A.60}$$

定义变量 $x\equiv p/T$ 得到

$$n^{\text{Hi T, Boltz}}=\frac{1}{\pi^2}T^3\int_0^\infty \mathrm{d}xx^2\mathrm{e}^{-x}. \tag{A.61}$$

x 的积分值为 2. 所以

$$n^{\text{Hi T, Boltz}}=\frac{2T^3}{\pi^2}. \tag{A.62}$$

玻色–爱因斯坦和费米–狄拉克积分同样为

$$n^{\text{Hi T, BE/FD}}=\frac{T^3}{\pi^2}\int_0^\infty \frac{\mathrm{d}xx^2}{\mathrm{e}^x\mp 1}. \tag{A.63}$$

经由 (C.27) 式, 积分可写成 Riemann zeta 的形式. 所以上式中为减号的 — 玻色–爱因斯坦分布 — 为 $\zeta(3)\Gamma(3)=2\zeta(3)$. 加号的 — 费米–狄拉克分布 — 为 $3\zeta(3)\Gamma(3)/4=3\zeta(3)/2$, 所以

$$n^{\text{Hi T}}=\frac{\zeta(3)T^3}{\pi^2}\begin{cases}2 & \text{玻色 - 爱因斯坦分布}\\ 3/2 & \text{费米 - 狄拉克分布}\end{cases}.$$

另外 $\zeta(3)\simeq 1.202$, 所以同样温度下玻色子比费米子多, 这些包括玻尔兹曼数目. 所有的这些情况都正比于 T^3.

6. 光子数密度为 411cm^{-3}, 重子数密度 $n_b = \rho_b/m_p = \rho_{\text{cr}}\Omega_b/m_p$. 代入数值得

$$n_b = \Omega_b \frac{1.879h^2 \times 10^{-29}\text{g cm}^{-3}}{1.673 \times 10^{-24}\text{g}} = 1.12 \times 10^{-5}\Omega_b h^2 \text{cm}^{-3}. \tag{A.64}$$

所以重子与光子数密度之比 η_b, 确实由 (3.11) 式给出.

11. 为了求比值, 熵密度 $(\mathcal{P}+\rho)/T$ 需计算两次. 每次只有相对论粒子对熵密度有显著贡献,(A.53) 式成立. 高温时, 下面的粒子对熵密度有贡献：夸克 (对于五种least 大质量类型— 上、下、奇、粲、底 — 每个都有三种颜色和两个自旋态 $g_* = 5\times3\times2$); 反夸克 ($g_* = 5\times3\times2$); 轻子 ($g_* = 6\times2$ 六种类型 —$e, \nu_e, \mu, \nu_\mu, \tau, \nu_\tau$ 每个均有两个自旋态); 反轻子 ($g_* = 12$); 光子 (2); 胶子 ($g_* = 8\times2$ 八种可能的颜色, 每个均有两个自旋态). 这些加起来为

$$g_* = 2 + 16 + \frac{7}{8}(30 + 30 + 12 + 12) = 91.5. \tag{A.65}$$

第六种夸克, 顶夸克, 不作贡献, 因为在温度 $m_t \simeq 175\text{GeV}$ 左右, 顶夸克质量太大而难以存在. 现在的熵只来自于光子和中微子. 前者贡献为 2; 后者贡献 $(7/8)\times3\times2\times(4/11)^{4/3} = 1.36$, 因此 $g_* = 3.36$. 因为 sa^3 为常数, 有

$$\left[g_*(aT)^3\right]\Big|_{T=10\text{GeV}} = \left[g_*(aT)^3\right]\Big|_{T_0}. \tag{A.66}$$

即

$$\frac{(aT)^3\Big|_{T=10\text{GeV}}}{(a_0T_0)^3} = \frac{3.36}{91.5} = \frac{1}{27}. \tag{A.67}$$

第四章

1. 首先积分 (4.6) 式, 对所有动量, 得到

$$\frac{\partial n}{\partial t} + \frac{\partial(nv)}{\partial x} = 0, \tag{A.68}$$

分部积分后 $\partial f/\partial p$ 项消失并注意到 $p = \pm\infty$ 时 $f = 0$(没有粒子有无穷的动量). 这就是连续性方程. 为了得到欧拉方程, 首先乘以 p/m, 然后对所有动量积分, 得

$$\frac{\partial(nv)}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\text{d}p}{2\pi}\frac{p^2}{m^2} + \frac{kx}{m}n = 0 \tag{A.69}$$

最后一项来自分部积分. 对 p^2 积分得到两项, 体速度 v^2 和压力项 P. 利用连续性方程得

$$\dot{v} + v\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{1}{n}\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{kx}{m} = 0. \tag{A.70}$$

4. 根据 (3.3) 式, 电子分布函数在零动量处达到极值, 最大值为 $\mathrm{e}^{(\mu-m_e)/T}$. 为了将化学势和密度联系起来, 利用 $n=\mathrm{e}^{\mu/T}n^{(0)}$, 低温极限 ((3.6) 式) 为

$$\mathrm{e}^{\mu/T}=\frac{n_e}{2}\left(\frac{2\pi}{m_eT}\right)^{3/2}\mathrm{e}^{m_e/T}. \tag{A.71}$$

所以 f_e 的最大值为 $(n_e/2)(2\pi/m_eT)^{3/2}$.(3.44) 式除以Thomson cross-section 得到今天的 $n_e=1.12\times10^{-5}\Omega_Bh^2\mathrm{cm}^{-3}$, 包含电离和束缚电子. 取今天的电子温度等于光子温度, 得到 $2\pi/m_eT=2.04\times10^{-11}\mathrm{cm}^2$. 代回 a 得

$$f_e^{\mathrm{MAX}}=10^{-21}\Omega_Bh^2a^{-3/2}. \tag{A.72}$$

这个表达式在 $T\leqslant m_e$ 时成立, 对应的 $a\simeq4.6\times10^{-10}$. 所以只要温度远低于电子质量,f_e 就非常小.

7. 我们在 4.3 节的微分中用到的振幅与题目中给的更精确的值的差别为 $2\pi\sigma_Tm_e^2[3\cos(\hat{p}\cdot\hat{p}')-1]$. 方括号中的项是二倍的二阶勒让德多项式. 利用球谐函数重写附加的方程, 差别可写为

$$2\pi\sigma_Tm_e^2\frac{8\pi}{5}\sum_{m=-2}^{2}Y_{2m}(\hat{p})Y_{2m}^*(\hat{p}'). \tag{A.73}$$

将这个值插入到 (4.49) 式的多重积分中, 代替 $\mathcal{M}^2$. 只有 $m=0$ 项有贡献, 因为其他项 $Y_{2m}(\hat{p}')$ 都依赖方位角, 积分为零. 因此, 由于各向异性的康普顿散射的碰撞项为

$$\begin{aligned}\delta C[f(\vec{p})]=&\frac{\pi^2n_e\sigma_T}{p}\mathcal{P}_2(\mu)\int\frac{\mathrm{d}^3p'}{(2\pi)^3p'}\mathcal{P}_2(\hat{\gamma}'\cdot\hat{k})\\&\times\left\{\delta(p-p')+(\vec{p}-\vec{p}')\cdot\vec{v}\frac{\partial\delta(p-p')}{\partial p'}\right\}\{f(\vec{p}')-f(\vec{p})\},\end{aligned} \tag{A.74}$$

此处用到了 $Y_{20}=-\sqrt{5}\mathcal{P}_2/\sqrt{4\pi}$. 在角度积分中保留下来的唯一一项正比于 $\delta(p-p')f(\vec{p}')$, 得

$$\begin{aligned}\delta C[f(\vec{p})]=&-\frac{n_e\sigma_T}{2p}\mathcal{P}_2(\mu)\int_0^\infty\mathrm{d}p'p'\delta(p-p')p'\frac{\partial f^{(0)}}{\partial p'}\\&\times\int_{-1}^{1}\frac{\mathrm{d}\mu}{2}\mathcal{P}_2(\mu)\Theta(\mu).\end{aligned} \tag{A.75}$$

角度积分得到 $-\Theta_2$. 对狄拉克 δ 函数积分得

$$\delta C[f(\vec{p})]=+p\frac{\partial f^{(0)}}{\partial p}\frac{n_e\sigma_T}{2p}\mathcal{P}_2(\mu)\Theta_2. \tag{A.76}$$

这比 (4.54) 式的方括号中多了一个因子 $-\mathcal{P}_2\Theta_2/2$, 并解释了 (4.100) 式中相应的因子.

第五章

4. 在傅里叶空间

$$\begin{aligned}\varepsilon_{ijk}(\hat{k}_k\hat{k}_l-\delta_{kl}/3)G^L_{,jl}&=-k^2\varepsilon_{ijk}(\hat{k}_k\hat{k}_j-\hat{k}_j\hat{k}_k/3)G^L\\&=-2k^2/3\varepsilon_{ijk}\hat{k}_j\hat{k}_kG^L=0\end{aligned}\tag{A.77}$$

因为改变 j 和 k, ε_{ijk} 是反对称的, 而 $\hat{k}_j\hat{k}_k$ 是对称的. 组合的迹也为零, 因为 $\delta_{ij}(\hat{k}_i\hat{k}_j-\delta_{ij}/3)=0$.

7. (a) 由定义

$$\Gamma^i_{jk}=\frac{g^{ii'}}{2}[g_{i'j,k}+g_{i'k,j}-g_{jk,i'}].\tag{A.78}$$

所有的导数都是空间的, 矩阵中唯一空间变化的部分是一阶项 $\mathcal{H}$. 因而, 可在此利用零阶项 $g^{ii'}=\delta_{ii'}/a^2$, 得到 (5.43) 式.

(b) 当 α 和 β 均为 0 时 (因为 $\Gamma^0_{0i}=0$) 以及当指标均为空间项 (此时克氏符为一阶) 时, $\Gamma^\alpha_{\beta j}\Gamma^\beta_{i\alpha}$ 等于零. 因而, 结果为

$$\begin{aligned}\Gamma^\alpha_{\beta j}\Gamma^\beta_{i\alpha}&=\Gamma^0_{kj}\Gamma^k_{i0}+\Gamma^k_{0j}\Gamma^0_{ik}\\&=\Gamma^0_{kj}\Gamma^k_{i0}+(i\leftrightarrow j).\end{aligned}\tag{A.79}$$

但是

$$\begin{aligned}\Gamma^0_{kj}\Gamma^k_{i0}&=\frac{1}{2}(2Hg_{ik}+a^2\mathcal{H}_{jk,0})\left(H\delta_{ik}+\frac{1}{2}\mathcal{H}_{ik,0}\right)\\&=(H)^2g_{ij}+a\frac{\mathrm{d}a}{\mathrm{d}t}\mathcal{H}_{ij,0}.\end{aligned}\tag{A.80}$$

需要加上 i 和 j 交换的同系列的项, 这引入了因子 2, 所以

$$\Gamma^\alpha_{\beta j}\Gamma^\beta_{i\alpha}=2(H)^2g_{ij}+2a\frac{\mathrm{d}a}{\mathrm{d}t}\mathcal{H}_{ij,0}.\tag{A.81}$$

第六章

5. 目前每立方厘米有 411 个光子; 哈勃体积为 $(4\pi/3)[3000h^{-1}\mathrm{Mpc}]^3=3.3\times10^{84}h^{-3}\mathrm{cm}^3$. 所以总光子数为 $1.4\times10^{87}h^{-3}$. 物质和辐射时代这个数量大致不变, 因为数密度大小正比于 T^3, 物理体积正比于 a^3, 温度正比于 a^{-1}. 所以经典宇宙学的另一个问题是: 为什么宇宙的熵这么大?

暴胀解决了这个问题. 一开始结论显而易见：暴胀使尺度因子呈指数增长, 随后 aT 的增加带来熵的增大. 实际上, 结论远没那么简单, 因为暴胀中指数膨胀是绝热的：温度仍旧以 a^{-1} 的形式降低. 所以当接近暴胀结束时, 温度已降得足够快, 使得如果熵从开始一直保持同样数量级.

熵实际上是在暴胀结束时的重新加热过程中产生的. 尽管暴胀结束时的温度非常低, 但是能量密度 (几乎完全在标量场内) 却不是. 当标量场中的能量转化成辐射时, 辐射的温度从非常低的值 T 快速提升到 $\rho^{1/4} \gg T$. 因而, 再加热过程解释了我们今天看到的大的熵. 另一种方法指出暴胀是一个很有序的状态：当场陷入到假真空时, 宇宙过度冷却. 向真真空的转变就是向非常无序的平衡态的转变.

11. (a) 由于这个代换, 方程变为

$$\frac{\mathrm{d}^2\tilde{v}}{\mathrm{d}\eta^2} + \frac{2}{\eta}\frac{\mathrm{d}\tilde{v}}{\mathrm{d}\eta} + \left(k^2 - \frac{2}{\eta^2}\right)\tilde{v}. \tag{A.82}$$

定义 $x \equiv k\eta$. $\tilde{v}$ 满足 1 阶球贝塞尔方程 (C.13) 式.

(b) 两个一般解为 $j_1(x)$ 和 $y_1(x)$. 因而一般解可写为 $Aj_1 + By_1$. 明确地写出来有

$$\begin{aligned} v = \eta\tilde{v} &= \eta\left(A\frac{\sin x - x\cos x}{x^2} - B\frac{\cos x + x\sin x}{x^2}\right) \\ &= \frac{1}{2k^2\eta}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}k\eta}[-\mathrm{i}A - Ak\eta - B + \mathrm{i}Bk\eta] \\ &\quad + \mathrm{e}^{\mathrm{i}k\eta}[\mathrm{i}A - Ak\eta - B - \mathrm{i}Bk\eta]). \end{aligned} \tag{A.83}$$

当 $k\eta$ 非常大且为负值时, 我们想要 $v \to \mathrm{e}^{-\mathrm{i}k\eta}/\sqrt{2k}$, 所以这时 $\mathrm{e}^{+\mathrm{i}k\eta}$ 的正比于 $-A + \mathrm{i}B$ 的系数必须为零, 即 $A = \mathrm{i}B$. $\mathrm{e}^{-\mathrm{i}k\eta}$ 的系数为

$$\frac{1}{2k^2\eta}[-2Ak\eta] = \frac{-A}{k}. \tag{A.84}$$

它必须等于 $(2k)^{-1/2}$, 所以 $A = -(k/2)^{1/2}$. 因而正确的结果是

$$v = \frac{-1}{\sqrt{2k}k\eta}(\mathrm{e}^{-\mathrm{i}k\eta}[\mathrm{i} - k\eta]) \tag{A.85}$$

与 (6.57) 式相符.

13. 爱因斯坦方程的两部分分别为

$$\begin{aligned} k^2\Psi + 3aH(\dot{\Psi} + aH\Psi) &= 4\pi Ga^2\delta T^0_0 \\ \mathrm{i}k_i(\dot{\Psi} + aH\Psi) &= -4\pi Ga\delta T^0_i. \end{aligned} \tag{A.86}$$

这里我直接利用了第 5 章的结果, 将 Φ 换成 $-\Psi$. 用 $3\mathrm{i}aHk_i/k^2$ 乘以第二个式子, 两式相加得

$$k^2\Psi = 4\pi Ga^2\left[\delta T^0_0 - \frac{3Hk_i\delta T^0_i}{k^2}\right]. \tag{A.87}$$

在大尺度上, 左边可忽略, 因而式子右边括号中的项相加必为零, 即 (6.85) 式.

第七章

4. (c) 为了求积分, 引入一个新变量 $x \equiv \sqrt{1+y}$. 那么 (7.31) 式变为

$$\Phi = \frac{3\Phi(0)}{2}\frac{\sqrt{1+y}}{y^3}\int_1^{\sqrt{1+y}} \mathrm{d}x\frac{(x^2-1)^2(3x^2+1)}{x^2}. \tag{A.88}$$

分部积分, 利用 $1/x^2$ 的积分等于 $-1/x$. 表面项正比于分子, 在下限 $x=1$ 时为零. 因而

$$\begin{aligned}\Phi &= \frac{3\Phi(0)}{2}\frac{\sqrt{1+y}}{y^3}\left[-\frac{y^2(4+3y)}{\sqrt{1+y}} + \int_1^{\sqrt{1+y}}\mathrm{d}x(18x^4-20x^2+2)\right]\\ &= \frac{3\Phi(0)}{2}\frac{\sqrt{1+y}}{y^3}\left[-\frac{y^2(4+3y)}{\sqrt{1+y}} + \left(\frac{18}{5}x^5 - \frac{20}{3}x^3 + 2x\right)\Big|_1^{\sqrt{1+y}}\right].\end{aligned} \tag{A.89}$$

在上下限计算括号中的项, 推出 (7.32) 式.

9.

$$\begin{aligned}\sigma_R^2 &= \left\langle\left[\int \mathrm{d}^3x\delta(x)W_R(x)\right]^2\right\rangle\\ &= \left\langle\left[\frac{\mathrm{d}^3k}{(2\pi)^3}\tilde{\delta}(\vec{k})\tilde{W}_R^*(\vec{k})\right]^2\right\rangle,\end{aligned} \tag{A.90}$$

其中 “~” 表示傅里叶变换, 我们已用到 $W_R(x)$ 是实数这个事实, 即 $\tilde{W}_R(\vec{k}) = \tilde{W}_R^*(-\vec{k})$. 计算原点处的 δ_R, 角括号表示取平均, 现在已知 $\tilde{\delta}(\vec{k})$ 所有的真值. 取平方并利用

$$\langle\delta(\vec{k})\delta(\vec{k}')\rangle = (2\pi)^3\delta^3(\vec{k}+\vec{k}')P(k), \tag{A.91}$$

得到

$$\sigma_R^2 = \int\frac{\mathrm{d}^3k}{(2\pi)^3}P(k)|\tilde{W}_R(\vec{k})|^2. \tag{A.92}$$

接下来只需要计算高帽窗函数的傅里叶变换,

$$\tilde{W}_R(\vec{k}) = \int \mathrm{d}^3xW_R(\vec{x})\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\vec{k}\cdot\vec{x}}$$

$$= \frac{2\pi}{V_R}\int_0^R \mathrm{d}x x^2 \int_{-1}^1 \mathrm{d}\mu \mathrm{e}^{\mathrm{i}kx\mu}. \tag{A.93}$$

现已将窗函数归一化, 所以对它的积分是 1, 因而因子 $V_R = 4\pi R^3/3$. 计算剩下的角向和径向积分得

$$\begin{aligned}\tilde{W}_R(k) &= \frac{3}{kR^3}\int_0^R \mathrm{d}x x\sin(kx) \\ &= \frac{3}{k^3R^3}[-kR\cos(kR)+\sin(kR)].\end{aligned} \tag{A.94}$$

顺便解决第 10 题, 注意到

$$\Delta^2(k) = \frac{4\pi}{(2\pi)^3}k^3P(k). \tag{A.95}$$

第八章

2. 假设解的形式为 $x = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}$. 阻尼方程变成 ω 的二次方程:

$$\omega^2 - \frac{\mathrm{i}b}{m}\omega - \frac{k}{m} = 0. \tag{A.96}$$

利用 $k/m > \gamma^2 \equiv (b/2m)^2$, 得

$$\omega = \mathrm{i}\gamma \pm \omega_1. \tag{A.97}$$

现在频率为 $\omega_1 \equiv [k/m - \gamma^2]^{1/2}$, 小于无阻尼的情况. 振幅也变小了 $\mathrm{e}^{-\gamma t}$.

9. 利用球谐函数的加法定理 (C.12) 式

$$\mathcal{P}_{l'}(\hat{\gamma}\cdot\hat{k}) = \frac{4\pi}{2l+1}\sum_{m'} Y^*_{l'm'}(\hat{\gamma})Y_{l'm'}(\hat{k}). \tag{A.98}$$

角积分变成了两个球谐函数乘积的积分, 由于正交, 如果 $l' = l, m' = m$, 它的值等于 1, 否则为 0. 由此可直接得到想要的结果.

12. 结果见图 A.1, 交叉项的积分远远小于两项单独的平方, 因而单极和偶极之间没有干扰.

17. (8.67) 式关于张量的一般形式是

$$C_l^T = \sum_{l'l''}(-i)^{l'+l''}(2l'+1)(2l''+1)\int\frac{\mathrm{d}^3k}{(2\pi)^3}\Theta^T_{l'}(k)\Theta^{T,*}_{l''}(k)I_{lml'}(k)I^*_{lml''}(k), \tag{A.99}$$

其中定义了

$$I_{lml'}(k) \equiv \sqrt{\frac{8\pi}{15}}\int \mathrm{d}\Omega\mathcal{P}_{l'}(\hat{k}\cdot\hat{\gamma})Y_{lm}(\Omega)[Y_{22}(\Omega)+Y_{2-2}(\Omega)]. \tag{A.100}$$

因子 $[8\pi/15]^{1/2}[Y_{22}+Y_{2-2}]$ 是出现在 (4.115) 式的组合 $\sin^2\theta\cos(2\phi)$, 因而此表达式只有当 + 模式时才有效. 然而,× 模式也得到同样的结果.

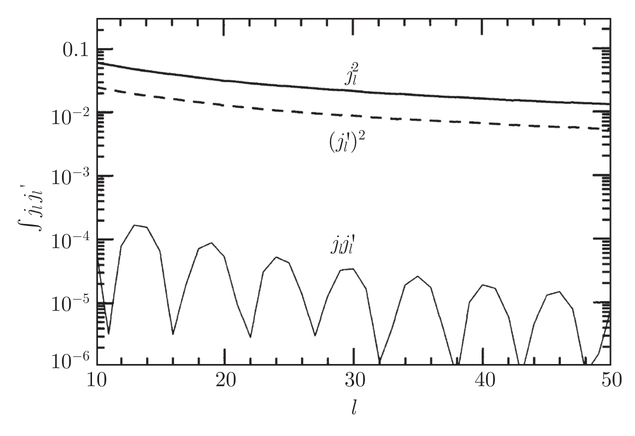


图 A.1　球贝塞尔函数乘积的积分

积分 $I_{lml'}$ 很重要. 通过重写勒让德多项式成 $[4\pi/(2l'+1)]^{1/2}Y_{l'0}/\mathrm{i}^{l'}$, 可以将 $I_{ll'}$ 变成对三个球谐函数乘积的积分. 这样的积分在量子力学中被集中研究过, 可以用 Wingner 3-j 符号表示. 关于这些东西我最喜欢的参考书 — 尤其对此积分有用 — 是*Quantum Mechanics* (Landau and Lifshitz), 像他们的理论物理课上的其他讲义一样精彩. 积分变成

$$I_{lml'}=\sqrt{\frac{32\pi^2}{15(2l'+1)}}\frac{1}{\mathrm{i}^{l'}}\langle lm|Y_{22}+Y_{2-2}|l'0\rangle \tag{A.101}$$

当 $m=2$ 或者 -2 时, 不为零. 当 m 取其中一个值时, 矩阵元素为

$$\langle l2|Y_{22}+Y_{2-2}|l'0\rangle=\mathrm{i}^{l'-1}\begin{pmatrix} l & 2 & l' \\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}\left[\frac{5(2l'+1)(2l+1)}{4\pi}\right]^{1/2}\begin{pmatrix} l & 2 & l' \\ -2 & 2 & 0\end{pmatrix}. \tag{A.102}$$

这里第一个 3-j 符号, 即底部一行全为零, 会消失, 除非顶部一行 $l+l'+2$ 所有元素之和为偶数. 当然 l' 与 l 相差不能多于 2, 因为组合 $Y_{22}Y_{l'0}$ 导致角动量范围从 $l'-2$ 到 $l'+2$. 只有当 $l'=l-2,l,l'+2$ 时矩阵元素不为零. 利用*Quantum Mechanics*第 106 节的表 9 可得最终结果

$$I_{lml'}=\sqrt{\frac{8\pi}{3}}\sqrt{2l+1}\mathrm{i}^{-l}(\delta_{m,2}+\delta_{m,-2})[c_{-2}\delta_{l',l-2}+c_0\delta_{l',l}+c_2\delta_{l',l+2}] \tag{A.103}$$

此处 $\delta_{m,2}$(以及所有其他 $\delta's$) 为 Kronecker delta 函数, 当 $m=2$ 时为 1, 否则为 0.

系数为

$$
\begin{aligned}
c_{-2} &= \frac{\sqrt{6}}{4}\frac{[(l-1)l(l+1)(l+2)]^{1/2}}{(2l-3)(2l-1)(2l+1)},\\
c_0 &= \frac{-2\sqrt{6}}{4}\frac{[(l-1)l(l+1)(l+2)]^{1/2}}{(2l-1)(2l+1)(2l+3)},\\
c_2 &= \frac{\sqrt{6}}{4}\frac{[(l-1)l(l+1)(l+2)]^{1/2}}{(2l+1)(2l+3)(2l+5)}.
\end{aligned}
\tag{A.104}
$$

接下来是 (8.93) 式的结果.

18. (a) 大尺度上, 我们可取 h 为物质为主的结果, 所以

$$
\Theta_{l,i} = \frac{-1}{2}\int_{\eta_*}^{\eta_0} \mathrm{d}\eta j_l[k(\eta_0-\eta)]\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\eta}\left[\frac{3j_1(k\eta)}{k\eta}\right]P_h^{1/2}. \tag{A.105}
$$

利用引力波的最初振幅 $P_h^{1/2}$, 按括号中的形式随时间变化. 代入 (8.93) 式得

$$
\begin{aligned}
C_l^T =& 2\frac{9(l-1)l(l+1)(l+2)}{4\pi}\int_0^\infty \mathrm{d}kk^2P_h(k)\Big|\int_0^{\eta_0}\mathrm{d}(k\eta)\frac{j_2(k\eta)}{k\eta}\\
&\times\left[\frac{j_{l-2}(k[\eta_0-\eta])}{(2l-1)(2l+1)}+2\frac{j_l(k[\eta_0-\eta])}{(2l-1)(2l+3)}+\frac{j_{l+2}(k[\eta_0-\eta])}{(2l+1)(2l+3)}\right]\Big|^2,
\end{aligned}
\tag{A.106}
$$

因为 $\eta_* \ll \eta_0$, 所以令时间积分的下限为 0. 而且已利用等式 $(j_1/x)' = -j_2/x$. 前面的因子 2 来自对应 + 和 × 成分的求和. 对 P_h 利用 (6.100) 式 (在慢滚近似下 $\varepsilon = 0$,$\nu = 3/2$) 并定义新的积分变量 $y \equiv k\eta_0$ 和 $x \equiv k\eta$ 得

$$
\begin{aligned}
C_l^T =& 36\left(\frac{H_{\rm inf}}{m_{\rm Pl}}\right)^2(l-1)l(l+1)(l+2)\int_0^\infty\frac{\mathrm{d}y}{y}\Big|\int_0^y\mathrm{d}x\frac{j_2(x)}{x}\\
&\times\left[\frac{j_{l-2}(y-x)}{(2l-1)(2l+1)}+2\frac{j_l(y-x)}{(2l-1)(2l+3)}+\frac{j_{l+2}(y-x)}{(2l+1)(2l+3)}\right]\Big|^2.
\end{aligned}
\tag{A.107}
$$

此处的 $H_{\rm inf}$ 表示暴胀时期的哈勃率, 精确来说是穿越视界模式 $(k\eta = -1)$ 下的哈勃率. 这个表达式对于低阶矩很适合. 要想得到更好的结果需处理转移方程 (5.88) 式.

(b) 对于 $l = 2$ 模式,(A.107) 式中的双重积分等于 2.139×10^{-4}, 所以 $C_2^T = 0.185(H/m_{\rm Pl})^2$. 尺度 C_2 等于 $\pi\delta_H^2 = 12$. 利用 (6.100) 式得

$$
r = 13.86\varepsilon. \tag{A.108}
$$

(c) 结合 (6.104) 式, 我们期望

$$
r = -6.93n_T. \tag{A.109}
$$

对于许多模式, 暴胀参数 $\delta=-\varepsilon$, 所以

$$n-1=-n_T. \tag{A.110}$$

第九章

2. 在 $k_3=0$ 处展开功率谱得到

$$P(\sqrt{k_3^2+(H_0\kappa/\chi)^2})=P(H_0\kappa/\chi)+\frac{1}{2k}\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}k}|_{k_3=0}k_3^2+\ldots. \tag{A.111}$$

对于平滑功率谱,$\mathrm{d}P/\mathrm{d}k$ 是 P/k 的量级, 因而 k_3^2 的系数为 P/k^2 的量级.$k=H_0\kappa/\chi$, 这个系数为 $P\chi^2/(H_0\kappa)^2$ 的量级. 可以将 k_3^2 写成 $-H_0^2\partial^2/\partial\chi^2$ 代入 (9.9) 式的指数中. 假设这个选择方程比较平滑, 是 H_0^2/χ^2 的量级. 因而对于主导项的第一个改正是 $1/\kappa^2$ 的量级, 只要被探测的角度范围不太, 它的值会很小.

3. 定义变量 $\chi\equiv H_0\kappa/k$. 那么

$$F=H_0\int\frac{\mathrm{d}\chi}{2\pi\chi}J_0(k\theta_\chi/H_0)W^2(\chi), \tag{A.112}$$

该表达式只与 $k\theta$ 有关.

5. 为写出 C_l^{matter} 关于 w 的表达式,(9.66) 式两边同乘 $\mathcal{P}_{l'}(\cos\theta)$, 并对 $\mu\equiv\cos\theta$ 积分. 得到

$$C_l^{\mathrm{matter}}=2\pi\int_{-1}^{1}\mathrm{d}\cos\theta\mathcal{P}_1(\cos\theta)w(\theta). \tag{A.113}$$

将 w 写成 (9.13) 式第一行那样的对于 2 维功率谱的积分. 那么

$$C_l^{\mathrm{matter}}=\int_0^{\infty}\mathrm{d}l'l'P_2(l')\int_{-1}^{1}\mathrm{d}\cos\theta\mathcal{P}_1(\cos\theta)J_0(l'\theta). \tag{A.114}$$

注意 P 的不同：第一个 P_2 表示 2 维功率谱, 第二个 $\mathcal{P}_l$ 是勒让德多项式. 在 l' 取较大值的极限情况下, 贝塞尔方程变为

$$J_0(l'\theta)\to\mathcal{P}_{l'0}(\cos\theta). \tag{A.115}$$

因而, 只有当 $l=l'$ 时, 对 θ 的积分不为零, 其值为 $2/(2l+1)$. 在大 l' 时, 因为 $\mathrm{d}l'\to 1$, 对 l' 的积分等于对所有 l' 的积分之和. 分母中的因子 $2/(2l+1)$ 与分子中的 l' 抵消, 得到了想要的 2 维功率谱和 C_l^{matter} 之间的等式.

第十章

2. 探测器接收到总强度是 $I_{\mathrm{obs}}(\theta)$ 对 θ 的角积分. 发射的总强度是 $I_{\mathrm{true}}(\theta_S)$ 对 θ_S 的角积分.μ 的大小是二者的比值：

$$\mu\equiv\frac{\displaystyle\int\mathrm{d}^2\theta I_{\mathrm{obs}}(\theta)}{\displaystyle\int\mathrm{d}^2\theta_S I_{\mathrm{true}}(\theta_S)}. \tag{A.116}$$

将分母上的变量改为 θ, 得到因子 $\det(A)$, 其中 A 由 (10.15) 式定义. 因为 $I_{\rm true}(\theta_S) = I_{\rm obs}(\theta)$, 所以除了行列式外, 分子和分母相消. 得到

$$\mu = \frac{1}{\det(A)} = \frac{1}{(1-\kappa)^2 - (\gamma_1^2 + \gamma_2^2)}. \tag{A.117}$$

如果所有的扰动均很小, 那么上式的大小只依赖于 κ:

$$\mu \simeq 1 + 2\kappa. \tag{A.118}$$

3. (a) 由 (10.14) 式可知

$$\phi = 2\int_0^{\chi_S} \mathrm{d}\chi \frac{\chi_S - \chi}{\chi_S \chi} \Phi(\chi\vec{\theta}, \chi), \tag{A.119}$$

其中让 (10.14) 式 $\chi \to \chi_S$, 并用 χ 代替 χ'. 唯一不同的是分母上多出因子 χ. 这是因为将对位置的导数 ((10.14) 式的逗号) 变成对角度的导数.

4. 在牛顿限制下, 引力势可以写成质量密度的形式:

$$\Phi(\vec{x}) = -G\int \frac{\mathrm{d}^3 x'}{|\vec{x} - \vec{x}'|} \rho(\vec{x}'). \tag{A.120}$$

我们在柱坐标系下进行积分, 所以 $\vec{x}' = (\vec{R}, x')$。因此有

$$\phi \simeq -2G\frac{\chi_S - \chi_L}{\chi_S \chi_L} \int \mathrm{d}^2 R \int \mathrm{d}\chi' \rho(\vec{R}, \chi') \int_0^{\chi_S} \frac{\mathrm{d}\chi}{\sqrt{(\vec{R} - \chi_L\vec{\theta})^2 + (\chi - \chi')^2}} \tag{A.121}$$

其中放到前面的缓慢变化的因子中已令 $\chi = \chi_L$. 最里面的积分可得到解析解, 它等于

$$2\ln|x + \sqrt{(\vec{R} - \chi_L\vec{\theta} + x^2)}|_0^\infty$$

其中已令上限为无穷大, 因为大的 x 对于投影势的相关部分没有贡献. 实际上, 唯一和 $\vec{\theta}$ 有关的部分 (因而当求导时不为零) 来自下限: $-2\ln|\vec{R} - \chi_L\vec{\theta}|$. 对 χ' 的积分变成面密度, 即所求的结果.

第十一章

4. 在 $\bar{n}$ 为常数情况下，噪声矩阵为

$$(C_N)_{ij} = \frac{1}{\bar{n}} \int \mathrm{d}^3 x \psi_i(\vec{x}) \psi_j(\vec{x}). \tag{A.122}$$

首先考虑矩阵的对角元素.ψ_i 和 ψ_j 两者都需要 x 在距离第 i 个单元中心为 R 的半径之内, 所以

$$(C_N)_{ii} = \bar{n} \int_{x<R} \mathrm{d}^3 x = \frac{4\pi\bar{n}R^3}{3}, \tag{A.123}$$

(不需要将 i 加起来). 对于距离超过 $2R$ 的圆, 积分为零, 因为 $\vec{x}$ 不可能同时存在在两个圆内. 对于距离小于 $2R$ 的情况, 有重叠区域, 积分变为

$$\bar{n}\int_{x<R} \mathrm{d}^3x\Theta(R-|\vec{x}-\vec{r}|) = 2\pi\bar{n}\int_0^R \mathrm{d}xx^2\int_{-1}^1 \mathrm{d}\mu\Theta(R-\sqrt{x^2+r^2-2xr\mu}). \quad (\text{A.124})$$

其中 $\vec{r}$ 是两个圆心之间的距离,Θ 是步函数 (step function), 当参数为正时, 它的值为 1, 否则为 0. 因而 μ 的积分从 $(x^2+y^2-R^2)/2xr$ 积到 1. 如果下限大于 1, 积分为零, 否则它是统一的 (it is unity). 只有当下限小于 1 时才有值, 此时 x 位于 $r \pm R$. 因而积分变为

$$\int_{r-R}^R \mathrm{d}xx^2\left[1-\frac{x^2+r^2-R^2}{2xr}\right] = \frac{1}{2r}\int_{r-R}^R \mathrm{d}xx[2xr-(x^2+r^2-R^2)]. \quad (\text{A.125})$$

x 的积分很简单, 因为它只是 x 幂的形式. 可得

$$(C_N)_{ij} = \frac{\pi\bar{n}R^3}{12}\left(2-\frac{r_{ij}}{R}\right)^2\left(4+\frac{r_{ij}}{R}\right). \quad (\text{A.126})$$

7. 我们需要计算 (11.55) 式的积分. 因为窗函数在小尺度模式下是急剧上升的, 我们可以将 k 设成 k_i. 插入有限体积下的窗函数的表达式 ((11.59) 式), 得到

$$(C_S)_{ii} \simeq \frac{9P(k_i)}{4\pi^2R^2}\int_0^\infty \mathrm{d}k\int_{|k-k_i|R}^{(k+k_i)R}\frac{\mathrm{d}y}{y}j_1^2(y). \quad (\text{A.127})$$

求此积分最好的方法是交换积分顺序. 考虑图 A.2, 它给出了积分区域. 水平线以下的区域对应于 $y \leqslant k_iR$ 和 $k_i-y/R \leqslant k \leqslant k_i+y/R$. k 以上的区域的边界为 $y/R \pm k_i$. 因此

$$\begin{aligned}\int_0^\infty \mathrm{d}k\int_{|k-k_i|R}^{(k+k_i)R}\frac{\mathrm{d}y}{y}j_1^2(y) &= \int_0^{k_i}\frac{\mathrm{d}y}{y}j_1^2(y)\int_{k_i-y/R}^{k_i+y/R}\mathrm{d}k + \int_{k_iR}^\infty\frac{\mathrm{d}y}{y}j_1^2(y)\int_{y/R-k_i}^{k_i+y/R}\mathrm{d}k \\ &= \frac{2}{R}\int_0^{k_iR}\mathrm{d}yj_1^2(y) + 2k_i\int_{k_iR}^\infty\frac{\mathrm{d}y}{y}j_1^2(y). \quad (\text{A.128})\end{aligned}$$

在 $k_iR \gg 1$ 极限下, 这里的第一项远大于第二项 (因为对于大的 y 值，$j_1^2(y)$ 以形式 $1/y^2$ 变化). 在第一个积分中, 因为 k_iR 很大, 上限可用无穷代替. 积分结果为 ((C.17) 式)$\pi\Gamma(3/2)/4\Gamma(5/2) = \pi/6$. 乘以 $2/R$, 再乘以 $9/4\pi^2R^2$, 可得到因子 $1/V$.

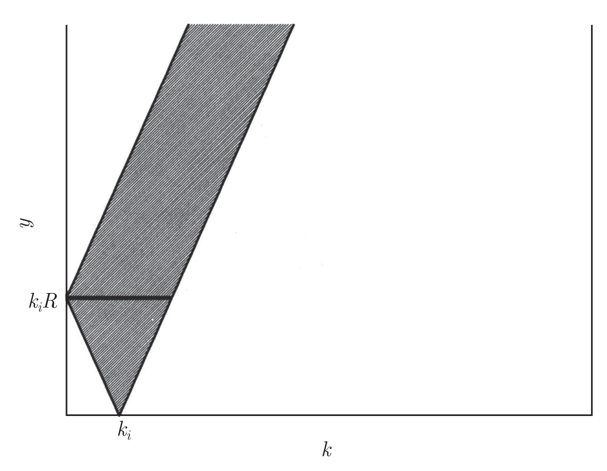


图 A.2　(A.128) 式双重积分的积分区域. 水平线以下的区域贡献了第一项, 水平线以上的区域贡献了第二项

9. 需计算方差

$$\langle(\hat{\lambda}-\bar{\lambda})^2\rangle = \left\langle\left(F_{\lambda\lambda}^{-1}\frac{\Delta C^{-1}C_{,\lambda}C^{-1}\Delta - \mathrm{Tr}[C^{-1}C_{,\lambda}]}{2}\right)\right\rangle^2, \tag{A.129}$$

其中估计值 $\hat{\lambda}$ 由 (11.92) 式给出, 假设 $\lambda^{(0)}=\bar{\lambda}$, 比如我们处在似然方程的最大值处. 上面的平方中有没有 Δ 的项; 有的有两个 Δ, 有的有四个. 有两个 Δ 的项可以利用下式简单地计算出来,

$$\langle\Delta_i\Delta_j\rangle = C_{ij}, \tag{A.130}$$

其中角标指像素. 既然分布假设为是高斯的, 四个 Δ 的期望值就应为

$$\langle\Delta_i\Delta_j\Delta_k\Delta_l\rangle = C_{ij}C_{kl}+C_{ik}C_{jl}+C_{il}C_{jk}. \tag{A.131}$$

代入这些期望值得到

$$\begin{aligned}\langle(\hat{\lambda}-\bar{\lambda})^2\rangle = \frac{F_{\lambda\lambda}^{-2}}{4}\{&[C^{-1}C_{,\lambda}C^{-1}]_{ij}[C^{-1}C_{,\lambda}C^{-1}]_{kl}(C_{ij}C_{kl}+C_{ik}C_{jl}+C_{il}C_{jk})\\ &-(\mathrm{Tr}[C^{-1}C_{,\lambda}])^2\}.\end{aligned} \tag{A.132}$$

$(\mathrm{Tr}[C^{-1}C_{,\lambda}])^2$ 项等于 $C_{ij}C_{kl}$ 项, 和最后一项相消, 得

$$\langle(\hat{\lambda}-\bar{\lambda})^2\rangle = \frac{F_{\lambda\lambda}^{-2}}{4}[C^{-1}C_{,\lambda}C^{-1}]_{ij}[C^{-1}C_{,\lambda}C^{-1}]_{kl}(C_{ij}C_{jl}+C_{il}C_{jk}). \tag{A.133}$$

这两项贡献相同 (给出一个 2). 矩阵的相乘可以简化, 因为所有的矩阵都是对称的. 例如

$$[C^{-1}C_{,\lambda}C^{-1}]_{ij}[C^{-1}C_{,\lambda}C^{-1}]_{kl}C_{ik}C_{jl} = \mathrm{Tr}[C^{-1}C_{,\lambda}C^{-1}C_{,\lambda}], \tag{A.134}$$

得知右边项为 $2F_{\lambda\lambda}$(另一个 2). 因而

$$\langle(\hat{\lambda}-\bar{\lambda})^2\rangle = F_{\lambda\lambda}^{-1}. \tag{A.135}$$

需注意等式只有在高密度以高斯形式分布且处于参数空间中最大值处时才成立.

15. (a) 应用似然近似. 参数的似然方程, 这针对于不同 Θ_α 的大小, 正比于 $\mathrm{e}^{-\chi^2/2}$, 其中

$$\chi^2 = (d - W\Theta)N^{-1}(d - W\Theta) + \sum_{\alpha=1}^{\mathrm{N_{foregrounds}}} (\Theta^\alpha)^2/C^\alpha. \tag{A.136}$$

第一项等于由 (11.114) 式产生的结果. 第二项是对先验的说明, 即 Θ_α 的均值为 0, 方差为 C^α. 最大似然对应 χ^2 关于参数 Θ 的最小值. 因为 χ^2 是二次的, 最小化时可得到一个 Δ^α 的线性方程, 即 Θ^α 的最小方差:

$$\Delta = (WN^{-1}W + C^{-1})^{-1}WN^{-1}d. \tag{A.137}$$

这个新的协方差矩阵就是式子右边的第一项,

$$C_N = (WN^{-1}W + C^{-1})^{-1}. \tag{A.138}$$

矩阵 C 是对角的,$_{00}$ 元素为 0, 其他对角项等于假设的前景功率谱.

(b) 如果只有一个前景, 形状向量为 $W^1 = (1, 1/2)$, 其功率等于噪声, 一个新的逆协方差矩阵和 (11.151) 式相同, 只是项前增加了 $1/\sigma_n^2$. 因而

$$C_N^{-1} = \frac{1}{\sigma_n^2}\begin{pmatrix} 2 & 3/2 \\ 3/2 & 9/4 \end{pmatrix}. \tag{A.139}$$

注意到 $_{00}$ 项没变, 这是必然的, 因为若所有前景已知的话它就是逆协方差. 它的逆矩阵给出了一个新的协方差矩阵

$$C_N = \frac{4\sigma_n^2}{9}\begin{pmatrix} 9/4 & -3/2 \\ -3/2 & 2 \end{pmatrix}. \tag{A.140}$$

可知前景存在下的噪声为 σ_n. 如果我们没有前景大小的先验的话, 它会小 $\sqrt{5}$. 只比没有前景下大 $\sqrt{2}$; 这种情况下新的 FDF 为 $\sqrt{2}$. 最小方差的估计值为

$$\begin{aligned}\Delta^0 &= \frac{4\sigma_n^2}{9}(9/4, -3/2)\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1/2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1/\sigma_n^2 & 0 \\ 0 & 1/\sigma_n^2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \end{pmatrix} \\ &= \frac{d_1 + 2d_2}{3}.\end{aligned} \tag{A.141}$$

附录 B 基 本 常 数

括号当中的数字表示最后几位以相同标准推导出的不确定度 (例如, 里德伯常量 $\varepsilon_0 = 13.60569172 \pm 5.3 \times 10^{-7}$eV), 这些常数中的大部分, 至少对物理常数而言, 来自 Particle Data Group(Groom et al., 2001).

B.1 物理学中的一些常数

精细结构常数	$\alpha =$	$1/137.03599976(50)$
里德伯常量	$\varepsilon_0 =$	$m_e c^2 \alpha^2/2$
	$=$	$13.60569172(53)\text{eV}$
汤姆孙散射截面	$\sigma_{\text{T}} =$	$8\pi\alpha^2\hbar^2/3m_e^2c^2$
	$=$	$0.665245854(15) \times 10^{-24}\text{cm}^2$
中子寿命	$\tau_{\text{n}} =$	$885.7(0.8)\,\text{sec}$
光速	$c =$	$2.99792458 \times 10^{10}\text{cm} \cdot \text{sec}^{-1}$
费米常数	$G_{\text{F}} =$	$1.16639(1) \times 10^{-5}\text{GeV}^{-2}(\hbar c)^3$
引力常数	$G =$	$6.673(10) \times 10^{-8}\text{cm}^{-3}\text{g}^{-1}\,\text{sec}^{-2}$
	$=$	$\hbar c^5 m_{\text{Pl}}^{-2}$
约化普朗克常数	$\hbar =$	$6.58211889(26) \times 10^{-16}\text{eV}\,\text{sec}$
	$=$	$1.973269602(77) \times 10^{-5}\text{eV cm}/c$
玻尔兹曼常数	$k_{\text{B}} =$	$8.617342(15) \times 10^{-5}\text{eV K}^{-1}$
电子质量	$m_{\text{e}} =$	$0.510998902(21)\text{MeV}/c^2$
中子质量	$m_{\text{n}} =$	$939.565330(38)\text{MeV}/c^2$
光子质量	$m_{\text{p}} =$	$1.67262158(13) \times 10^{-24}\text{g}$
	$=$	$938.271998(38)\text{MeV}/c^2$
普朗克质量	$m_{\text{Pl}} =$	$1.221 \times 10^{19}\text{GeV}/c^2$
	$=$	$1.094 \times 10^{-38}M_\odot$
中子–质子质量差	$Q =$	$1.2933\text{MeV}/c^2$

B.2　宇宙学中的一些常数

宇宙微波背景能量密度	$\rho_\gamma =$	$\pi^2 k_B^4 T^4/15(\hbar c)^3$
	$=$	$2.47\times 10^{-5} h^{-2}(T/T_0)^4 \rho_{cr}$
临界密度	$\rho_{cr} =$	$1.879h^2 \times 10^{-29}$g cm^{-3}
	$=$	$2.775h^2\times 10^{11} M_\odot$Mpc^{-3}
	$=$	$8.098h^2 \times 10^{-11}$eV$^4/(\hbar c)^3$
有质量中微子密度	$\Omega_\nu h^2 =$	$(m_\nu/94\text{eV})$
无质量中微子密度	$\Omega_\nu h^2 =$	$1.68\times 10^{-5}(N/3)$
辐射物质相等时期的尺度因子	$a_{eq} =$	$4.15\times 10^{-5}(\Omega_m h^2)^{-1}$
辐射物质相等时期的波数	$k_{eq} =$	$0.073\Omega_m h^2$Mpc^{-1}
哈勃常数	$H_0 =$	$100h$ km sec^{-1} Mpc^{-1}
	$=$	$2.133h\times 10^{-42}$GeV$/\hbar$
	$=$	$1.023h \times 10^{-10}$year^{-1}
太阳质量	$M_\odot =$	1.989×10^{33}g
	$=$	1.116×10^{57}GeV$/c^2$
秒差距	pc$=$	3.0856×10^{18}cm
目前的宇宙微波背景温度	$T_0 =$	2.725(2)K
	$=$	2.348×10^{-4}eV$/k_B$

附录 C　特 殊 函 数

这里简单总结了一下特殊函数, 重点是本书中涉及的相关计算. 对于更完整的分析, 详见：*Handbook of Mathematical Functions* (Abramowitz and Stegun).

C.1　勒让德多项式

$\mathcal{P}_l(\mu)$ 表示关于 μ 的 l 次勒让德多项式, 在 $-1 \leqslant \mu \leqslant 1$ 的范围内,$\mathcal{P}_l(\mu)$ 共有 l 个零点. 下面列出几个特殊值：

$$\mathcal{P}_0(\mu) = 1; \quad \mathcal{P}_1(\mu) = \mu; \quad \mathcal{P}_2(\mu) = \frac{3\mu^2 - 1}{2}. \tag{C.1}$$

从上述多项式可以看出, 当 l 为偶数时,$\mathcal{P}_l(\mu)$ 是关于 μ 的偶函数; 当 l 为奇数时,$\mathcal{P}_l(\mu)$ 为奇函数, 并且 Legendre 多项式具有正交性, 即

$$\int_{-1}^{1} \mathrm{d}\mu \mathcal{P}_l(\mu)\mathcal{P}_{l'}(\mu) = \delta_{ll'}\frac{2}{2l+1}. \tag{C.2}$$

为了从低阶 Legendre 多项式得到高阶表达式, 可以使用以下递推关系

$$(l+1)\mathcal{P}_{l+1}(\mu) = (2l+1)\mu\mathcal{P}_l(\mu) - l\mathcal{P}_{l-1}(\mu). \tag{C.3}$$

这个关系对于描述动量形式的玻尔兹曼方程是重要的.

C.2　球 谐 函 数

球谐函数是 Laplacian(拉普拉斯) 角分量的特征函数, 即

$$\left[\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2}{\partial\phi^2}\right]Y_{lm}(\theta,\phi) = -l(l+1)Y_{lm}(\theta,\phi). \tag{C.4}$$

本书中, 我们将 CMB 温度函数分解成了球谐函数 ((8.60) 式), 这与平坦空间的傅里叶分解是相似的.CMB 温度是在球坐标中定义的, 即它是关于 θ, ϕ 的函数, 然而, 就星系密度而言, 它却是三维空间坐标的函数, 因此, 要将其展开为傅里叶级数形式. 以下是若干展开形式：

$$Y_{00}(\theta,\phi) = \frac{1}{\sqrt{4\pi}} \tag{C.5}$$

$$Y_{10}(\theta,\phi) = \mathrm{i}\sqrt{\frac{3}{4\pi}}\cos(\theta) \tag{C.6}$$

$$Y_{1,\pm1}(\theta,\phi) = \mp\mathrm{i}\sqrt{\frac{3}{8\pi}}\sin(\theta)\mathrm{e}^{\pm\mathrm{i}\phi} \tag{C.7}$$

$$Y_{20}(\theta,\phi) = \sqrt{\frac{5}{16\pi}}(1-3\cos^2\theta) \tag{C.8}$$

$$Y_{2,\pm1}(\theta,\phi) = \pm\mathrm{i}\sqrt{\frac{15}{8\pi}}\cos\theta\sin\theta\mathrm{e}^{\pm\mathrm{i}\phi} \tag{C.9}$$

$$Y_{2,\pm2}(\theta,\phi) = -\sqrt{\frac{15}{32\pi}}\sin^2\theta\mathrm{e}^{\pm2\mathrm{i}\phi}. \tag{C.10}$$

上述函数都是正交的, 其一般形式为

$$\int \mathrm{d}\Omega Y^*_{lm}(\Omega)Y_{l'm'}(\Omega) = \delta_{ll'}\delta_{mm'}. \tag{C.11}$$

另一个有用的表达式是将勒让德多项式表示为球谐函数乘积的和的形式:

$$\mathcal{P}_l(\hat{x}\cdot\hat{x}') = \frac{4\pi}{2l+1}\sum_{m=-1}^{l} Y_{lm}(\hat{x})Y^*_{lm}(\hat{x}'). \tag{C.12}$$

C.3 球贝塞尔函数

由于宇宙背景辐射和大尺度结构在整个天空表现出的不均匀性, 球 Bessel 函数对这方面的研究具有重要意义. 它们满足微分方程:

$$\frac{\mathrm{d}^2 j_l}{\mathrm{d}x^2} + \frac{2}{x}\frac{\mathrm{d}j_l}{\mathrm{d}x} + \left[1 - \frac{l(l+1)}{x^2}\right]j_l = 0. \tag{C.13}$$

最低阶的几个为

$$j_0(x) = \frac{\sin(x)}{x};\quad j_1(x) = \frac{\sin x - x\cos x}{x^2}. \tag{C.14}$$

联系勒让德多项式和球贝塞尔函数的主要积分关系为

$$\frac{1}{2}\int_{-1}^{1}\mathrm{d}\mu P_l(\mu)\mathrm{e}^{\mathrm{i}z\mu} = \frac{j_l(z)}{(-\mathrm{i})^l}. \tag{C.15}$$

反解此式可以得到一个有用的傅里叶基函数表达式

$$\mathrm{e}^{\mathrm{i}\vec{k}\cdot\vec{x}} = \sum_{l=0}^{\infty}\mathrm{i}^l(2l+1)j_l(kx)P_l(\hat{k}\cdot\hat{x}). \tag{C.16}$$

对于 Sachs-Wolfe 效应还存在一个重要的积分:

$$\int_0^\infty \mathrm{d}x x^{n-2} j_l^2(x) = 2^{n-4}\pi\frac{\Gamma\left(l+\frac{n}{2}-\frac{1}{2}\right)\Gamma(3-n)}{\Gamma\left(l+\frac{5}{2}-\frac{n}{2}\right)\Gamma^2\left(2-\frac{n}{2}\right)}. \tag{C.17}$$

另一个消除导数的重要关系是

$$\frac{\mathrm{d}j_l}{\mathrm{d}x} = j_{l-1} - \frac{l+1}{x} j_l. \tag{C.18}$$

C.4 傅里叶变换

我们采用的傅里叶变换形式为

$$\begin{aligned} f(\vec{x}) &= \int \frac{\mathrm{d}^3 k}{(2\pi)^3} \mathrm{e}^{\mathrm{i}\vec{k}\cdot\vec{x}} \tilde{f}(\vec{k}), \\ \tilde{f}(\vec{k}) &= \int \mathrm{d}^3 x \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\vec{k}\cdot\vec{x}} f(\vec{x}). \end{aligned} \tag{C.19}$$

于是, 功率谱可以写成相关函数的傅里叶变换形式, 即

$$\langle \tilde{\delta}(\vec{k}) \tilde{\delta}(\vec{k}') \rangle = (2\pi)^3 \delta^3(\vec{k} - \vec{k}') P(k). \tag{C.20}$$

C.5 其他特殊函数

我们需要两个涉及一般 Bessel 函数的关系式

$$J_n(x) = \frac{\mathrm{i}^{-n}}{\pi} \int_0^{\pi} \mathrm{d}\theta \mathrm{e}^{\mathrm{i}x\cos\theta} \cos(n\theta) \tag{C.21}$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}[xJ_1(x)] = xJ_0(x). \tag{C.22}$$

整数阶 Γ 函数与阶乘存在简单的关系:

$$\Gamma(n+1) = n!. \tag{C.23}$$

当 x 非整数时, 一般的情况为

$$\Gamma(x+1) = x\Gamma(x) \tag{C.24}$$

对于一个 Harrison-Zel'dovich-Peebles 类型的光谱 $(n = 1)$,Sachs-Wolfe 积分 ((C.17) 式) 依赖于

$$\Gamma(3/2) = \frac{\sqrt{\pi}}{2}. \tag{C.25}$$

在统计力学中, Riemann ζ 函数对估算积分是实用的, 尤其是

$$\zeta(s) = \frac{1}{\Gamma(s)} \int_0^{\infty} \mathrm{d}x \frac{x^{s-1}}{\mathrm{e}^x - 1} = \frac{1}{(1-2^{1-s})\Gamma(s)} \int_0^{\infty} \mathrm{d}x \frac{x^{s-1}}{\mathrm{e}^x + 1}. \tag{C.26}$$

以下是一些低阶整型 Riemann ζ 函数

$$\zeta(2) = \frac{\pi^2}{6}; \quad \zeta(3) = 1.202; \quad \zeta(4) = \frac{\pi^4}{90}. \tag{C.27}$$

附录 D 符 号 表

符号	注释
$\cdot$	对时间 (第四章之前) 或共形时间 (第四章之后) 的导数
$\alpha^{(2)}$	氢原子的复合率
β	氢原子的电离率
$\Gamma^{\mu}_{\alpha,\beta}$	克氏符
$\gamma_{1,2}$	剪切量的两个分量
Γ	决定功率谱的参数
δ_b	重子密度扰动
$test_i$	在像素 i 中的估计各向异性
$\Delta^2(k)$	k 尺度的无量纲功率谱
δ	暗物质的密度扰动
δ	慢滚参数 (仅第六章)
$\delta^D(\overrightarrow{k}-\overrightarrow{k}')$	D 维下的狄拉克 delta 函数
$\delta\phi$	标量场中驱动暴胀的扰动
δT^{μ}_{ν}	对能量张量的扰动
δ_{ij}	Kronecker δ 函数 $=0$ $(i \neq j)$ 或 $=1(i=j)$
δ_H	视界原初扰动幅度
ε	慢滚参数
$\hat{\varepsilon}$	单位矢量偏振
$\varepsilon_{1,2}$	椭率的两个分量
ε_0	氢原子的电离能，13.6eV
η	共形时间
η_*	再复合时的共形时间
$\eta_{\rm eq}$	物质辐射相等时的共形时间
η_b	重子熵之比
$\eta_{\rm prim}$	暴胀结束时的共形时间
$\eta_{\mu\nu}$	闵可夫斯基度规
Θ	光子扰动的分布
Θ_l	光子的勒让德矩
Θ_P	偏振扰动
Θ_r	辐射扰动 $=\rho_\gamma\Theta+\rho_\nu\mathcal{N}$
Θ^T	由于张量扰动导致的光子扰动
κ	会聚
Λ	宇宙学常数

符号	注释
μ	$\hat{k}$ 和 $\hat{p}$ 之间夹角的余弦值
$\xi(r)$	三维相关函数
ξ^0, ξ	坐标变换的的生成元
ρ_b	重子能量密度
$\rho_{\rm cr}$	临界能量密度
$\rho_{\rm de}$	暗能量密度
$\rho_{\rm dm}$	暗物质能量密度
$\rho_{\rm m}$	物质能量密度
ρ_γ	光子能量密度
ρ_ν	中微子能量密度
ρ_τ	总辐射能量密度
σ_T	Thomson 截面
$\tau(\eta)$	光子在共形时间 η 时的光深
$\dot{\tau}$	散射率
τ_n	中子寿命
Φ	度规的标量扰动
$\Phi_{\rm p}$	在暴胀期间设定的初始值 $\mathit{\Phi}$
$\phi^{(0)}$	驱动暴胀的场的零阶值
$\chi(z)$	随红移 z 变化的共动距离
χ_∞	红移为无穷时的共动距离
Ψ	度规的标量扰动
ψ_{ij}	2×2 的形变张量
Ω_i	第 i 种单位能量密度 (除以临界密度)
Ω_k	曲率密度除以临界密度
A_{ij}	2 阶变换矩阵
a	宇宙尺度因子
a_*	再复合时的尺度因子
$a_{\rm eq}$	物质和辐射相等时的尺度因子
$a_{\rm late}$	在较晚时刻 (此刻之后扰动以 D_1 形式演化) 的尺度因子
B	偏振或者弱引力透镜的 B 模式
B_D	氘子的结合能
C	总协方差矩阵
$\mathcal{C}$	带通功率
$C_l^{\rm matter}$	物质的角功率谱
c_s	声速
C_N	噪声的协方差矩阵
C_S	信号的协方差矩阵
D_1	增长函数
d_A	角直径距离
d_L	光度距离
E	偏振或者弱引力透镜下的 E 模式

符号	注释
$F_{\alpha\beta}$	Fisher 矩阵
$\mathcal{F}$	曲率矩阵
f	分布函数，通常指光子
$f_{\rm dm}$	暗物质的分布函数
f_e	电子的分布函数
$f^{(0)}$	光子的零阶分布函数
$g(\eta)$	可见函数
g_*	相对论性粒子的有效自由度
$g_{\mu\nu}$	度规
g_i	第 i 类自旋态的数目
G	引力常数
$G_{\mu\nu}$	爱因斯坦张量
h	哈勃常数参量
$\tilde{h}$	示踪张量扰动的变量
$h_\times, h_+$	度规的张量扰动
$\mathcal{H}$	描述张量扰动的三维矩阵
H	哈勃膨胀率
H_0	今天的哈勃膨胀率
k	波数
$k_i = k^i$	波矢量
$k_{\rm eq}$	在 $a_{\rm eq}$ 时穿过视界的波数
$k_{\rm nl}$	非线尺度的波数
$k_{\rm p}$	声学峰的位置
$\mathcal{L}$	似然函数
$\mathcal{M}$	对一物理过程的粒子物理振幅
m_e	电子质量
m_n	中子质量
m_ν	中微子质量
$m_{\rm Pl}$	普朗克质量
m_p	质子质量
N_p	在一次实验中像素数目
n_b	重子数密度
$n_{\rm dm}$	暗物质数密度
$n_{\rm dm}^{(0)}$	零阶暗物质数密度
$n^{(0)}$	平衡态处的数密度
$\mathcal{N}$	中微子分布函数的扰动
$\mathcal{P}_l$	l 阶勒让德多项式
$\mathcal{P}$	压强
P^α	4 维共动能量动量矢量
p	固有动量
$P(k)$	物质功率谱
$P_\Phi(k)$	引力势能功率谱

符号	注释
$\dot{p}^i = \dot{p}_i$	单位方向矢量
$\mathcal{Q}$	质子和中子的质量差
Q	斯托克斯参量
r	张量–标量扰动比
r_s	声视界
$R_{\mu\nu}$	里奇张量
$\mathcal{R}$	里奇标量 $=g^{\mu\nu}R_{\mu\nu}$
R	重子与光子之比，$3\rho_b/4\rho_\gamma$
s	熵密度
t	宇宙年龄
$T_{\rm ant}$	天线温度
T	零阶光子温度
$T_{\mu\nu}$	应力–能量张量
U	斯托克斯参量
$\vec{v}_{\rm b} = \hat{h}\nu_{\rm b}$	重子速度
$\vec{v} = \hat{k}\nu$	暗物质速度
$\upsilon_{\rm H}$	哈勃膨胀速度
$\upsilon_{\rm pec}$	本动速度
w	压强与能量密度之比
$w(\theta)$	角相关函数
$X_{\rm e}$	自由电子丰度
X_n	中子丰度
$X_{n,{\rm EQ}}$	平衡中子的丰度
Y_p	^{4}He 的质量比例
y	宇宙尺度因子 (使得 a_{eq} 归一化为 1)
y_H	当某个尺度穿过视界时的 y 值
$y_{\rm EQ}$	暗物质粒子的平衡态丰度
z	红移
z_*	再复合时的红移
$z_{\rm eq}$	物质和辐射相等时的红移

参 考 书 目

Papers typically appear first as preprints on the archive at http://arXiv.org.Those which have not been published in paper journals by 2002 are listed below with their *astro-ph* number. For example, the Stebbins paper referenced with astro-ph/9609149 can be accessed at http://arXiv.org/abs/astro-ph/?9609149. These articles are often even easier to retrieve than those in the standard journals

M.Abramowitz and I. Stegun, *Handbook of Mathematical Functions, with Formulas, Graphs, and Mathematical Tables* (Dover, 1974)

R. Abusaidi *et al.*, *Physical Review Letters* **84**, 5699 (2000)

A. Albrecht and A. S. Stebbins, *Physical Review Letters* **68**, 2121 (1992)

A. Albrecht and P. J. Steinhardt, *Physical Review Letters* **48**, 1220 (1982)

C. Alcock *et al.*, *Nature* **365**, 621 (1993)

R. A. Alpher, J. W. Follin, and R. C. Herman, *Physical Review* **92,** 1347 (1953)

R. A. Alpher and R. Herman, *Physics Today,* 24 (August 1988)

F. Atrio-Barandela and A. G. Doroshkevich, *Astrophysical Journal* **420**, 26 (1994)

D. Bacon, A. Refrgier, and R. S. Elhs, *Monthly Notices of Royal Astronomical Society* **318**, 625 (2000)

J. N. Bahcall, *Neutrino Astrophysics* (Cambridge University Press, Cambridge, 1989)

N. A. Bahcall, L. M. Lubin, and V. Dorman, *Astrophysical Journal* **447**, L81 (1995)

N. Bahcall *et al.*, *Astrophysical Journal* **541**, 1 (2000)

J. M. Bardeen, *Physical Review* **D22**, 1882 (1980)

J. M. Bardeen, J. R. Bond, N. Kaiser, and A. S. Szalay, *Astrophysical Journal* **304**, 15 (1986)

J. M. Bardeen, P. J. Steinhardt, and M. S. Turner, *Physical Review* **D28**, 679 (1983)

M. Bartelmann and P. Schneider, *Physics Reports* **340**, 291 (2001)

L. Baudis *et al.*, *Physical Review* **D63**, 022001 (2000)

C. M. Baugh and G. Efstathiou, *Monthly Notices of Royal Astronomical Society* **265**, 145 (1993)

R. H. Becker *et al.*, *Astronomical Journal* **122**, 2850 (2001)

C. L. Bennett *et al.*, *Astrophysical Journal* **464**, LI (1996)

A. J. Benson *et al.*, *Monthly Notices of Royal Astronomical Society* **327**, 1041 (2001)

A. A. Berlind and D. H. Weinberg, astro-ph/0109001

R. Bernabei *et al.*, *Physics Letters* **B450**, 448 (1999)

F. Bernardeau, L. V. Waerbecke, and Y. Mellier, *Astronomy and Astrophysics* **322**, 1 (1997)

J. Bernstein, *Three Degrees Above Zero: Bell Labs in the Information Age* (Scribner, 1984)

J. Bernstein, *Kinetic Theory in the Expanding Universe* (Cambridge University Press, Cambridge, 1988)

J. Bernstein, L. S. Brown, and G. Feinberg, *Reviews of Modern Physics* **61**, 25 (1989)

R. D. Blandford, A. B. Saust, T. G. Brainerd, and J. Villumsen, *Monthly Notices of Royal Astronomical Society* **251**, 600 (1991)

G. R. Blumenthal, S. M. Faber, J. R. Primack, and M. J. Rees, *Nature* **311**, 57 (1984)

J. D. Bjorken and S. D. Drell, *Relativistic Quantum Mechanics* (McGraw-Hill, New York, 1965)

J. R. Bond, *Physical Review Letters* **74**, 4369 (1995)

J. R. Bond, S. Cole, G. Efstathiou, and N. Kaiser, *Astrophysical Journal* **379**, 440 (1991)

J. R. Bond *et al., Computing in Science and Engineering* March-April, 21, (1999)

J. R. Bond and G. Efstathiou, *Astrophysical Journal* **285**, L45 (1984)

J. R. Bond, G. Efstathiou, P. M. Lubin, and P. R. Meinhold, *Physical Review Letters* **66**, 2179 (1991)

J. R. Bond, G. Efstathiou, and J. Silk, *Physical Review Letters* **45**, 1980 (1980)

J. R. Bond, A. H. Jaffe, and L. Knox, *Physical Review* **D57**, 2117 (1998)

J. R. Bond and A. Szalay, *Astrophysical Journal* **274**, 443 (1983)

J. R. Bond *et al.*, *Physical Review Letters* **72**, 13 (1994)

A. Bottino, F. Donato, N. Fornengo, and S. Scopel, *Physical Review* **D63**, 125003 (2001)

F. Bouchet and R. Gispert, *New Astronomy* **4**, 443 (1999)

R. Brandenberger, R. Kahn, and W. H. Press, *Physical Review* **D28**, 1809 (1983)

T. J. Broadhurst, A. N. Taylor, and J. A. Peacock, *Astrophysical Journal* **438**, 49 (1995)

E. F. Bunn, Ph.D. Thesis, U.C. Berkeley, 1995

E. F. Bunn and M. White, *Astrophysical Journal* **480**, 6 (1997)

S. Buries and D. Tytler, *Astrophysical Journal* **499**, 699 (1998)

S. Buries, K. M. Nollett, and M. S. Turner, astro-ph/9903300

R. R. Caldwell, R. Dave, and P. J. Steinhardt, *Physical Review Letters* **80**, 1582 (1998)

R. Carlberg *et al., Astrophysical Journal* **478**, 462 (1997)

D. Clowe *et al.*, *Astrophysical Journal* **497**, L61 (1998)

K. A. Coble, Ph.D. Thesis, U. Chicago, 1999, astro-ph/9911414

K. A. Coble, S. Dodelson, and J. A. Frieman, *Physical Review* **D55**, 1851 (1997)

K. A. Coble *et al., Astrophysical Journal* **519**, L5 (1999)

J. M. Colberg *et al., Monthly Notices of Royal Astronomical Society* **319**, 209 (2000)

M. Colless *et al., Monthly Notices of Royal Astronomical Society* **328**, 1039 (2001)

C. A. Collins, R. C. Nichol, and S. L. Lumsden, *Monthly Notices of Royal Astronomical Society* **154**, 295 (1992)

A. Cooray and R. Sheth, astro-ph/0206508

E. Corbelli and R Salucci, *Monthly Notices of Royal Astronomical Society* **311**, 441 (2000)

R. Cowsik and J. McClelland, *Physical Review Letters* **29**, 669 (1972)

R. Crittenden *et al., Physical Review Letters* **71**, 324 (1993)

P. de Bernardis *et al., Nature* **404**, 955 (2000)

A. Dekel, astro-ph/9705033, in Proceedings of the 3rd ESO-VLT Workshop on “Galaxy Scaling Relations: Origins, Evolution and Applications,” ed. L. da Costa (Springer)

S. Dodelson, *Astro physical Journal* **482**, 577 (1997)

S. Dodelson, E. I. Gates, and A. S. Stebbins, *Astrophysical Journal* **467**, 10 (1996)

S. Dodelson and E. Gaztanaga, *Monthly Notices of Royal Astronomical Society* **312**, 774 (2000)

S. Dodelson and J. M. Jubas, *Astrophysical Journal* **439**, 503 (1995)

S. Dodelson, W. H. Kinney, and E. W. Kolb, *Physical Review* **D56**, 3207 (1997)

S. Dodelson *et al., Astrophysical Journal* **572**, 140 (2002)

A. G. Doroshkevich, Ya. B. Zel’dovich, and R. A. Sunyaev, *Soviet Astronomy* **22**, 523 (1978)

F. W. Dyson, A. S. Eddington, and C. Davidson, *Philosophical Transactions of the Royal Society* **220A**, 291 (1920)

J. Edsjo and P. Gondolo, *Physical Review* **D56**, 1879 (1997)

G. Efstathiou, in *Physics of the Early Universe*, ed. J. A. Peacock, A. F. Heavens, and A. T. Davies (Edinburgh University Press, Edinburgh, 1990)

G. Efstathiou and S. J. Moody, *Monthly Notices of Royal Astronomical Society* **325**, 1603 (2001)

D. J. Eisenstein, W. Hu, and M. Tegmark, *Astrophysical Journal* **518**, 2 (1999)

D. J. Eisenstein and M. Zaldarriaga, *Astrophysical Journal* **546**, 2 (2001)

V. R. Eke, S. Cole, and C. S. Frenk, *Monthly Notices of Royal Astronomical Society* **282**, 263 (1996)

O. Elgaroy *et al.*, astro-ph/0204152

G. F. R. Ellis and R. M. Williams, *Flat and Curved Space-Times* (Clarendon Press, Oxford, 1990)

J. Ellis, T. Falk, K. A. Olive, and M. Schmitt, *Physics Letters* **B413**, 355 (1997)

X. Fan *et al., Astronomical Journal* **123**, 1247 (2002)

H. Feldman, N. Kaiser, and J. A.Peacock, *Astrophysical Journal* **426**, 23 (1994)

T. Ferris, *The Whole Shebang* (Touchstone Books, 1998)

R. A. Fisher, *Journal of the Royal Statistical Society* **98**, 39 (1935)

D. J. Fixsen *et al.*, *Astrophysical Journal* **473**, 576 (1996)

W. Freedman, *Scientific American* (March 1998)

W. Freedman *et al., Astrophysical Journal* **553**, 47 (2001)

W. Freudling *et al.*, astro-ph/9904118, *Astrophysical Journal* **523**, 1 (1999)

Y. Fukuda *et al., Physical Review Letters* **81**, 1562 (1998)

M. Fukugita, C. J. Hogan, and P. J. E. Peebles, *Astrophysical Journal* **503**, 518 (1998)

T. Gaier *et al.*, *Astrophysical Journal* **398**, L1 (1992)

G. Gerstein and Ya. B. Zel'dovich, *Zhurnal Eksperimental'noi i Teoreticheskoi Fiziki, Pis'ma v Redakts* **4**, 174 (1966)

G. Gibbons, S.Hawking, and T. Vachaspati eds., *The Formation and Evolution of Cosmic Strings* (Cambridge University Press, Cambridge 1990)

Gradshteyn and Ryzhik, *Table of Integrals, Series, and Products* (Academic Press, San Diego 1994)

L. Grego *et al., Astrophysical Journal* **552**, 2 (2001)

D. E. Groom *et al., The European Physical Journal*, **C15**, 1 (2000) and 2001 off-year partial update for the 2002 edition available on the PDG WWW pages (URL: http://pdg.lbl.gov/)

J. E. Gunn *et al., Astrophysical Journal* **223**, 1015 (1978)

A. Guth, *Physical Review* **D23**, 347 (1981)

A. Guth and E. J. Weinberg, *Nuclear Physics* **B212**, 321 (1983)

A. Guth, *The Inflationary Universe* (Perseus, 1998)

A. Guth and S.-Y. Pi, *Physical Review Letters* **49**, 1110 (1982)

A. Guth and S.-Y. Pi, *Physical Review* **D32**, 1899 (1985)

N. W. Halverson *et al., Astrophysical Journal* **568**, L28 (2002)

A. J. S. Hamilton, *Astrophysical Journal* **385**, L5 (1992)

A. J. S. Hamilton, astro-ph/9708102, in "The Evolving Universe" ed. D. Hamilton, Kluwer Academic, p. 185-275 (1998)

A. J. S. Hamilton and M. Tegmark, astro-ph/0008392

S. Hanany *et al., Astrophysical Journal* **545**, L5 (2000)

S. Hawking, *Physics Letters* **B115**, 295 (1982)

S. W. Hawking, L G. Moss, and J. M. Stewart, *Physical Review* **D26**, 2681 (1982)

M. P. Haynes *et al., Astronomical Journal* **117**, 2039 (1999)

M. M. Hedman *et al., Astrophysical Journal* **573**, L73 (2002)

J. P. Henry and K. A. Arnaud, *Astrophysical Journal* **372**, 410 (1991)

C. Hogan, *The Little Book of the Big Bang* (Copernicus, 1998)

D. W. Hogg, astro-ph/9905116

S. Hollands and R. M. Wald, gr-qc/0205058

W. Hu and D. J. Eisenstein, *Astrophysical Journal* **498**, 497 (1998)

W. Hu, M. Fukugita, M. Zaldarriaga, and M. Tegmark, astro-ph/0006436

W. Hu and N. Sugiyama, *Astrophysical Journal* **444**, 489 (1995)

W. Hu and N. Sugiyama, *Astrophysical Journal* **471**, 542 (1996)

W. Hu and M. Tegmark, *Astrophysical Journal* **514**, L65 (1999)

W. Hu and M. White, *Astrophysical Journal* **479**, 568 (1997a)

W. Hu and M. White, *New Astronomy* **2**, 323 (1997b)

E. Hubble, *Proceedings of the National Academy of Sciences* **15** (1929)

D. Huterer, L. Knox, and R. C. Nichol, *Astrophysical Journal* **555**, 547 (2001)

Y. I. Izotov and T. X. Thuan, *Astrophysical Journal* **500**, 188 (1998)

J. D. Jackson, *Classical Electrodynamics*, (Wiley, New York, 1998)

B. Jain and U. Seljak, *Astrophysical Journal* **484**, 560 (1997)

H. E. Jorgenson, E. Kotok, P. Naselsky, and I. Novikov, *Astronomy and Astrophysics* **294**, 639 (1995)

G. Jungman, M. Kamionkowski, and K. Griest, *Physics Reports* **267**, 195 (1996)

G. Jungman, M. Kamionkowski, A. Kosowsky, and D. N. Spergel, *Physical Review*

Letters **76**, 1007 (1995)

N. Kaiser, *Monthly Notices of Royal Astronomical Society* **227**, 1 (1987)

N. Kaiser, *Astrophysical Journal* **388**, 272 (1992)

N. Kaiser, G. Wilson, and G. Luppino, astro-ph/0003338

M. Kamionkowski, A. Kosowsky, and A. Stebbins, *Physical Review Letters* **78**, 2058 (1997a)

M. Kamionkowski, A. Kosowsky, and A. Stebbins, *Physical Review* **D55**, 7368 (1997b)

M. Kamionkowski, D. N. Spergel, and N. Sugiyama, *Astrophysical Journal* **426**, L57 (1994)

G. L. Kane, C. F. Kolda, L. Roszkowski, and J. D. Wells, *Physical Review* **D49**, 6173 (1994)

G. Kauffmann, J. M. Colberg, A. Diaferio, and S. D. M. White, *Monthly Notices of Royal Astronomical Society* **303**, 188 (1999)

B. G. Keating, *Astrophysical Journal* **560**, LI (2001)

C. R. Keeton, *Astrophysical Journal* **575**, LI (2002)

M. G. Kendall and A. Stuart, *The Advanced Theory of Statistics*, Vol. II (Van Nostrand, New York, 1969)

M. Kesden, A. Cooray, and M. Kamionkowski, *Physical Review Letters* **89**, 011304 (2002)

L. Knox, *Physical Review* **D52**, 4307 (1995)

L. Knox and Y.-S. Song, *Physical Review Letters* **89**, 011303 (2002)

C. S. Kochanek, *Astrophysical Journal* **466**, 638 (1996)

H. Kodama and M. Sasaki, *Prog. Theor. Phys. Suppl.* **78**, 1 (1984)

E. W. Kolb, *Blind Watchers of the Sky* (Perseus, 1996)

E. W. Kolb and M. S. Turner, *The Early Universe* (Addison-Wesley, Redwood City, CA 1990)

A. Kosowsky, *Annals of Physics* **246**, 49 (1996)

J. Kovac *et al.*, astro-ph/0209478

L. M. Krauss and B. Chaboyer, astro-ph/0111597

T. Kundic *et al., Astrophysical Journal* **482**, 75 (1997)

L. D. Landau and E. M. Lifshitz, *Quantum Mechanics* (Pergamon, Oxford 1977)

A. Lawrence *et al., Monthly Notices of Royal Astronomical Society* **308**, 897 (1999)

A. T. Lee *et al., Astrophysical Journal* **561**, LI (2001)

A. R. Liddle and D. H. Lyth, *Physics Reports* **231**, 1 (1993)

A. R. Liddle and D. H. Lyth, *Cosmological Inflation and Large Scale Structure* (Cambridge University Press, Cambridge, 2000)

J. E. Lidsey *et al.*, *Reviews of Modern Physics* **69**, 373 (1997)

E. M. Lifshitz, *Journal of Physics (Moscow)* **10**, 116 (1946)

D. N. Limber, *Astrophysical Journal* **117**, 134 (1953)

A. Linde, *Physics Letters* **B108**, 389 (1982)

A. Linde, *Particle Physics and Inflationary Cosmology* (Harwood Academic, Chur, Switzerland 1990)

J. Loveday, B. A. Peterson, S. J. Maddox, and G. Efstathiou, *Astrophysical Journal Supplement* **107**, 201 (1996)

D. H. Lyth and A. Riotto, *Physics Reports* **314**, 1 (1999)

C.-P. Ma and E. Bertschinger, *Astrophysical Journal* **455**, 7 (1995)

S. J. Maddox, G. Efstathiou, W. J. Sutherland, and J. Loveday, *Monthly Notices of Royal Astronomical Society* **242**, 43p (1990)

H. Magira, Y. P. Ying, and Y. Suto, *Astrophysical Journal* **528**, 30 (2000)

R. Maoh *et al.*, astro-ph/0011251

G. Marx and A. Szalay in *Neutrino '72*, ed. A. Frenkel and G. Marx (OMKDT-Technoinform, Budapest, 1972)

J. C. Mather *et al., Astrophysical Journal* **420**, 439 (1994)

J. C. Mather *et al., Astrophysical Journal* **512**, 511 (1999)

A. D. Miller *et al., Astrophysical Journal* **524**, LI (1999)

J. Miralda-Escude, *Astrophysical Journal* **380**, 1 (1991)

C. Misner, K. S. Thorne, and J. A. Wheeler, *Gravitation* (Freeman, San Francisco 1973)

R. Moessner and B. Jain, *Monthly Notices of Royal Astronomical Society* **294**, L18 (1998)

R. N. Mohapatra and P. B. Pal, *Massive Neutrinos in Physics and Astrophysics* (World Scientific, 1991)

V. F. Mukhanov, H. A. Feldman , and R. H. Brandenberger, *Physics Reports* **215**, 203 (1992)

P. Nath and R. Arnowitt, *Physics Letters* **B289**, 368 (1992)

C. B. Netterfield *et al., Astrophysical Journal* **571**, 604 (2002)

K. A. Olive, *Nucl Phys. Proc. Suppl.* **80**, 79 (2000)

K. A. Olive, G. Steigman, and T. P. Walker, *Physics Reports* **333**, 389 (2000)

J. M. O'Meara *et al., Astrophysical Journal* **552**, 718 (2001)

T. Padmanabhan, *Structure Formation in the Universe* (Cambridge Universe, Cambridge 1993)

B. E. J. Pagel, E. A. Simonson, R. J. Terlevich, and M. Edmunds, *Monthly Notices of Royal Astronomical Society* **255**, 325 (1992)

R. B. Partridge, *3K: The Cosmic Microwave Background* (Cambridge University, Cambridge 1995)

J. A. Peacock, *Cosmological Physics* (Cambridge University Press, Cambridge, 1999)

J. A. Peacock and S. J. Dodds, *Monthly Notices of Royal Astronomical Society* **267**, 1020 (1994)

J. A. Peacock and A. F. Heavens, *Monthly Notices of Royal Astronomical Society* **243**, 133 (1990)

P. J. E. Peebles, *Astrophysical Journal* **146**, 542 (1966)

P. J. E. Peebles, *Astrophysical Journal* **153**, 1 (1968)

P. J. E. Peebles, *Astrophysical Journal* **263**, LI (1982)

P. J .E. Peebles, *The Large-Scale Structure of the Universe* (Princeton University Press, Princeton, 1980)

P. J. E. Peebles and J. T. Yu, *Astrophysical Journal* **162**, 815 (1970)

U.-L. Pen and D. N. Spergel, *Physical Review* **D51**, 4099 (1995)

W. J. Percival *et al.*, astro-ph/0105252

L. Perivolaropoulos and T. Vachaspati, *Astrophysical Journal* **423**, 77 (1994)

S. Perlmutter *et al., Astrophysical Journal* **517**, 565 (1999)

M. Persic and P. Salucci, *Monthly Notices of Royal Astronomical Society* **258**, 14 (1992)

E. Pierpaoli, D. Scott, and M. White, *Monthly Notices of Royal Astronomical Society* **325**, 77 (2001)

M. H. Pinsonneault, G. Steigman, T. P. Walker, and V. K. Narayanan, astro-ph/0105439

A. G. Polnarev, *Soviet Astronomy* **29**, 607 (1985)

W. H. Press and P. Schechter, *Astrophysical Journal* **187**, 425 (1974)

W. H. Press *et al., Numerical Recipes in Fortran*, 2nd ed. (Cambridge University Press, Cambridge, 1992)

C. Pryke *et al.*, astro-ph/0104490

M. Ranch *et al., Astrophysical Journal* **489**, 7 (1997)

A. C. S. Readhead *et al., Astrophysical Journal* **346**, 566 (1989)

A. G. Riess *et al., Astronomical Journal* **116**, 1009 (1998)

J. Renn, T. Sauer, and J. Stachel, *Science* **275** 184 (1997)

L. Roszkowski, *Physics Letters* **B309**, 329 (1993)

V. Rubin, *Scientific American*, June (1983)

G. B. Rybicki and A. P. Lightman, *Radiative Processes in Astrophysics* (Wiley, New York, 1979)

R. K. Sachs and A. M. Wolfe, *Astrophysical Journal* **147**, 73 (1967)

A. Sandage, *Astrophysical Journal* **152**, L149 (1968)

W. Saunders *et al., Monthly Notices of Royal Astronomical Society* **317**, 55 (2000)

R. J. Scherrer and M. S. Turner, *Physical Review* **D33**, 1585 (1986)

D. J. Schlegel, D. P. Finkbeiner, and M. Davis, *Astrophysical Journal* **500**, 525 (1998)

P. Schneider, J. Ehlers, and E. E. Falco, *Gravitational Lenses* (Springer-Verlag, Heidelberg, 1992)

D. N. Schramm and M. S. Turner, *Reviews of Modern Physics* **70**, 303 (1998)

B. F. Schutz, *A First Course in General Relativity* (Cambridge University Press, Cambridge, 1990)

R. Scranton *et al.,* (The SDSS Collaboration), *Astrophysical Journal* **579**, 48 (2002)

S. Seager, D. Sasselov, and D. Scott, *Astrophysical Journal* 128, 407 (2000)

W. Rindler, *Essential Relativity* (Springer, 1977)

U. Seljak, *Astrophysical Journal* **435**, L87 (1994)

U. Seljak, *Astrophysical Journal* **482**, 6 (1997)

U. Seljak, astro-ph/0001493

U. Seljak and M. Zaldarriaga, *Astrophysical Journal* **469**, 437 (1996)

U. Seljak and M. Zaldarriaga, *Physical Review Letters* **78**, 2054 (1997)

R. K. Sheth and G. Tormen, *Monthly Notices of Royal Astronomical Society* **308**, 119 (1999)

J. Silk, *Astrophysical Journal* **151**, 459 (1968)

J. Silk, *The Big Bang* (W. H. Freeman & Co, 2001)

E. Skillman and R. C. Kennicutt, *Astrophysical Journal* **411**, 655 (1993)

E Skillman *et al., Astrophysical Journal* **431**, 172 (1994)

G. Smoot *et al., Astrophysical Journal* **396**, LI (1992)

R. S. Somerville and J. R. Primack, *Monthly Notices of Royal Astronomical Society* **310**, 1087 (1999)

T. Souradeep and B. Ratra, astro-ph/0105270

A. A. Starobinsky, *Physics Letters* **B117**, 175 (1982)

A. Stebbins, astro-ph/9609149

E. Stewart and D. Lyth, *Physics Letters* **B302**, 171 (1993)

M. Strauss *et al., Astrophysical Journal Supplement* **83**, 29 (1992)

M. A. Strauss and J. A. Willick, *Physics Reports* **261**, 271 (1995)

A. S. Szalay, T. Matsubara, and S. D. Landy, *Astrophysical Journal* **498**, LI (1998)

M. Tegmark, *Astrophysical Journal* **46**, L35 (1996)

M. Tegmark and G. Efstathiou, *Monthly Notices of Royal Astronomical Society* **281**, 1297 (1996)

M. Tegmark, *Physical Review* **D55**, 5895 (1997)

M. Tegmark, A. Taylor, and A. Heavens, *Astrophysical Journal* **480**, 22 (1997)

M. Tegmark *et al., Astrophysical Journal* **499**, 555 (1998)

M. Tegmark, D. J.Eisenstein, W. Hu, and A. de Oliveira-Costa, *Astrophysical Journal* **530**, 133 (2000)

M. Tegmark *et al., Astrophysical Journal* **571**, 191 (2002)

K. S. Thorne, *Black Holes and Time Warps* (Norton, New York 1994)

M. S. Turner, M. White, and J. E. Lidsey, *Physical Review* **D48**, 4613 (1993)

L. van Waerbecke *et al., Astronomy and Astrophysics* **358**, 30 (2000)

P. T. P. Viana and A. R. Liddle, *Monthly Notices of Royal Astronomical Society* **281**, 323 (1996)

P. T. P. Viana and A. R. Liddle, *Monthly Notices of Royal Astronomical Society* **303**, 535 (1999)

A. Vilenkin and E. P. S. Shellard, *Cosmic Strings and Other Topological Defects* (Cambridge University Press, Cambridge 2000)

M. S. Vogeley and A. S. Szalay, *Astrophysical Journal* **465**, 34 (1996)

R. V. Wagoner, *Astrophysical Journal* **179**, 343 (1973)

R. V. Wagoner, W. A. Fowler, and F. Hoyle, *Astrophysical Journal* **148**, 3 (1967)

R. M. Wald, *General Relativity* (University of Chicago, Chicago 1984)

D. Walsh, R. F. Carswell, and R. J. Weymann, *Nature* **279**, 381 (1979)

L. Wang and P. J. Steinhardt, *Astrophysical Journal* **508**, 483 (1998)

S. Weinberg, *Gravitation and Cosmology* (Wiley and Sons, New York 1972)

S. Weinberg, *The First Three Minutes* (Perseus Books 1993)

M. White, *Monthly Notices of Royal Astronomical Society* **321**, 1 (2001)

S. D. M. White, G. Efstathiou, and C. S. Frenk, *Monthly Notices of Royal Astronomical Society* **262**, 1023 (1993)

S. D. M. White and C. S. Frenk, *Astrophysical Journal* **379**, 52 (1991)

S. D. M. White, C. S. Frenk, and M. Davis, *Astrophysical Journal* **274**, LI (1983)

S. D. M. White, J. F. Navarro, A. E. Evrard, and C. S. Frenk, *Nature* **366**, 429 (1993)

S. D. M. White and M. Rees, *Monthly Notices of Royal Astronomical Society* **183**, 341 (1978)

G. Wilson *et al., Astrophysical Journal* **532**, 57 (2000)

M. L. Wilson and J. Silk, *Astrophysical Journal* **243**, 14 (1981)

D. M. Wittman *et al., Nature* **405**, 143 (2000)

J. Yang, M. S. Turner, G. Steigman, D. N. Schramm, and K. A. Olive, *Astrophysical Journal* **281**, 493 (1984)

D. G. York *et al.,* (The SDSS Collaboration), Astronomical Journal **120**, 1579 (2000)

M. Zaldarriaga and D. Harari, *Physical Review* **D52**, 3276 (1995)

M. Zaldarriaga and U. Seljak, *Physical Review* **D55**, 1830 (1997)

F. Zwicky, *Physica Acta* **6**, 124 (1933)

索 引

《现代物理基础丛书》已出版书目

（按出版时间排序）

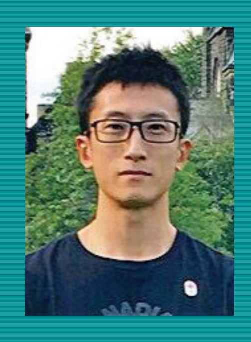
书名	作者	出版时间
1. 现代声学理论基础	马大猷 著	2004.03
2. 物理学家用微分几何（第二版）	侯伯元，侯伯宇 著	2004.08
3. 数学物理方程及其近似方法	程建春 编著	2004.08
4. 计算物理学	马文淦 编著	2005.05
5. 相互作用的规范理论（第二版）	戴元本 著	2005.07
6. 理论力学	张建树，等 编著	2005.08
7. 微分几何入门与广义相对论（上册·第二版）	梁灿彬，周彬 著	2006.01
8. 物理学中的群论（第二版）	马中骐 著	2006.02
9. 辐射和光场的量子统计	曹昌祺 著	2006.03
10. 实验物理中的概率和统计（第二版）	朱永生 著	2006.04
11. 声学理论与工程应用	朱海潮，等 编著	2006.05
12. 高等原子分子物理学（第二版）	徐克尊 著	2006.08
13. 大气声学（第二版）	杨训仁，陈宇 著	2007.06
14. 输运理论（第二版）	黄祖洽 著	2008.01
15. 量子统计力学（第二版）	张先蔚 编著	2008.02
16. 凝聚态物理的格林函数理论	王怀玉 著	2008.05
17. 激光光散射谱学	张明生 著	2008.05
18. 量子非阿贝尔规范场论	曹昌祺 著	2008.07
19. 狭义相对论（第二版）	刘　辽，等 编著	2008.07
20. 经典黑洞与量子黑洞	王永久 著	2008.08
21. 路径积分与量子物理导引	侯伯元，等 著	2008.09
22. 量子光学导论	谭维翰 著	2009.01
23. 全息干涉计量——原理和方法	熊秉衡，李俊昌 编著	2009.01
24. 实验数据多元统计分析	朱永生 编著	2009.02
25. 微分几何入门与广义相对论(中册·第二版)	梁灿彬，周彬 著	2009.03
26. 中子引发轻核反应的统计理论	张竞上 著	2009.03
27. 工程电磁理论	张善杰 著	2009.08

书名	作者	出版时间
28. 微分几何入门与广义相对论(下册·第二版)	梁灿彬，周彬 著	2009.08
29. 经典电动力学	曹昌祺 著	2009.08
30. 经典宇宙和量子宇宙	王永久 著	2010.04
31. 高等结构动力学(第二版)	李东旭 著	2010.09
32. 粉末衍射法测定晶体结构(第二版·上、下册)	梁敬魁 编著	2011.03
33. 量子计算与量子信息原理	Giuliano Benenti 等 著	
——第一卷：基本概念	王文阁，李保文 译	2011.03
34. 近代晶体学(第二版)	张克从 著	2011.05
35. 引力理论(上、下册)	王永久 著	2011.06
36. 低温等离子体	B. M. 弗尔曼，И. M. 扎什京 编著	
——等离子体的产生、工艺、问题及前景	邱励俭 译	2011.06
37. 量子物理新进展	梁九卿，韦联福 著	2011.08
38. 电磁波理论	葛德彪，魏 兵 著	2011.08
39. 激光光谱学	W. 戴姆特瑞德 著	
——第 1 卷：基础理论	姬 扬 译	2012.02
40. 激光光谱学	W. 戴姆特瑞德 著	
——第 2 卷：实验技术	姬 扬 译	2012.03
41. 量子光学导论(第二版)	谭维翰 著	2012.05
42. 中子衍射技术及其应用	姜传海，杨传铮 编著	2012.06
43. 凝聚态、电磁学和引力中的多值场论	H. 克莱纳特 著	
	姜 颖 译	2012.06
44. 反常统计动力学导论	包景东 著	2012.06
45. 实验数据分析(上册)	朱永生 著	2012.06
46. 实验数据分析(下册)	朱永生 著	2012.06
47. 有机固体物理	解士杰，等 著	2012.09
48. 磁性物理	金汉民 著	2013.01
49. 自旋电子学	翟宏如，等 编著	2013.01
50. 同步辐射光源及其应用(上册)	麦振洪，等 著	2013.03
51. 同步辐射光源及其应用(下册)	麦振洪，等 著	2013.03
52. 高等量子力学	汪克林 著	2013.03
53. 量子多体理论与运动模式动力学	王顺金 著	2013.03
54. 薄膜生长（第二版）	吴自勤，等 著	2013.03

55. 物理学中的数学物理方法	王怀玉　著	2013.03
56. 物理学前沿——问题与基础	王顺金　著	2013.06
57. 弯曲时空量子场论与量子宇宙学	刘　辽，黄超光　著	2013.10
58. 经典电动力学	张锡珍，张焕乔　著	2013.10
59. 内应力衍射分析	姜传海，杨传铮　编著	2013.11
60. 宇宙学基本原理	龚云贵　著	2013.11
61. B 介子物理学	肖振军　著	2013.11
62. 量子场论与重整化导论	石康杰，等　编著	2014.06
63. 粒子物理导论	杜东生，杨茂志　著	2015.01
64. 固体量子场论	史俊杰，等　著	2015.03
65. 物理学中的群论（第三版）——有限群篇	马中骐　著	2015.03
66. 中子引发轻核反应的统计理论（第二版）	张竞上　著	2015.03
67. 自旋玻璃与消息传递	周海军　著	2015.06
68. 粒子物理学导论	肖振军，吕才典　著	2015.07
69. 量子系统的辛算法	丁培柱　编著	2015.07
70. 原子分子光电离物理及实验	汪正民　著	2015.08
71. 量子场论	李灵峰　著	2015.09
72. 原子核结构	张锡珍，张焕乔　著	2015.10
73. 物理学中的群论（第三版）——李代数篇	马中骐　著	2015.10
74. 量子场论导论	姜志进　编著	2015.12
75. 高能物理实验统计分析	朱永生　著	2016.1
76. 数学物理方程及其近似方法	程建春　著	2016.6
77. 电弧等离子体炬	M. F. 朱可夫 等　编著 陈明周，邱励俭　译	2016.6
78. 现代宇宙学	Scott Dodelson　著 张同杰，于浩然　译	2016.8



张同杰　北京师范大学天文系教授、博士生导师，教育部新世纪人才获得者，中科院上海天文台天体物理学博士。曾在美国亚利桑那大学物理系和天文系访问合作和从事博士后研究。加拿大理论天体物理研究所(CITA)(多伦多大学)访问学者；美国加州大学伯克利分校(U.C. Berkeley) 天文系和劳伦兹国家实验室(LBNL)高级访问学者。目前主要研究领域：宇宙学与相对论天体物理—早期宇宙与原初引力波；宇宙加速膨胀理论和观测与暗能量物理；宇宙学大尺度结构的数值模拟；搜寻地外文明研究(SETI)。在国际天体物理和物理核心期刊发表SCI学术论文80多篇。



于浩然　加拿大理论天体物理研究所 (CITA) (多伦多大学) 博士后，北京大学科维理天文与天体物理研究所 (KIAA) 博士后，北京师范大学天文系天体物理学博士。主要研究领域：*N* 体数值模拟；并行计算；宇宙大尺度结构数值模拟程序 CUBEP3M 的开发和优化；宇宙大尺度结构的形成、演化及其非高斯性；中微子宇宙学；暗物质和弱引力透镜；暗能量和宇宙的加速膨胀；宇宙学数据的分析方法。

www.sciencep.com



科学出版社互联网入口

科学数理分社

电话：(010) 64017957

Email：qianjun@mail.sciencep.com

销售分类建议：高等物理



ISBN 978-7-03-049544-0

定　价：138.00 元